Université Ziane Achour Djelfa.
Faculté des sciences exactes et informatique.
Département de mathématiques et de l'informatique.

Séries d'exercices pour $3^{ième}$ année mathématiques (LMD-S6).
Promotion : 2019/2020.

**Série N°4 (Introduction à la théorie des opérateurs linéaires)**

**Exercice 1 :** Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x)|$. On définit l'opérateur :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{T}: & (E, \|\cdot\|_\infty) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ & f & \to & \int_0^x t f(t)\, dt. \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est un opérateur compact par deux méthodes.

**Exercice 2 :** Soit $E = L^2(\mathbb{R})$ l'espace des applications carrées intégrables sur $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'opérateur :

$$\begin{array}{llll} \mathcal{T}: & (E, \|\cdot\|_{L^2}) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ & f & \to & \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt. \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est un opérateur compact.

**Exercice 3 :** Soit $E = L^p\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \mathbb{R}\right)$ l'espace des applications dont la puissance d'exposant $p > 1$ est intégrable dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $q > 1$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant le théorème d'Ascoli-Arzelà, montrer que l'opérateur :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{T}: (E \quad, \|\cdot\|_{L^p}) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ f & \to & \int_0^x \sin(t) \cos^{\frac{1}{q}}(t)\, f(t)\, dt. \end{array}$$

est complètement continue.

La même question pour l'opérateur :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}: (E \quad, \|\cdot\|_{L^p}) & \to & (\mathbb{R}, |\cdot|), \\ f & \to & (q+1)^{\frac{1}{q}} \int_0^x \ln(g(t))\, g^{-\frac{1}{q}}(t)\, f(t)\, [g'(t)]^{\frac{1}{q}} dt, \end{array}$$

tel que $g(t)$ est une fonction positive continue croissante et $g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$.