Université de Djelfa
faculté des sciences exacte et de l'infs
département des maths et infs
1 ére année **M I**
Matiére : analyse 2

Equation de Bernoulli

Considérons une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues de x (ou des constantes) et $n \neq 0$, $n \neq -1$ (sinon on aurait une équation linéaire).

Cette équation, qui est appelée équation de *Bernoulli*, se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante

Divisant par y^n, on obtient

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q$$

Faisons la substitution

Alors

$$z = y^{-n+1}$$

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

On obtient

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$$

C'est une équation linéaire

Exemple : Résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$$

Divisant tous les termes par y^{-3}, on obtient :

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3$$

on pose

$$z = y^{-2}$$

ona alors

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

On obtient

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^{-3}$$

C'est une équation linéaire

$$z = uv$$

$$\frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituons dans l'équation

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv = -2x^3$$

$$u(\frac{dv}{dx} - 2xv) + v\frac{du}{dx} = -2x^3$$

alors

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0$$

$$\frac{dv}{v} = 2xdx$$

alors

$$\begin{aligned} \log(v) &= x^2 \\ v &= e^{x^2} \end{aligned}$$

On obtient

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = -2x^3$$

$$du = -2x^{-3}e^{x^2}dx$$

$$u = -2\int x^{-3}e^{x^2}dx$$

en intégrant par parties

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$$

$$z = uv = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$$

On a donc l'intégrale générale de l'équation donnée

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$$

alors

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}$$

Equations aux différentielles totales

Définition :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

est appelée équation aux différentielles totales si $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont des fonctions continues dérivables telles que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad *$$

les dérivées partielles étant continues dans un certain domaine

Intégration des équations aux différentielles totales .

Montrons que si le premier membre de l'équation est une différentielle totale, la condition $(*)$ est observée, et inversement, si la condition $(*)$ est

observée, le premier membre de l'équation est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x,y)$, c.-à-d. que l'équation est de la forme

$$du(x,y) = 0$$

dont l'intégrale générale est $u(x,y) = C$.

Supposons

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

alors

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \;\; ; N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dérivant la première relation par rapport ày et la seconde par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

De la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

on déduit

$$u = \int M(x; y)dx + \varphi(y)$$

dérivons les deux membres de la dernière égalité par rapport à y et égalons le résultat à $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x; y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

Mais comme $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ on peut écrire

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x; y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

$$[N(x, y)]_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y)$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

et

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

ou

$$\varphi(y) = \int N(x_0, y)dy + C_1$$

la fonction $u(x, y)$ sera de la forme

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C$$

(x_0, y_0) représente ici un point au voisinage duquel existe la solution de l'équation différentielle

Egalant cette expression à une constante arbitraire C, on obtient l'intégrale générale de l'équation

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C$$

Exemple : Résoudre l'équation

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

alors

$$M = \frac{2x}{y^3}.N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4} \qquad ; \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

Désignons une différentielle totale.
Comme $\partial u = \frac{2x}{y^3}$ on a

$$u = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$

Dérivons cette relation par rapport à y et prenons en considération que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

On trouve

$$-\frac{3x^2}{y^4}dx + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

alors

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2} \to \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1$$

et

$$u(x;y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1$$

l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$$

Références :

- N.Piskounov,calcul differentile et integral