Université Ziane Achour Djelfa.
Faculté des sciences exactes et informatique.
Département de mathématiques et de l'informatique.

Séries d'exercices pour $3^{ième}$ année mathématiques (LMD-S6).
Promotion : 2019/2020.

Série N°3 (Introduction à la théorie des opérateurs linéaires)

Exercice 1 : Soit :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{L}\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right);\ \text{tel que } \frac{|f(x)|}{\cos^3(x)+1} < +\infty \right\}.$$

On définie sur cette espace l'application suivante $\|f\|_* = \sup\limits_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} \frac{|f(x)|}{\cos^3(x)+1}$, et l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T} : (E\ ,\quad \|\cdot\|_*) & \rightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|)\,, \\ f & \rightarrow & \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx. \end{array}$$

1) Vérifier que $(E, \|\cdot\|_*)$ est un espace vectoriel normé.

2) Montrer que $\mathcal{T}$ est borné dans E' et calculer sa norme.

Exercice 2 : Soit :

$$f : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right) \rightarrow \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right);\ (x, y) \rightarrow (x - y, x).$$

Est-ce-que f est un monomorphisme? De plus est un ouvert? Que concluez-vous?

Exercice 3 : Montrer que $\mathcal{T}$ est un isomorphisme tel que $\mathcal{T}$ est un opérateur donné par :

$$\mathcal{T} : \left(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\right) \rightarrow \left(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\right);\ (x, y, z) \rightarrow (2x + y, y - z, x + z).$$

Exercice 4 : Dans l'espace $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$, considérons le sous-espace

$$E_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \frac{1}{\pi} y = 0 \right\},$$

et définissons dans ce sous-espace les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f_0 & : & (E_0, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|);\ (x, y) \rightarrow f_0(x, y) = \pi x \\ f_1 & : & (E_0, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|);\ (x, y) \rightarrow f_1(x, y) = -\sqrt{\pi} x. \end{array}$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach forme analytique, chercher f sous la forme :

$$f : \left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|);\ (x, y) \rightarrow f(x, y) = ax + by,$$

qui prolonge f_0 (respectivement f_1) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : Dans l'espace $\left(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\right)$, considérons le sous-espace

$$E_0 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - \pi z = 0 \right\},$$

et définissons dans ce sous-espace l'application suivante :

$$f_0 : (E_0, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|);\ (x, y, z) \rightarrow f_0(x, y, z) = x.$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach forme analytique, chercher f sous la forme :

$$f : \left(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2\right) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|);\ (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = ax + by + cz,$$

qui prolonge f_0 sur $\mathbb{R}^3$.