- السلسلة رقم 01 -

حل التمرين رقم 01 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

المقصود بـ $a_{11}$ هو العنصر الذي يقع في السطر الأول والعمود الأول على الترتيب.

وإذا قلنا $a_{52}$ معناه العنصر الذي يقع في السطر الخامس والعمود الثاني.

إذن لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

/ شكل هذه المصفوفة هو $A_{(4,5)}$ بمعنى مصفوفة ذات أربعة أسطر وخمسة أعمدة.

/ تعيين القيم : $a_{42} = 5$ ، $a_{31} = 3$ ، $a_{25} = 1$ ، $a_{33} = 2$

- حساب منقول مصفوفة : منقول مصفوفة هو جعل أعمدة المصفوفة أسطر، وأسطرها أعمدة والعكس صحيح. ونرمز لها بالرمز $A^t$ والحرف $t$ : Transposée : منقول.

$$A_{(m \times n)} = (a_{ij})_{\substack{i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}}}$$

$$A^t_{(n \times m)} = (a_{ji})_{\substack{j = \overline{1,n} \\ i = \overline{1,m}}}$$

إذن : المصفوفة أعلاه منقولها هو :

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

وهكذا مع المصفوفة الثالثة.

## حل التمرين 2 :

لتكن لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} , 2B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} , A - B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

وهكذا دواليك .

$$2A + B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

## التمرين 3 :

لتكن لدينا المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 2 & x+y \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 4 & -x+y \\ 3 & 4x \end{pmatrix}$$

أوجد $x , y$ اذا علمت أن .

$$A + B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2x + 4 & -1 - x + y \\ 5 & 5x + y \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد :

$$2x + 4 = 8 \text{ ——— } (1)$$
$$-1 - x + y = 3 \text{ ——— } (2)$$
$$5x + y = 16 \text{ ——— } (3)$$

من 1 نجد : $x = 2$

نعوضه في 2 أو 3 نجد $y = 6$ .

نفس الشيء بالنسبة للطرح .

## التمرين 4 :

لتكن لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

أحسب : $AB$ و $BA$ .

أولاً : حتى يمكن ضرب مصفوفتين لابد من التحقق لشرط ألا وهو: يجب أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد أسطر الثانية

بمعنى : إذا كان

$$A_{(m,p)} \times B_{(q,n)} = C_{(m,n)}$$

الشرط هو يجب أن يكون : $p = q$

إذا تحقق الشرط يمكن الضرب .

وتكون عملية الضرب على النحو التالي :

مثال :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ,\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} ,\ C\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$A\times B = C ,\quad c_{11}=a_{11}\times b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} \;/\; c_{12}=a_{11}\, b_{12}+a_{12}b_{22}$$

$$c_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} \;/\; c_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}$$

بمعنى نضرب السطر الأول من $A$ في العمود الأول من $B$ لنتحصل على العنصر الأول من $C$ أي $c_{11}$ .

وللحصول على $c_{12}$ نضرب السطر الأول من $A$ في العمود الثاني من $B$.

وللحصول على $c_{21}$ نضرب السطر الثاني من $A$ في العمود الأول من $B$

" " $c_{22}$ نضرب السطر الثاني من $A$ في السطر الثاني من $B$

إذن :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 6 & 14 & 16 \\ 8 & 28 & 33 \\ 7 & 20 & 15 \end{pmatrix} ,\quad B\cdot A=\begin{pmatrix} 21 & -4 & 32 \\ 3 & -2 & 10 \\ 23 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$

الضرب غير تبديلي في المصفوفات .

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} ,\ B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا $A_{(4\times 2)}$ ، $B_{(2\times 3)}$ إذن عدد أعمدة الأولى يساوي عدد أسطر الثانية ومنه يمكن إجراء الجداء $A\times B$ .

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 26 & 6 & 14 \\ 19 & 1 & 13 \\ 2 & 3 & -1 \\ 17 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

أما الجداء $B\times A$ فلا يمكن إجراؤه لأن عدد أعمدة $B$ لا يساوي عدد أسطر $A$ .

التمرين 5: أترك للطلبة الحل، لأن في التمرين لا يوجد فيه حالات خاصة، و إنما مجرد عمليات حسابية سبق الإشارة إليها.

التمرين 6:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad f(x) = x^2 - 5x + 3 .$$

أحسب $f(A)$ .

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و هكذا بالنسبة للعنصر الثاني.

التمرين 7: حساب المحددات

لدينا ثلاث طرق لحساب المحددات.

الطريقة 1: القانون المتبع في هذه الطريقة هو:

$$|A| = \sum_{i \text{ ou } j} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

$A_{ij}$ : هي المصفوفة $A$ محذوفا منها السطر $i$ و العمود $j$

فإذا كانت لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

بتطبيق هذا القانون:

يجب أولا اختيار سطر أو عمود نقوم من خلاله بحساب المحدد وليكن السطر الأول

$$|A| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ولكن المثال الأول من هذا التمرين:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} , \quad |A| = +3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -38$$

الطريقة الثانية : وهي صالحة فقط في المحددات من الدرجة الثالثة.

مثال : لتكن لدينا المصفوفة A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

لحساب محدد هذه المصفوفة نقوم بإضافة العمودين الأول والثاني على النحو التالي :

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

نقوم بضرب عناصر الأقطار الرئيسية ثم نجمعها مع بعض. ثم نطرح منها الأقطار غير الرئيسية على النحو التالي :

$$(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$
$$+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})$$

وبالتطبيق على المثال السابق

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$-(8+18+1) \quad + \quad (-12-3+4) \quad = -38.$$

كما يمكن حساب المحدد وفق هذه الطريقة ولكن بإضافة السطر الأول والثاني :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad -\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= -27 - 11 = -38.$$

## الطريقة الثالثة : طريقة الإقصاء لغوص : L'élémination de Gauss.

وفحوى هذه الطريقة أننا نقوم بتصفير جزء من المصفوفة حتى تكون مصفوفة مثلثية علوية أو سفلية. بمعنى أن يكون ما تحت القطر أو ما فوقه أصفار. حتى نتمكن من حساب المحدد من خلال ضرب عناصر القطر الرئيسي فقط

وليكن المثال السابق :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

أولا نقوم بقلب السطر الأول مع السطر الثاني حتى لا نحصل على كسور كثيرة، ولتسهيل عملية الحساب، حيث أنه بتغيير السطر الأول مكان الثاني لا تتغير قيمة المحدد وإنما تتغير الإشارة فقط حسب خواص المحددات.

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بتثبيت السطر الأول وتصفير عناصر العمود الأول التي تقع تحت القطر الرئيسي على النحو التالي.

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L'_2 = L_2 - 3L_1 \\ L'_3 = L_3 - L_1 \end{matrix} \longrightarrow -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -13 & -7 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$L_1$ ، $L_2$ ، $L_3$ ترمز للأسطر الأول والثاني والثالث على التوالي

أما $L'_2$ ، $L'_3$ فترمز للسطر الثاني والسطر الثالث اللذين سنحصل عليهما بعد إجراء العمليات على الأسطر.

أي :

السطر الأول : $1 \ 4 \ 3 \to L_1$

السطر الثاني : $3 \ -1 \ 2 \to L_2$

السطر الثالث : $1 \ 2 \ -1 \to L_3$

$0 \ -13 \ -7 \to L'_2$

$0 \ -2 \ -4 \to L'_3$

لقد قمنا بتصفير عناصر العمود الأول، نقوم بتصفير عناصر العمود الثاني وهي في هذه الحالة عنصر واحد.

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -13 & -7 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad L_3' = L_3 - \frac{2}{13}L_2 \rightsquigarrow |A| = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -13 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{38}{13} \end{vmatrix}$$

نتوقف عند هذا الحد لأن ما تحت القطر أصفار. إذن:

$$|A| = -\left(1 \times (-13) \times \left(-\frac{38}{13}\right)\right) = -38.$$

نقوم بحساب محدد هذه المصفوفة بطريقة Gauss حتى تترسخ في الأذهان.

$$2/\quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - L_1 \end{matrix} \rightsquigarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad L_3' = L_3 - \frac{1}{3}L_2$$

في هذه الحالة نستطيع ضرب السطر الثاني في $\frac{1}{3}$ وطرحه من السطر الثالث أو نقوم بتحويل السطر الثالث مكان الثاني وبعدها نقوم بضرب السطر الثاني في 3 ثم نقوم بطرحه من الثالث حيث تكون النتيجة في الأخير متساوية.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times \left(-\frac{11}{3}\right) = -11.$$

نجرب قلب السطرين الثاني والثالث نجد:

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad L_3' = L_3 - 3L_2 \rightsquigarrow |A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -(1 \times 1 \times 11)$$

3/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L'_2 = L_2 - 2L_1 \\ L'_3 = L_3 - 3L_1 \\ L'_4 = L_4 - 4L_1 \end{matrix} \rightsquigarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & -9 & 6 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} L'_3 = L_3 - \frac{5}{3}L_2 \\ L'_4 = L_4 - 3L_2 \end{matrix}$

$\rightsquigarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -14/3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} \; C_3 \longleftrightarrow C_4 \rightsquigarrow |A| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -14/3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} \; L'_4 = L_4 - L_3$

$C_3 \longleftrightarrow C_4$ ، هذه ترمز إلى قلب العمود الثالث مع العمود الرابع، وذلك لتجنب الكسور وكثرة الحساب، وكما هو معلوم قلب سطر مع سطر أو عمود مع عمود لا يغير قيمة المحدد وإنما يغير إشارة المحدد.

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -14/3 \\ 0 & 0 & 0 & -4/3 \end{vmatrix} = -\left(1 \times (-3) \times 1 \times \left(-\tfrac{4}{3}\right)\right) = -4.$$

4/ $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - L_1 \\ L'_4 = L_4 - L_1 \end{matrix} \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \; L_3 \leftrightarrow L_4$

نقوم بقلب السطر الثالث بالرابع $L_3 \leftrightarrow L_4$.

$$|A| = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \; C_2 \longleftrightarrow C_3 \rightsquigarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

قمنا بقلب العمود الثاني بالثالث $C_2 \longleftrightarrow C_3$ وقلب إشارة المحدد وبالتالي اختفت الإشارة $(-)$. إذن:

$$|A| = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = 2.$$

5/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

نلاحظ أن السطر الأول
~~نصف~~ والسطر الثالث بينهما
ارتباط خطي حيث أن السطر
الثالث ضعف السطر الأول وعليه فإن المحدد يساوي
الصفر. وهذا حسب خواص المحددات.

6/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 4 \times 4 \times 2 \times 2 = 64.$

7/ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

لأن العمود الثاني ضعف
العمود الأول.

8/ $|A| = \begin{vmatrix} x & -2y \\ -x & y \end{vmatrix} = xy - 2xy = xy.$

المحددتان الباقيتان نتركهما للطالب حيث يمكن حلهما
من خلال الملاحظة.

التمرين 8: حساب الجداءات:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{(4\times1)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}_{(1\cdot4)} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 18 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 16 & 36 & 16 \\ 5 & 20 & 45 & 20 \end{pmatrix}_{(4\times4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{(4\times2)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}_{(2\times3)} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 19 & 28 & 33 \\ 10 & 25 & 16 \\ 12 & 9 & 22 \end{pmatrix}_{(4\times3)}$$

التمـــرين 9 : حساب المحددات :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2173215 & 2177215 \\ 1385710 & 1389710 \end{vmatrix}$$

هذه المصفوفة من الشكل

حيث $x = 2173215 \quad y = 1385710$

وعليه :

$$A = \begin{vmatrix} x & x+4000 \\ y & y+4000 \end{vmatrix}$$

$$|A| = x(y+4000) - y(x+4000)$$
$$= \cancel{xy} + 4000x - \cancel{xy} - 4000y$$
$$= 4000(x-y) = 4000(2173215 - 1385710)$$
$$= 3150020000.$$

نفس الكلام بالنسبة للمصفوفة

$$\begin{vmatrix} 43251 & 43751 \\ 23264 & 23764 \end{vmatrix}$$

2/ $$A = \begin{vmatrix} a & ab & a & ac \\ a & b & a & ac \\ 1 & b & 1 & c \\ 1 & b & -1 & c \end{vmatrix} \; L_2' = L_2 - L_1 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} a & ab & a & ac \\ 0 & b(1-a) & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & c \\ 1 & b & -1 & c \end{vmatrix} \; L_4' = L_4 - L_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & ab & a & ac \\ 0 & b(1-a) & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = b(1-a) \cdot \begin{vmatrix} a & a & ac \\ 1 & 1 & c \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2b(1-a) \cdot \begin{vmatrix} a & ac \\ 1 & c \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0$$

3/ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \; C_2 \leftrightarrow C_4 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 = 12$$

حسب خاصية حساب المحدد بالاجزاء.

4/ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

العمود الأول والثاني بينهما ارتباط خطي.