

#### 4.1 INTRODUCTION : PRINCIPE DE LA METHODE DES FORCES

La résolution d'une structure hyperstatique par la méthode des forces consiste à la remplacer par une **structure isostatique équivalente** en pratiquant des coupures choisies judicieusement ; c'est-à-dire à chaque coupure:

- Faire introduire une force correspondante  $X_i$ .
- Ecrire une condition de compatibilité des déformations.

Si la structure hyperstatique est de degré  $k$ , alors on aura  $k$  coupures à effectuer,  $k$  forces à introduire ( $X_i$  inconnues) et  $k$  équations de compatibilité à écrire.

#### 4.2 LES STRUCTURES ISOSTATIQUES EQUIVALENTES

Soit une structure hyperstatique (S) de degré d'hyperstaticité  $k$ , soumise à un chargement initial  $X_0$  connu. On peut rendre (S) en une structure isostatique en pratiquant  $k$  coupures et de les remplacer par des forces inconnues  $X_i$  ( $i : 1 \dots k$ ). Cette structure est une structure isostatique équivalente à (S) qu'on note (S<sub>0</sub>), dite aussi structure isostatique associée à (S).

Pour une structure hyperstatique, il existe plusieurs structures isostatiques équivalentes.

##### Exemple 4.1

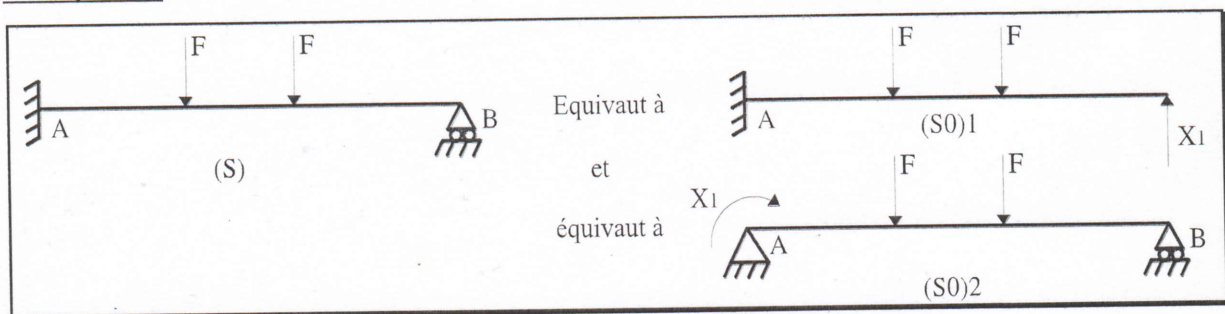


Figure 4-1 : Exemple 1 d'une structure isostatique équivalente

Le degré d'hyperstaticité de la structure (S) est  $k=1$

Dans la structure (S<sub>0</sub>)<sub>1</sub>, on a éliminé l'appui simple et on a introduit la réaction correspondante  $X_1$  ( $X_1=R_B$  réaction de l'appui B).

Dans la structure (S<sub>0</sub>)<sub>2</sub>, on a remplacé l'encastrement en articulation en introduisant le couple  $X_1$ .

#### Exemple 4.2

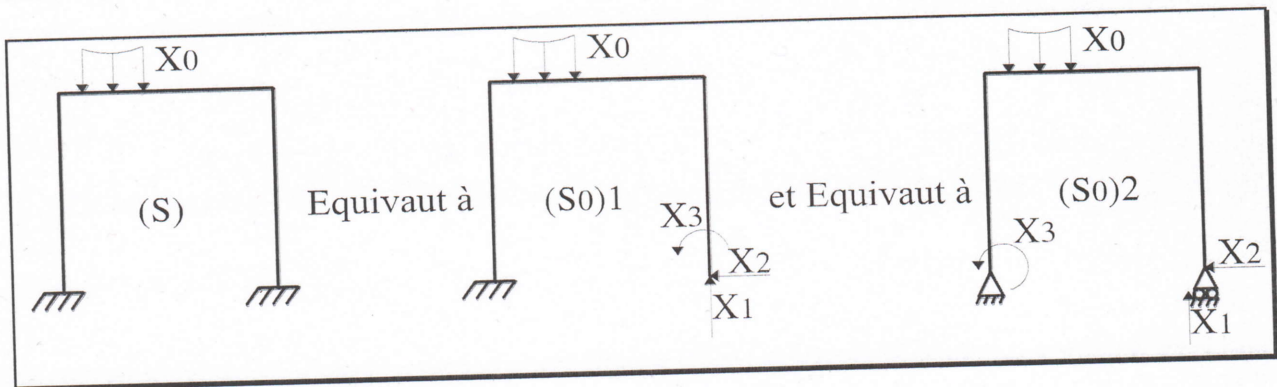


Figure 4-2 : Exemple 2 d'une structure isostatique équivalente

Le degré d'hyperstaticité de la structure (S) est  $k=3$

Dans la structure (S<sub>0</sub>)<sub>1</sub>, on a éliminé l'encastrement et on a introduit les réactions correspondantes  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .

Dans la structure (S<sub>0</sub>)<sub>2</sub>, on a remplacé le premier encastrement par une articulation et un moment  $X_3$  et le deuxième encastrement par un appui simple et deux réactions  $X_1$  et  $X_2$ .

**Remarque :** pour l'exemple 2, on n'a pas représenté toutes les structures isostatiques équivalentes.

#### 4.3 PRINCIPE DE SUPERPOSITION

En utilisant Le principe de superposition on peut mettre la structure isostatique équivalente soumise à un ensemble de chargement (chargement extérieur connu  $X_0$  et les chargements inconnus  $X_i$ ) sous forme de somme de plusieurs structures dont chacune est soumise à un seul chargement.

### Exemple 4.3

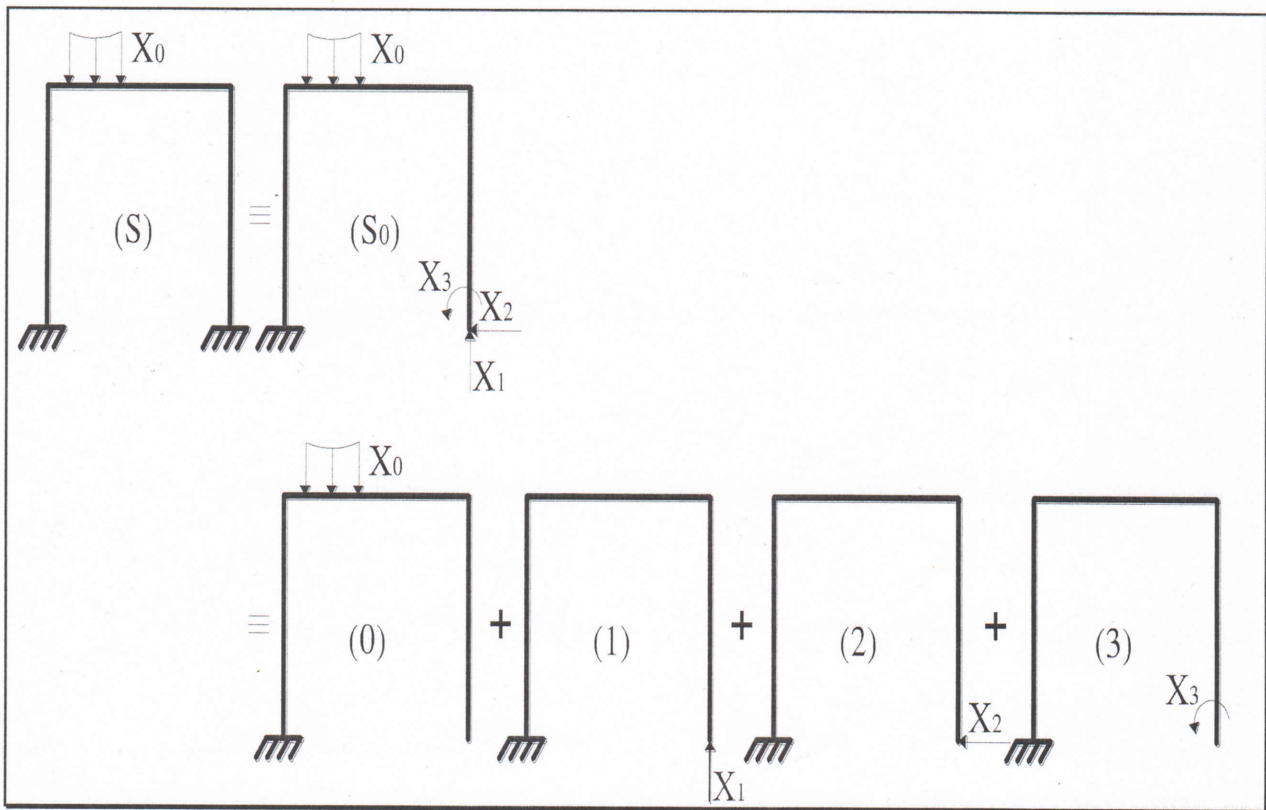


Figure 4-3 : Décomposition de la structure isostatique équivalente par le principe de superposition.

La structure hyperstatique initiale (S) est un portique bi-encasté soumis à un chargement initial  $X_0$  et de degré d'hyperstaticité  $k=3$ .

La structure isostatique équivalente (S<sub>0</sub>) est soumise aux chargements  $X_0$  et aux  $k$  chargements  $X_i$ .

D'après le principe de superposition on peut écrire : Le système (S<sub>0</sub>) est égal à la somme des systèmes (0, 1, 2 et 3).

#### 4.4 PRINCIPE DE PROPORTIONNALITE

Dans le domaine élastique linéaire, l'effet produit par une force  $X_i$  est égal à l'effet d'une force unitaire multiplié par  $X_i$ .

#### Exemple 4.4

Dans la figure 4-4, on a représenté l'effet d'une force  $X_i$  par  $X_i$  multiplié par l'effet d'une force unitaire  $X_i=1$ .



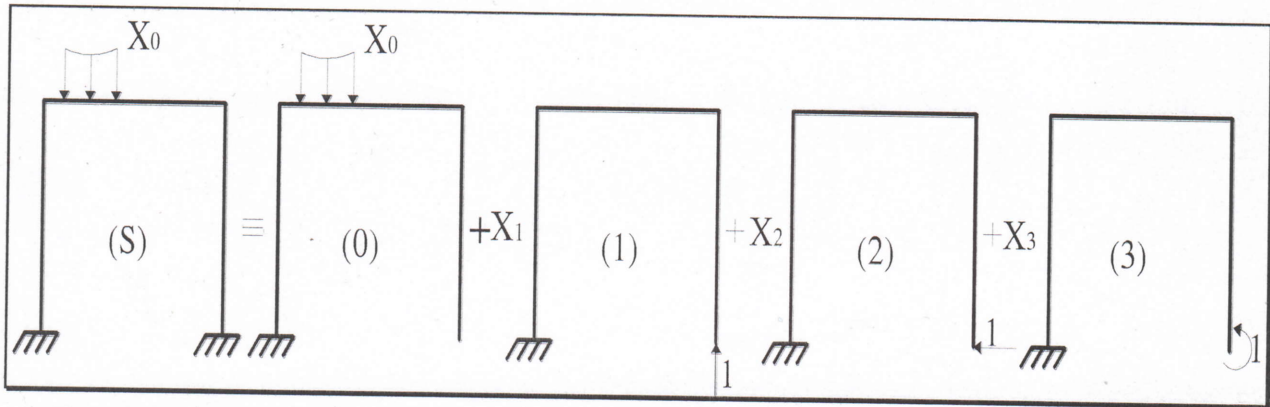


Figure 4-4 : Décomposition de la structure isostatique équivalente selon le principe de proportionnalité

Si on note :

- ✓  $M(x)$  : l'expression du moment fléchissant de (S) soumise à  $X_0$  ;
- ✓  $M_0(x)$  : l'expression du moment fléchissant de (S<sub>0</sub>) soumise à  $X_0$  ;
- ✓  $M_1(x)$  : l'expression du moment fléchissant de (S<sub>0</sub>) soumise à  $X_1=1$  ;
- ✓  $M_2(x)$  : l'expression du moment fléchissant de (S<sub>0</sub>) soumise à  $X_2=1$  ;
- ✓  $M_3(x)$  : l'expression du moment fléchissant de (S<sub>0</sub>) soumise à  $X_3=1$  .

On peut écrire :

$$M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) + X_2 M_2(x) + X_3 M_3(x)$$

De même pour l'effort tranchant et l'effort normal, on peut écrire :

$$V(x) = V_0(x) + X_1 V_1(x) + X_2 V_2(x) + X_3 V_3(x)$$

$$N(x) = N_0(x) + X_1 N_1(x) + X_2 N_2(x) + X_3 N_3(x)$$

#### 4.5 PRINCIPE DE COMPATIBILITE DES DEFORMATIONS

À fin que la compatibilité des déformations entre la structure (S) et la structure (S<sub>0</sub>) soit assurée, on doit écrire pour chaque coupure de (S) une équation de compatibilité.

Si on note :

$\delta_{i,j}$  : les déformations (déplacements ou rotations) du point de coupure de (S<sub>0</sub>), dans le sens de  $X_i$  causés par le chargement  $X_j$ .

$\delta_{i,0}$  : les déformations (déplacements ou rotations) du point de coupure de (S<sub>0</sub>), dans le sens de  $X_i$  causés par le chargement initial  $X_0$ .

Pour l'exemple de portique bi-encastré, au point D on a un encastrement donc les trois déformations en D sont nulles ( $u_D=0$ ,  $v_D=0$  et  $\theta_D=0$ ), or pour  $(S_0)$  choisie, on a libéré le point D. pour avoir une compatibilité des déformations :

**Déplacement du point de coupe dans le sens  $X_1$ :**

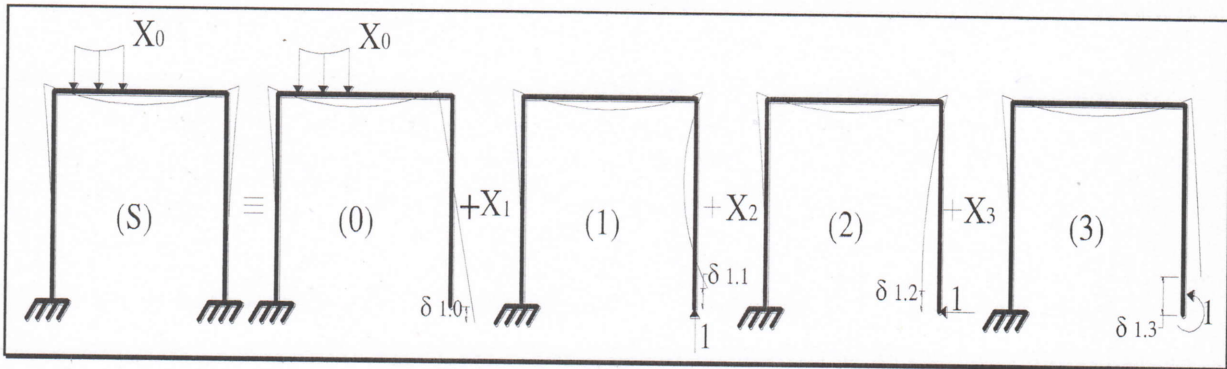


Figure 4-5 : déplacements sens  $X_1$

$$v_D = 0 = \delta_{1.0} + X_1\delta_{1.1} + X_2\delta_{1.2} + X_3\delta_{1.3} \quad \text{ou autrement} \quad \delta_{1.1}X_1 + \delta_{1.2}X_2 + \delta_{1.3}X_3 = -\delta_{1.0}$$

**Déplacement du point de coupe dans le sens  $X_2$ :**

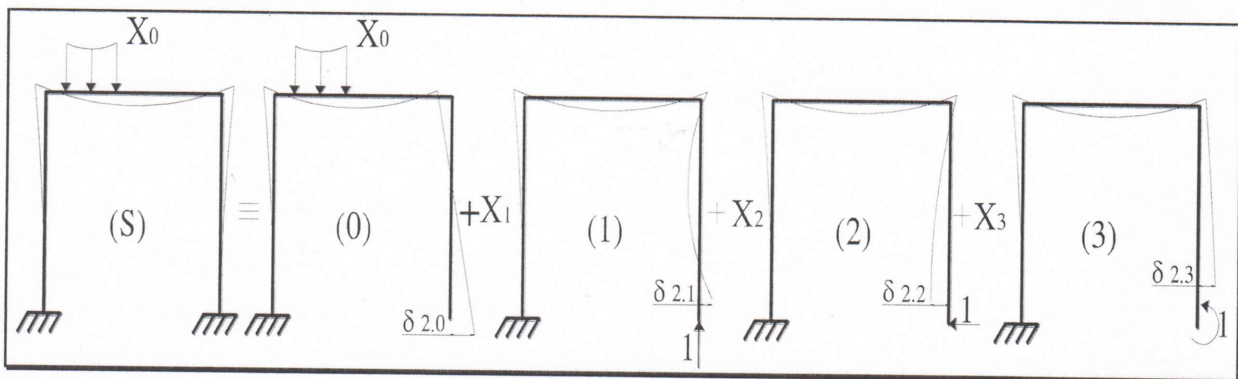


Figure 4-6 : déplacements sens  $X_2$

$$u_D = 0 = \delta_{2.0} + X_1\delta_{2.1} + X_2\delta_{2.2} + X_3\delta_{2.3} \quad \text{ou autrement} \quad \delta_{2.1}X_1 + \delta_{2.2}X_2 + \delta_{2.3}X_3 = -\delta_{2.0}$$

**Déplacement du point de coupe dans le sens  $X_3$ :**

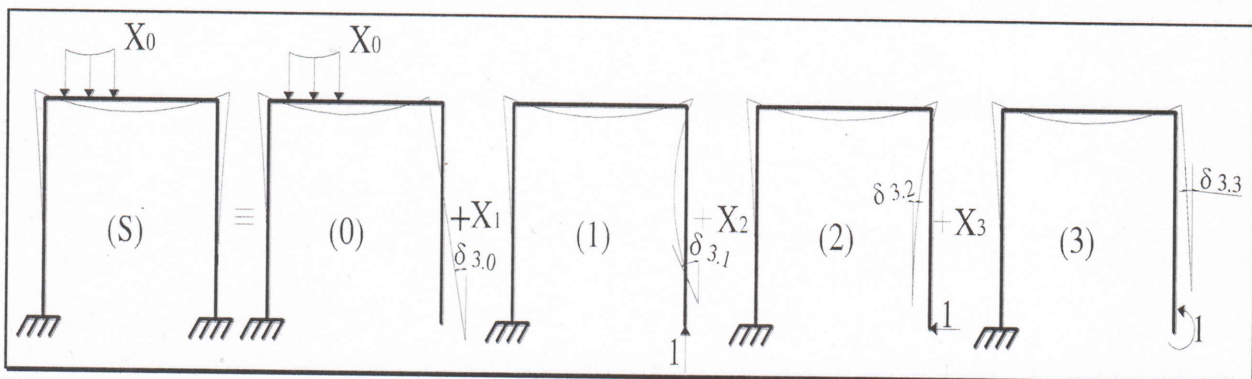


Figure 4-7 : déplacements sens  $X_3$

$$\theta_D = 0 = \delta_{3.0} + X_1\delta_{3.1} + X_2\delta_{3.2} + X_3\delta_{3.3} \quad \text{ou autrement} \quad \delta_{3.1}X_1 + \delta_{3.2}X_2 + \delta_{3.3}X_3 = -\delta_{3.0}$$

On obtient finalement le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 + \delta_{1,3}X_3 = -\delta_{1,0} \\ \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 + \delta_{2,3}X_3 = -\delta_{2,0} \\ \delta_{3,1}X_1 + \delta_{3,2}X_2 + \delta_{3,3}X_3 = -\delta_{3,0} \end{cases}$$

Ou matriciellement :

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{pmatrix}$$

En cas général, pour une structure de degré d'hyperstaticité  $k$ , on a :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k = -\delta_{10} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k = -\delta_{20} \\ \cdot \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ik}X_k = -\delta_{i0} \\ \cdot \\ \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kk}X_k = -\delta_{k0} \end{cases}$$

Ou matriciellement

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{ij} & \delta_{ik} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{kj} & \delta_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_i \\ X_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{i0} \\ \delta_{k0} \end{pmatrix}$$

Matrice de  
souplesse  
(Connue)

Vecteur forces  
(Inconnu)

Vecteur  
déformations  
(connu)

#### 4.6 DETERMINATION DES DEFORMATIONS $\delta_{ij}$

Pour la détermination des déformations  $\delta_{ij}$  et les  $\delta_{i,0}$  on peut appliquer l'une des méthodes étudiées au chapitre 2 (déformations des systèmes isostatiques).



#### 4.7 LES ETAPES DE LA METHODE DES FORCES

La résolution d'une structure hyperstatique (S) par la méthode des forces se fait comme suit :

1. déterminer le degré d'hyperstaticité  $k$  ;
2. associer à (S) une structure isostatique ( $S_0$ ) équivalente en supprimant  $k$  inconnues hyperstatiques  $X_i$ , les inconnues hyperstatiques peuvent être des réactions d'appuis ou des efforts intérieurs surabondants qu'on met en évidence en effectuant des coupures aux appuis ou dans les barres de la structure ;
3. appliquer à ( $S_0$ ) les charges réelles initialement données  $X_0$ . On note ce système état (0) ;
4. soumettre ( $S_0$ ) à l'action de charges ( $X_1=1, X_2=1, \dots, X_i=1 \dots X_k=1$ ) un par un, ces sont les  $k$  états (i) ;
5. déterminer pour chaque état (i) les efforts internes  $N_i(x)$  ;  $V_i(x)$  et  $M_i(x)$  ;
6. Calculer à chaque point de ( $S_0$ ) où agit une inconnue hyperstatique :
  - ✓ Les déformations  $\delta_{i,0}$  dues aux charges réelles données ;
  - ✓ Les déformations  $\delta_{ij}$  dues aux charges ou couples  $X_i=1$  ;
7. Déterminer les valeurs des  $X_i$  en résolvant le système suivant :

$$[\delta_{ij}] \times \{X_i\} = - \{\delta_{i0}\} \quad \text{tels que } (i=1 \text{ à } k \text{ et } j=0 \text{ à } k) ;$$

8. Ecrire les équations des efforts internes de système hyperstatique (S) comme suit :

$$M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) + \dots + X_k M_k(x)$$

$$V(x) = V_0(x) + X_1 V_1(x) + \dots + X_k V_k(x)$$

$$N(x) = N_0(x) + X_1 N_1(x) + \dots + X_k N_k(x)$$

#### 4.8 APPLICATIONS

##### EXERCICE 4.1

Soit la structure (S) de la figure 4-8, simplement appuyée en A et encastrée en B, d'inertie flexionnelle  $E.I$  constante et soumise à une charge uniformément répartie  $q$ .

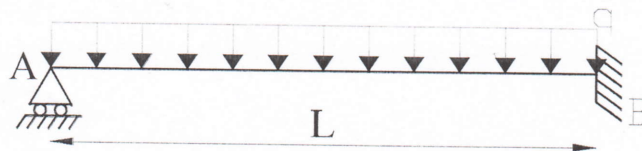


Figure 4-8 : schéma statique de structure (S) (exercice 4.1)

1. Calculer le degré d'hyperstaticité de S.
2. Représenter toutes les structures isostatiques équivalentes à S.
3. En appliquant la méthode des forces, déterminer la réaction en A. En déduire les réactions en B.
4. Déterminer les expressions des efforts internes le long de S puis représenter leurs diagrammes.

### REPOSE

1.  $k = (4 + 3 \times 0) - (3 + 0) = 1$

2. Les structures isostatiques équivalentes à (S) sont les structures (S<sub>0</sub>)1 et (S<sub>0</sub>)2 suivantes :

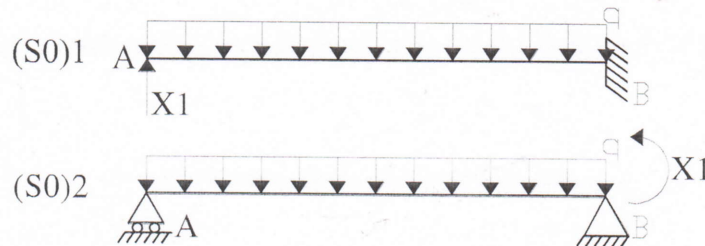


Figure 4-9 : structures isostatiques équivalentes à (S) (exercice 4.1)

$X_1$  étant l'inconnu hyperstatique.

3. Pour répondre à cette question, on va considérer la structure (S<sub>0</sub>)1. Pour cette structure  $X_1$  représente la réaction en A ( $X_1 = R_A$ ).

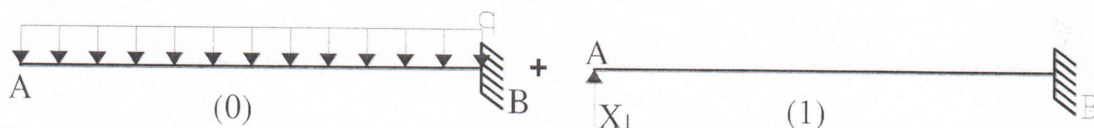


Figure 4-10 : principe de superposition (exercice 4.1)

D'après le principe de superposition, l'effet sur la structure (S) est la somme des effets sur les structures (0) et (1).

Si  $M(x)$  est le moment de (S),  $M_0(x)$  est le moment de (0) et  $M_1(x)$  est le moment de (1) soumise à  $X_1=1$  alors :  $M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x)$ .

Expression de  $M_1$   $M_1(x) = x$  (avec  $x \in [0, L]$ )



Expression de  $M_0$   $M_0(x) = -\frac{qx^2}{2}$  (avec  $x \in [0, L]$ )

Les équations de compatibilité s'écrivent :  $\delta_{11}.X_1 = -\delta_{10}$  ce qui donne  $X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}$

$$\delta_{1,1} = \int_0^L \frac{M_1(x).M_1(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI} \quad (\text{ici } N_0(x)=N_1(x)=0)$$

$$\delta_{1,0} = \int_0^L \frac{M_1(x).M_0(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{-qx^2}{2EI} .x dx = -\frac{qL^4}{8EI}$$

D'où,

$$X_1 = -\frac{-\frac{qL^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{3}{8}qL = R_A$$

En écrivant l'équilibre de la structure ( $S_0$ )1.

$$R_A + R_B - qL = 0 \Rightarrow R_B = qL - R_A = \frac{5}{8}qL$$

$$R_A L - M_B - q \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow M_B = R_A L - q \frac{L^2}{2} = -\frac{qL^2}{8} \quad (M_B \text{ est pris dans le sens}$$

trigonométrique)

4.  $M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{8}qLx$  (avec  $x \in [0, L]$ )

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -qx + \frac{3}{8}qL$$

$$N(x) = 0$$

Diagramme de M :

allure parabolique

$$M(0) = M_A = 0, \quad M(L) = M_B = -\frac{qL^2}{8}, \quad M(x)=0 \text{ implique } x=0 \text{ ou } x = \frac{3}{4}L,$$

$$M_{\max} = M(x = \frac{3}{4}L) = \frac{9}{128}qL^2$$

Expression de  $M_0$   $M_0(x) = -\frac{qx^2}{2}$  (avec  $x \in [0, L]$ )

Les équations de compatibilité s'écrivent :  $\delta_{11} \cdot X_1 = -\delta_{10}$  ce qui donne  $X_1 = -\frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}}$

$$\delta_{1,1} = \int_0^L \frac{M_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI} \quad (\text{ici } N_0(x) = N_1(x) = 0)$$

$$\delta_{1,0} = \int_0^L \frac{M_1(x) \cdot M_0(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{-qx^2}{2EI} \cdot x dx = -\frac{qL^4}{8EI}$$

D'où,

$$X_1 = -\frac{-\frac{qL^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{3}{8}qL = R_A$$

En écrivant l'équilibre de la structure ( $S_0$ )1.

$$R_A + R_B - qL = 0 \Rightarrow R_B = qL - R_A = \frac{5}{8}qL$$

$$R_A L - M_B - q \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow M_B = R_A L - q \frac{L^2}{2} = -\frac{qL^2}{8} \quad (M_B \text{ est pris dans le sens$$

trigonométrique)

4.  $M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{8}qLx$  (avec  $x \in [0, L]$ )

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -qx + \frac{3}{8}qL$$

$$N(x) = 0$$

Digramme de M :

allure parabolique

$$M(0) = M_A = 0, \quad M(L) = M_B = -\frac{qL^2}{8}, \quad M(x) = 0 \text{ implique } x=0 \text{ ou } x = \frac{3}{4}L,$$

$$M_{\max} = M(x = \frac{3}{8}L) = \frac{9}{128}qL^2$$

Diagramme de V :

allure linéaire

$$V(0) = \frac{3q}{8}L, \quad V(L) = -\frac{5q}{8}L, \quad V(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{8}L$$

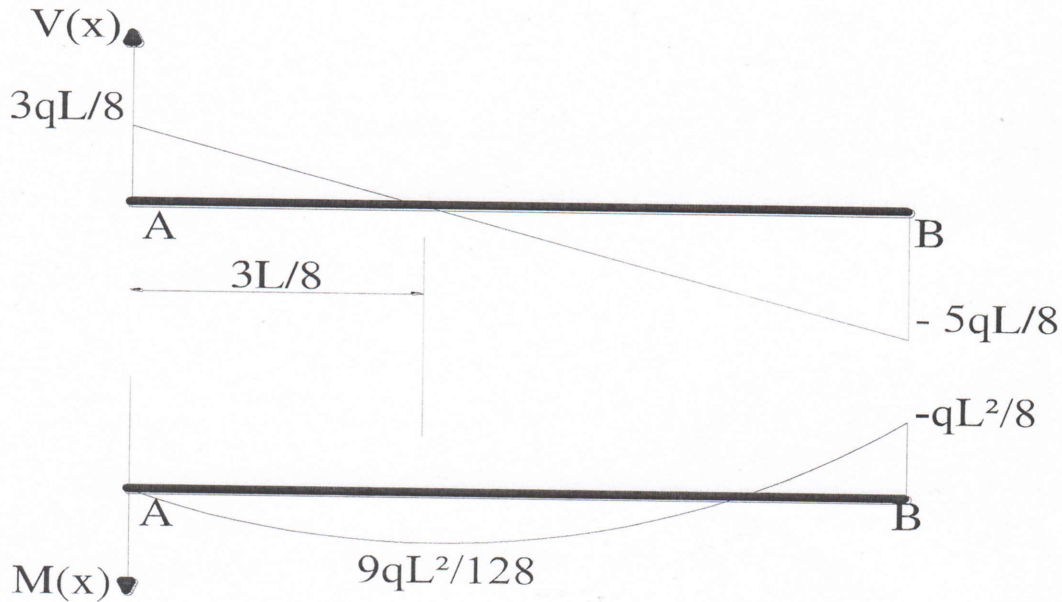


Figure 4-11 : diagrammes des efforts internes (exercice 4.1)

**EXERCICE 4.2**

On considère la structure (ABC) de la figure 4-12, composée de deux barres AB et BC, encastree en A et articulée en C, d'inertie flexionnelle E.I variable et soumise à une charge répartie q sur la demi-travée BC.

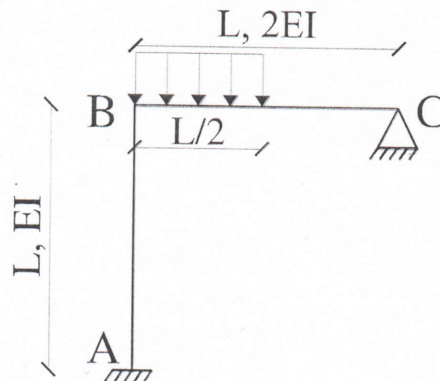


Figure 4-12 : schéma statique de la structure (ABC) (exercice 4.2)

1. Calculer le degré d'hyperstaticité de (ABC).
2. En appliquant la méthode des forces, déterminer les réactions en C. En déduire celles en A.