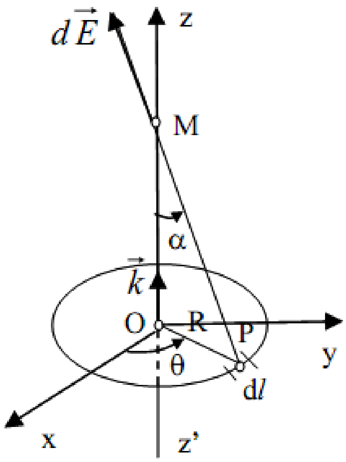
Fiche N°4 : Correction

Exercice N°1 : Solution

1. **Le champ électrostatique crée par une conférence uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda > 0$:**

n élément dl de la circonférence porte la charge : $dq = \lambda\, dl$
et crée en y un champ électrique élémentaire : $(a = R)$



$$dE = \frac{K\, dq}{r^2} = \frac{K\, \lambda\, dl}{a^2 + y^2} \quad (1)$$

Le champ total par raison de la symétrie est porté sur oy par conséquent :

$$E = E_y = \int dE_y = \int dE\, cos\theta \quad (2)$$

Avec : $cos\alpha = \frac{y}{(a^2+y^2)^{1/2}}$ d'où : $E_y = \int \frac{K\, \lambda\, y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\, dl$ (3)

, avec : $dl = a\, d\theta$

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{K\, \lambda\, y\, a}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\, d\theta = \frac{K\, \lambda\, y\, 2\pi\, a}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Et comme ; $q = \lambda\, 2\pi\, a$ donc :

$$E = \frac{K\, q\, y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5)$$

2. ***Le potentiel électrostatique :***

$$V = -\int E\, dy = -\int \frac{K\, q\, y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\, dy = \frac{K\, q}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + C \quad (6)$$

Alors :

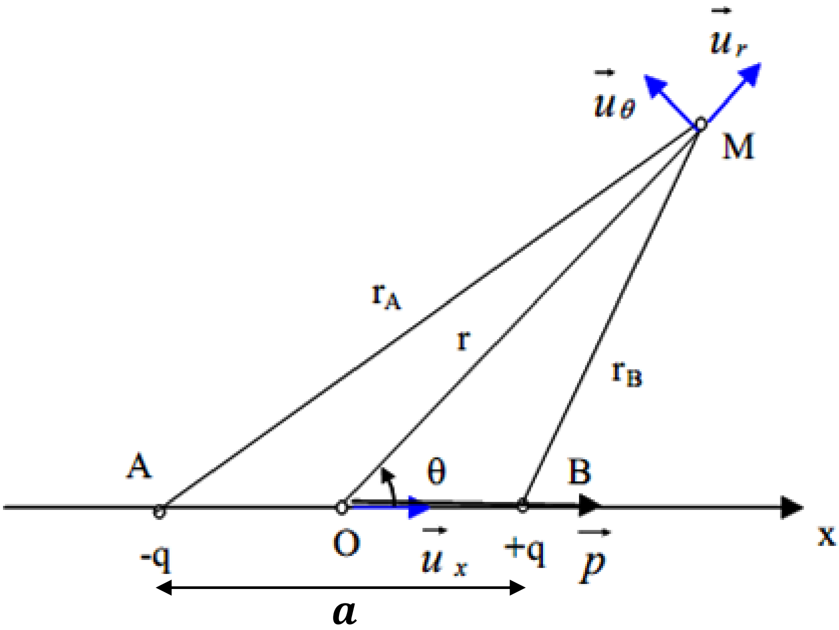
$$V = \frac{K\, q}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + C \quad (7)$$

Exercice N°2 : Solution

1. ***Champ électrostatique crée par un dipôle électrique en un point quelconque M.***

TD N°4 : Le dipôle électrique

La symétrie de révolution autour de l'axe portant le dipôle nous a permet d'exprimer le champ et le potentiel en coordonnées polaires (r,θ)de centre O et de base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$. Avec $cos\theta = (\vec{u}_r,\vec{\imath})$. *(Figure ci-dessous)*



1. Le potentiel électrique crée par un dipôle est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{|r_B - r_A|}{r_A\,r_B}\right) \qquad (1)$$

Compte tenu du fait que : $a \ll r$ nous pouvons écrire : $r_A \approx r_B = r$

$$cos\theta = \frac{|\Delta r|}{a} \Rightarrow |\Delta r| = a\,cos\theta \qquad (2)$$

Sachant que : $P = q\,a$ on obtient finalement :

$$V(M) = \frac{q\,a\,cos\theta}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2} = \frac{P\,cos\theta}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2} \qquad (3)$$

2. Le champ électrostatique crée par le dipôle :

En coordonnées polaires le champ s'écrit comme :

$$\vec{E}_M(r,\theta) = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta \qquad (4)$$

A partir de la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{gard}V$ on peut écrire :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{2\,P\,cos\theta}{r^3} \qquad (5)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{P\,sin\theta}{r^3} \qquad (6)$$

Finalement, le champ s'écrit d'après l'équation (4) comme :

$$\vec{E}_M = \frac{P}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}(2\ cos\theta\vec{u}_r + sin\theta\vec{u}_\theta) \qquad (7)$$

Le module du champ électrostatique est :

$$E = \sqrt{{E_r}^2 + {E_\theta}^2} = \frac{P}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\,(4\,cos^2\theta + sin^2\theta)^{1/2} \quad (8)$$

D'où :

$$E = \frac{P}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\,(3cos^3\theta + 1)^{1/2} \qquad (9)$$

3. Surface équipotentielle : le potentiel est constant dans ce cas : $V = V_0$.

Donc ; $V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{P\,cos\theta}{r^2} = V_0 = C^{te}$ (10)

$\Rightarrow$ $r^2 = \frac{P}{4\pi\,\varepsilon_0 V_0} \times cos\theta$ (11)

Pour chaque valeur de V_0 existe une surface équipotentielle à la distance r du centre O.

4. Lignes de champ :

Le long de la ligne de champ, le champ $\vec{E}$ et le déplacement $\overrightarrow{dr}$ doivent être colinéaires ce qui exige : $\vec{E}\wedge\overrightarrow{dr} = \vec{0}$ où :

$\vec{E}_M(r,\theta) = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta$ (12) et $\overrightarrow{dr}(r,\theta) = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$ (13)

Alors : $$\begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta \\ E_r & E_\theta \\ dr & r\,d\theta \end{vmatrix} = r\,E_r\,d\theta - E_\theta\,dr = 0 \qquad (14)$$

Donc en replaçant les termes de E_r et E_θ on obtient :

$$\frac{K\,P}{r^3}\left(2\,cos\theta\; r\; d\theta - sin\theta\; dr\right) = 0 \qquad (15)$$

Donc : $2\,cos\theta\; r\; d\theta - sin\theta\; dr = 0$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dr}{r} = 2\,\frac{cos\theta\; d\theta}{sin\theta} = 2\,\frac{d(sin\theta)}{sin\theta} \qquad (16)$$

Après intégration on trouve :

$$\ln r = 2\ln(sin\theta) + K \qquad (17)$$

or : $\ln\left(\frac{r}{sin^2\theta}\right) = K$, finalement :

$$\frac{r}{sin^2\theta} = K_2 \quad \Rightarrow r = K_2\; sin^2\theta \qquad (18)$$

C'est l'équation en coordonnées polaires d'une famille de lignes de champ.