Université de Djelfa
faculté des sciences exacte et de l'infs
département des maths et infs
1 ére année **M I**
Matiére : analyse 2

Equations linéaires du premier ordre

Définition: On appelle équation linéaire du premier ordre une équation linéaire par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle s'écrit

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues de$x$ données (ou des constantes) .

Résolution de l 'équation linéaire : Nous allons chercher la solution de l'équation sous forme de produit de deux fonctions de x

$$y = u(x)v(x)$$

Dérivons les deux membres de l'égalité , on trouve

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituant l'expression de la dérivée obtenue dans l'équation

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + p(x)uv = Q$$

on a

$$u(\frac{dv}{dx} + pv) + v\frac{du}{dx} = Q$$

Choisissons la fonction v de sorte que l'on ait

$$\frac{dv}{dx} + pv = 0$$

Séparant les variables dans cette équation différentielle en v , on trouve

$$\frac{dv}{v} = -pdx$$

en intégrant

$$-Log|C1| + Log|v| = -\int Pdx$$

ou

$$v = C_1 e^{\int -P dx}$$

Comme il nous suffit d'avoir une solution quelconque non nulle de l'équation, nous prendrons pour fonction $v(x)$

$$v(x) = e^{\ \int P dx}$$

où $\int P dx$ est une primitive quelconque. Il est évident que $v(x) \neq 0$.
Substituant la valeur trouvée de $v(x)$ dans l'équation , on obtient

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

ou

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + c$$

Substituant dans la formule

$$y = v(x)(\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + c)$$

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + cv(x)$$

Exemple Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{(x+1)} y = (x+1)^3$$

Posons

$$y = u(x)v(x)$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituant l'expression $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, on obtient

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2}{(x+1)} uv = (x+1)^3$$

$$u(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{(x+1)} v) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

Pour la détermination de$v$, on obtient l'équation

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{(x+1)}v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{(x+1)}$$

d'où

$$Log|v| = 2Log|x+1| \qquad ou \qquad v = (x+1)^2.$$

Substituant l'expression de la fonction v dans l'équation , on obtient

$$(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

d'où

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

l'intégrale générale de l'équation donnée s'écrit

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

pour la condition $y_0 = 3$ pour $x_0 = 0$

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2.$$

$$C = \frac{5}{2}$$

la solution particulière cherchée est

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Remarque : les équations différentiellès à coefficients constants

$$\frac{dy}{dx} + ay = b$$

où a et b sont des constantes
alors on a

$$dy = dx$$

$$\frac{dy}{(-ay+b)} = dx$$

$$-\frac{1}{a}Log|-ay+b| = x + C$$

$$Log|-ay+b| = -(ax + C_1),$$

$$ou \;\; C_1 = a * C$$

alors

$$-ay + b = e^{-(ax+C)}$$

$$y = -\frac{1}{a}e^{-(ax+C)} + \frac{b}{a}$$

et finalement

$$y = Ke^{-ax} + \frac{b}{a}$$

Références :

- N.Piskounov,calcul differentile et integral