Université Ziane Achour Djelfa.
Faculté des sciences exactes et de l'informatique.
Département de mathématiques et de l'informatique.

جامعة زيان عاشور الجلفة

Corrigé type de Contrôle TD (Introduction à la théorie des opérateurs linéaires)

Exercice 1 (2 points): Soit E un espace vectoriel normé. On définit l'opérateur $\mathcal{T}$ comme suit:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : (E\ ,\quad \|\cdot\|_E) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|)\,, \\ f & \to & \int_0^1 f(t)\,dt. \end{array}$$

Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall f, g \in E$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \int_0^1 (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int_0^1 f(t)\,dt \ + \beta \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= \alpha \mathcal{T}(f(x)) + \beta \mathcal{T}(g(x))\,. \end{aligned}$$

Dans ce cas on dite que $\mathcal{T}$ est un opérateur **linéaire**.

Exercice 2 (6 points):

- Rappeler le théorème de Banach sur les applications ouvertes **(1,5 point)**:

Théorème 1 (Application ouverte) *Soient $E_{\|\cdot\|}$ et $F_{\|\cdot\|}$ deux espaces de Banach. Alors, tout élément surjectif $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ est un application ouverte.*

- Rappeler la définition de l'opérateur monomorphisme **(1,5 point)**:

Définition 1 (Monomorphisme) *Soient $E_{\|\cdot\|}$ et $F_{\|\cdot\|}$ deux espaces vectoriels normés. On appelle tout élément injectif $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, F)$, un monomorphisme entre E et F.*

- Rappeler le théorème de l'isomorphisme de Banach et montrer que tout opérateur monomorphisme ouvert est un isomorphisme **(3 points)**:

Théorème 2 (Isomorphisme de Banach)

Soient $E_{\|\cdot\|}$ et $F_{\|\cdot\|}$ deux espaces de Banach et $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

$$\mathcal{T} \text{ est un bijection entre } E \text{ et } F \Longrightarrow \mathcal{T} \text{ est un isomorphisme entre } E \text{ et } F.$$

Remarque 1 *Tout opérateur monomorphisme ouvert est un isomorphisme.*

En effet; tout opérateur monomorphisme est un élément injectif $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(E, F)$.

Donc si cet opérateur $\mathcal{T}$ est un application ouverte, alors il est surjectif entre deux espaces de Banach E et F.

D'après le théorème de l'isomorphisme de Banach $\mathcal{T}$ est un bijection entre E et F.

Alors $\mathcal{T}$ est un isomorphisme entre E et F.

Bilal BASTI