Université Ziane Achour Djelfa.
Faculté des sciences exactes et informatique.
Département de mathématiques et de l'informatique.

Séries d'exercices pour $3^{ième}$ année mathématiques (LMD-S6).
Promotion : 2019/2020.

Série N°2 (Introduction à la théorie des opérateurs linéaires)

Exercice 1:

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient f, g et u trois fonctions définies de $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+$, tel que:

$$(\mathbf{i})\ \ f(x) = k\mathrm{id}(x)\,,\ \ (\mathbf{ii})\ \ g(x) = \frac{kx}{x+1},\ \ (\mathbf{iii})\ \ u(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{si} \quad x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right)\,, \\ 0, & \text{si} \quad x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right)\,. \end{cases}$$

Déterminer l'espace auquel appartient chaque fonction, $[L([a,b], \mathbb{R}_+)\,;\ C([a,b], \mathbb{R}_+)\,;\ \mathcal{L}([a,b], \mathbb{R}_+)]\,.$

Exercice 2:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie comme suit:

$$\begin{array}{rcl} f_n : (\mathbb{R}_+\,,\ \ |\cdot|) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|)\,, \\ x & \to & \frac{5x}{n+3} + \frac{e^{-2n}}{x+2e^{-n}},\ n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

1) Montre que $f_n \notin L(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\,.$

2) Montre que $f_n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est converge vers une limite unique $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, (sans calcul).

Exercice 3:

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ un espace vectoriel normé et son norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{0\le x\le 1} |u(x)|\,.$

On définit l'opérateur $\mathcal{A}u$ comme suit:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : (E\,,\ \ \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|)\,, \\ u & \to & \int\limits_0^x u(t)\,dt. \end{array}$$

1) Montre que $\mathcal{A}u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, et majorer son norme.

2) Soit $\mathcal{B}u = \mathcal{A}u + \frac{1}{2}x$. Montre que $\mathcal{B}u \notin \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, mais tous ses éléments dans un espace de Banach.

3) Supposons que u est monotone, où $u(0) = -u(1) = 1$. Montre que $\left(\frac{d}{dx}\mathcal{B}u(x) + u(0)\right) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})\,.$

4) Soit $(\mathcal{T}_n u) = n\mathcal{B}u\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montre que $(\mathcal{T}_n u)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est converge vers $\mathcal{T}u = u(0) + \frac{1}{2}$.

Exercice 4:

Soit $E = C([0, e-1], \mathbb{R})$ un espace vectoriel normé et son norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\le x\le e-1} |f(x)|\,.$

On définit l'opérateur $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_n : (E\,,\ \ \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|)\,, \\ f & \to & \frac{e-x}{\pi+1} f(x) + n \int\limits_0^{\frac{e-1}{n}} \frac{f(t)}{nt+1}dt,\ n \in \mathbb{N}^*. \end{array}$$

1) Montre que $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est borné sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et majorer son norme.

2) À l'hypotèse de $f'(x)$ est continue, montre que $(\mathcal{T}_n f)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est converge vers une limite unique:

$$\mathcal{T}f(x) = \frac{e-x}{\pi+1} f(x) + f(0)\,.$$