Exercices: Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Montrer d'après la definition que la fonction :

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle.

Solution. La fonction f est différentiable au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_1\partial_x f(x_0,y_0) - h_2\partial_y f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Dès que :

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = x_0^2 + h_1^2 + 2x_0h_1 + y_0^2 + h_2^2 + 2y_0h_2,$$
$$\nabla f(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0),$$

la limite se réduit à :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0.$$

Cela suffit pour prouver que f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = xe^{xy}.$$

Est-elle différentiable au point $(1,0)$? Si oui, linéariser f au voisinage de $(1,0)$ et approcher la valeur $f(1.1, -0.1)$.

Solution. La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^2$ car composition de fonctions dérivables. Les dérivées partielles :

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)) = (e^{xy} + xye^{xy}, x^2e^{xy})$$

sont elles-mêmes dérivables dans $\mathbb{R}^2$ car composition de fonctions dérivables. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donc elle est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. En particulier elle est différentiable au point $(1,0)$. Dès que la fonction est différentiable, elle admet une linéarisation au voisinage de $(1,0)$:

$$f(x,y) = f(1,0) + (x-1)\partial_x f(1,0) + y\partial_y f(1,0) + o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}),$$

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + y + o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}) = x + y + o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}).$$

Cette linéarisation est valide localement, au voisinage du point $(1,0)$, et pas dans tout $\mathbb{R}^2$! Pour approcher la valuer $f(1.1, -0.1)$ on calcule :

$$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 \approx 1$$

e on sait que l'erreur d'approximation est un petit o de $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. Plus x, y sont proches (en terms de distance !) du point $(1,0)$ plus l'approximation est précise. Calculer avec une calculatrice la valeur exacte de $f(1.1, -0.1)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^3 - y^3.$$

Dire si le graphe de f :

$$\mathcal{G}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z = f(x,y)\}$$

admet un plan tangent au point $(0,1,-1)$ et, le cas échant, donner l'équation du plan.

Solution. Dire que le graphe $\mathcal{G}_f$ admet un plan tangent au point $(0,1,-1)$ est équivalent à dire que f est différentiable au point $(0,1)$. Clairement la fonction f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et donc différentiable dans $\mathbb{R}^2$. L'èquation du plan tangent est :

$$t(x,y) = f(0,1) + \partial_x f(0,1)x + \partial_y f(0,1)(y-1) = -1 - 3(y-1) = 2 - 3y$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Est-elle continue dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle dérivable dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Solution.

- **Continuité**. La fonction est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour étudier la continuité au point $(0,0)$ on utilise les cordonnées polaires de centre $(0,0)$:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On veut montrer que :

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

et que cette limite ne dépend pas de l'angle θ. En pratique il faut trouver une fonction $g(r)$ de la seule variable r telle que

$$0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq |g(r)|$$

et $g(r) \to 0$ si $r \to 0$. Rappel : ne pas mettre la valuer absolue dans la majoration conduit à des résultats faux.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta r^3\sin^3\theta}{r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r^3\cos^2\theta\sin^3\theta$$

Dès que $|\cos^2\theta\sin^3\theta| \leq 1$ on a :

$$0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq |r^3|$$

et $r^3 \to 0$ si $r \to 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Cela prouve que la fonction est continue dans $\mathbb{R}^2$.

- **Dérivabilité**. On se demande si la fonction f est dérivable. Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Si $(x,y) = (0,0)$ on est obligé de passer par la définition de dérivée partielle.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Cela prouve que f est dérivable au point $(0,0)$ et $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

- **Classe C^1**. On se demande si les dérivées partielles de f :

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont fonctions continues dans $\mathbb{R}^2$. Elles sont continues dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour étudier la continuité au point $(0,0)$ on calcule les limites :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y)$$

à l'aide des cordonnées polaires de centre $(0,0)$.

$$\partial_x f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r\cos\theta r^5 \sin^5\theta}{r^4(cos^2\theta + \sin^2\theta)^2} = 2r^2\cos\theta\sin^5\theta.$$

Dès que $|\cos\theta\sin^5\theta| \leq 1$ on a :

$$0 \leq |\partial_x f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq 2|r^2|$$

et $2r^2 \to 0$ si $r \to 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(0,0).$$

Même chose pour $\partial_y f$:

$$\partial_y f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta(3r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}{r^4(cos^2\theta+\sin^2\theta)^2} = \cos^2\theta\sin^2\theta(3r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta)$$

Dès que $|\cos^2\theta\sin^2\theta| \leq 1$ et que $|a+b| \leq |a|+|b|$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq |\partial_y f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq 3|r^2\cos^2\theta| + |r^2\sin^2\theta| \leq 4|r^2|$$

et $4r^2 \to 0$ si $r \to 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0 = \partial_y f(0,0).$$

Cela prouve que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

- **Différentiabilité**. La fonction est de classe C^1 donc elle est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Est-elle continue dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle dérivable dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Solution.

- **Continuité**. La fonction est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour étudier la continuité au point $(0,0)$ on considère la restriction de f à la droite $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{1}{2x}$$

qui ne tend pas vers $0 = f(0,0)$ lorsque $x \to 0$. Donc la fonction n'est pas continue au point $(0,0)$.

- **Dérivabilité**. On se demande si la fonction admet toutes les dérivées partielles. Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Donc f est dérivable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Si $(x,y) = (0,0)$ on est obligé de passer par la définition de dérivée partielle.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \infty$$

La dérivée partielle par rapport à x existe dans $\mathbb{R}^2$ et la dérivée partielle par rapport à y existe dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc f est dérivable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- **Différentiabilité**. La fonction est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car les dérivées partielles sont quotient de fonctions continues. Donc elle est différentiable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle ne peut pas être différentiable au point $(0,0)$ car pas continue.

Exercice 6. Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) et à la profondeur x (mesuré en pieds) peut être modélisé par

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

ou $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et $\lambda > 0$ et $T_1 \neq 0$.

a) Calculer $\partial_x T$ et $\partial_t T$.

b) Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur $\partial_t T = k \partial_{xx} T$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

Solution. Dès que $\lambda, \omega, T_1, T_0$ sont constantes on a :

a)

$$\partial_x T = -\lambda T_1 e^{-\lambda x} \Big(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x) \Big)$$

$$\partial_t T = \omega T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$$

b)

$$\partial_{xx}T = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$$
$$\frac{\partial_{xx}T}{\partial_t T} = \frac{2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)}{\omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)} = \frac{2\lambda^2}{\omega}$$

Donc la fonction T vérifie l'equation de la chaleur avec $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = x^3 y + x^2 - y^2 - x^4 + z^5.$$

Après vérification de la validité du théorème de Schwarz, calculer la matrice hessienne de f.

Solution. La fonction admet 3 dérivées d'ordre 1 par rapport à ses 3 variables :

$$\nabla f(x, y, z) = (\partial_x f(x, y, z), \partial_y f(x, y, z), \partial_z f(x, y, z)) = (3x^2 y + 2x - 4x^3, x^3 - 2y, 5z^4)$$

La fonction admet $9 = 3^2$ dérivées d'ordre 2 :

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6xy + 2 - 12x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 20z^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$

Toutes les dérivées croisées sont égales. En fait le théorème de Schwarz dit que si f est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$ alors la dérivation à l'ordre 2 ne depend pas de l'ordre dans lequel elle se fait. Sous les hypothèses du théorème de Schwartz la matrice hessienne est symétrique car $H_{i,j} f = \partial_{x_i, x_j} f = \partial_{x_j, x_i} f = H_{j,i} f$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \qquad (0)$$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6xy + 2 - 12x^2 & 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 20z^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

Ecrire le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage du point $(0,0)$.

Solution. La fonction f est de classe C^2 au voisinage de $(0,0)$ et son développement de Taylor d'ordre 2 est donné par :

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)^T H_f(0,0)(x,y) + o(x^2+y^2)$$

Dès que :

$$\nabla f(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$$

et $\nabla f(0,0) = (0,0)$, la partie d'ordre 1 du développement est nulle.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

La partie d'ordre 2 est donnée par :

$$(x,y)^T H_f(0,0)(x,y) = (x,y)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x,y) = (x,y)^T (yx) = 2xy$$

Donc :

$$f(x,y) = xy + o(x^2+y^2).$$

Exercices: Applications différentiables et problèmes d'extremum

Différentielles, dérivées partielles

Rappelons le théorème de composition des applications différentiables. Soient E, F, G des espaces vectoriels normés et $f : U \to F$, $g : V \to G$ avec U ouvert de E et V ouvert de G contenant $f(U)$. Si f est différentiable en x et g différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et de plus

$$\partial(g \circ f)_{(x)} \quad = \quad \partial g_{(f(x))} \circ \partial f_{(x)}. \tag{1}$$

Rappelons que $\partial f_{(x)} : E \to F$, $\partial g_{(y)} : F \to G$ sont des applications linéaires continues ainsi que leur composée. L'identité (1) signifie que pour tout $h \in E$, on a

$$\partial(g \circ f)_{(x)} \cdot (h) \quad = \quad \partial g_{(x)} \cdot \big(\partial f_{(x)} \cdot (h)\big). \tag{2}$$

Enfin rappelons le lien entre dérivée et différentielle: soit $f : \mathbb{R} \supset]a,b[\to E$ une application et $t \in]a,b[$. Alors f est dérivable en t si et seulement si f est différentiable en t. Dans ce cas, $\partial f_{(t)} : \mathbb{R} \to E$ est une application linéaire (donc une homothétie) et on a

$$f'(t) \quad = \quad \partial f_{(t)} \cdot (1) \tag{3}$$

où $f'(t)$ est la dérivée de f en t.

Corrigé 1. On munit $E \times F$ de la norme $\|(a,b)\| = \|a\|_E + \|b\|_F$ (qui définit bien la structure d'espace vectoriel normé usuelle de $E \times F$).

a) On revient à la définition. Soit $(x,y) \in E \times F$ fixé; on veut montrer que B est différentiable en (x,y). Soit $(h,k) \in E \times F$, on a

$$B(x+h, y+k) = B(x,y) + (B(h,y) + B(x,k)) + B(h,k) \tag{4}$$

par bilinárité de B. Or l'application $(h,k) \mapsto (B(h,y) + B(x,k))$ est linéaire car B est linéaire en chaque variable (le vérifier soigneusement !). Montrons qu'elle est aussi continue. Comme B est continue, pour tout $(a,b) \in E \times F$, on a $B(a,b) \leqslant \|B\|\, \|a\|_E\, \|b\|_F$ où $\|B\|$ est la norme de l'application bilinéaire B. D'où

$$\begin{aligned}
\|(B(h,y) + B(x,k))\| \quad &\leqslant \quad \|B(h,y)\| + \|B(x,k))\| \\
&\leqslant \quad \|B\|(\|h\|_E \|y\|_F + \|x\|_E \|k\|_F) \\
&\leqslant \quad \|B\| \|(x,y)\|\, \|(h,k)\|.
\end{aligned}$$

Il suit que $(h,k) \mapsto (B(h,y) + B(x,k))$ est linéaire de norme inférieure ou égale à $\|B\|\|(x,y)\|$.

Montrons que $\partial B_{(x,y)} : E \times F \to G$ est l'application $(h,k) \mapsto (B(h,y) + B(x,k))$. Il suffit de montrer que $(h,k) \mapsto B(h,k)$ est de la forme

$$\|(h,k)\| \varepsilon((h,k)) \quad \text{avec} \quad \varepsilon((h,k)) \underset{(h,k)\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

c'est à dire que $B(h,k)/\|(h,k)\| \underset{(h,k)\to 0}{\longrightarrow} 0$. Mais

$$\frac{\|B(h,k)\|_G}{\|(h,k)\|} \leqslant \frac{\|B\|\|h\|_E\,\|k\|_F}{\|(h,k)\|} \leqslant \|B\|\,\frac{\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|} = \|B\|\,\|(h,k)\|$$

ce qui donne le résultat voulu.

Conclusion: B est différentiable en tout point $(x,y) \in E \times F$ et

$$\partial B_{(x,y)} : (h,k) \mapsto dB_{(x,y)} \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y).$$

b) Il faut vérifier que l'application $E \times F \to \mathcal{L}_c(E \times F, G)$ définie par $(x,y) \mapsto \partial B_{(x,y)}$ est continue. Comme cette application est linéaire (par bilinéarité de $B(-,-)$) il suffit de montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x,y) \in E \times F$, on a $\|\partial B_{(x,y)}\| \leq k\|(x,y)\|$. Or on a vu dans la question **a)** qu'on pouvait prendre $k = \|B\|$!

Corrigé 2 (*Rapels sur les dérivées partielles)***.** Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. On peut alors identifier $E \cong \mathbb{R}^n$ où e_1 est identifié au vecteur $(1,0,\ldots,0)$, ..., e_n est identifié au vecteur $(0,\ldots,0,1)$. On identifie donc le vecteur $x_1e_1+\cdots+x_ne_n \in E$ avec $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

a) Par définition, la dérivée partielle par rapport au vecteur e_i d'une fonction $f : E \cong \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $x \in E$ est

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad = \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n)\right)_{t=0}. \tag{5}$$

(si cette dérivée existe bien sur). Noter que l'on utilisera indifféremment les notations $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pour cette dérivée partielle. C'est en particulier une "vraie dérivée" au sens du lycée... Remarquer que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ s'obtient en considérant toutes les variables fixées sauf la variable x_i et en dérivant la fonction par rapport à cette dernière variable au point qui nous intéresse.

Rappelons aussi que si f est différentiable, alors, les dérivées partielles existent et vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad = \quad \partial f_{(x)} \cdot (e_i). \tag{6}$$

Calculons les dérivées partielles des fonctions

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4, \qquad g(x,y,z) = 4x^2yz.$$

Un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z^3$$

(on remarquera que l'on a utilisé la notation "évidente" (x,y,z) à la place de (x_1,x_2,x_3)). On a aussi:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 8xyz, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 4x^2z, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 4x^2y$$

Ces applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ puisque polynomiales en les coordonnées x, y, z.

b) Soit maintenant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable. On note $f_1, \ldots, f_m$ les fonctions composantes de f (en particulier $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). La jacobienne de l'application f au point x est, par définition, la matrice (si elle existe)

$$Jac(f)_{(x)} \quad = \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}} \tag{7}$$

(qui a donc m-lignes et n-colonnes). Lorsque f est différentiable en x, la matrice jacobienne de f en x existe et est la matrice de l'application linéaire $\partial f_{(x)}$ dans la base (canonique) $(e_1, \ldots, e_n)$. En particulier, en notant $(h_1, \ldots, h_n) = h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n)$ un vecteur $h \in E$ quelconque, on a

$$\partial f_{(x)} \cdot (h) := \partial f_{(x)} \cdot (h_1 e_1 + \cdots h_n e_n) \quad = \quad Jac(f)_{(x)} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \cdot h_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) \cdot h_j \end{pmatrix}. \tag{9}$$

En particulier si $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en x, on a

$$\partial \Phi_{(x)} \cdot (h) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x).h_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x).h_n \tag{10}$$

Enfin la formule de composition (1) se traduit au niveau des matrices Jacobiennes par la formule

$$Jac(g \circ f)_{(x)} \quad = \quad Jac(g)_{f(x)} \cdot Jac(f)_{(x)} \tag{11}$$

autrement dit, la matrice Jacobienne de la composée est le produit des matrices Jacobienne.

Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4, 4x^2yz)$, on obtient immédiatement le résultat en appliquant les calculs de **a)**.

c) Il suit des identités (2) et (3) que si g est dérivable en t et f diférentiable en $g(t)$, alors $f \circ g$ est dérivable en t et que l'on a

$$(f \circ g)'(t) \quad = \quad \partial f_{(g(t))} \cdot (g'(t)). \tag{12}$$

d) On note $\varphi(t, s) := f(x(t, s), y(t, s))$ et $\psi(t, s) := g(s^2 + t^3, x^2(t, s))$ et on applique la formule de composition (1) (ou (11)) et la formule (5)pour obtenir que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) := \frac{\partial f}{\partial x}((x(t, s), y(t, s))\frac{\partial x}{\partial t}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}((x(t, s), y(t, s))\frac{\partial y}{\partial t}(t, s)$$

$$\text{et } \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, s) := \frac{\partial f}{\partial x}((x(t, s), y(t, s))\frac{\partial x}{\partial s}(t, s) + \frac{\partial f}{\partial y}((x(t, s), y(t, s))\frac{\partial y}{\partial s}(t, s).$$

De même on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) := 3t^2 \frac{\partial g}{\partial x}(s^2 + t^3, x^2(t, s)) + 2x(t, s)\frac{\partial f}{\partial y}(s^2 + t^3, x^2(t, s))\frac{\partial x}{\partial t}(t, s)$$

$$\text{et } \frac{\partial \psi}{\partial s}(t, s) := 2s \frac{\partial g}{\partial x}(s^2 + t^3, x^2(t, s)) + 2x(t, s)\frac{\partial f}{\partial y}(s^2 + t^3, x^2(t, s))\frac{\partial x}{\partial s}(t, s).$$

Corrigé 3 (*Dérivée directionnelle)***.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $x \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La dérivée directionnelle de f en x suivant $\overrightarrow{u}$ est la dérivée (si elle existe) $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x) := h'(0)$ où h est définie par $h(t) = f(x+t\overrightarrow{u})$.

a) Supposons f différentiable en x. Par définition

$$\begin{aligned} h'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\overrightarrow{u})-f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\partial f_{(x)}(t\overrightarrow{u})+t\overrightarrow{u}\varepsilon(t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t(\partial f_{(x)}(\overrightarrow{u})+\overrightarrow{u}\varepsilon(t))}{t} \\ &= \partial f_{(x)}(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

On a utilisé la linéarité de $\partial f_{(x)}$ dans l'avant dernière ligne. Conclusion :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x) \quad = \quad \partial f_{(x)}(\overrightarrow{u}). \tag{13}$$

On remarquera que la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est en particulier la dérivée directionnelle de f en x suivant le vecteur e_i de la base canonique.

b) On écrit $\overrightarrow{u} = (v, w)$. Alors

$$f(0+t\overrightarrow{u}) = t\frac{vw^2}{v^2+w^2}$$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(0,0) = \dfrac{vw^2}{v^2+w^2}$ et en particulier existe. On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ (pour } \overrightarrow{u} = (1,0)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \text{ (pour } \overrightarrow{u} = (0,1)).$$

Mais si f était différentiable, alors l'identité (5) donne

$$\partial f_{(0,0)} \cdot (h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k = 0.$$

Mais alors d'après la formule (13) de la question **a)** on devrait avoir $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(0,0) = 0$ pour tout $\overrightarrow{u}$ ce qui contradictoire avec la formule obtenue ci-dessus. On en déduit que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

c) f_{pq} étant une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$. Donc le seul problème est en $(0,0)$. On écrit en coordonnés polaires $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ ($r > 0$ si (x,y) non nul). On a alors $f_{pq}(r,\theta) = r^{p+q-2}\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$. Donc $f_{pq}(r,\theta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $p+q-2 > 0$, c'est à dire $p+q \geq 3$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Comme dans la question **b)**, on montre que f_{pq} n'est pas différentiable en $(0,0)$ si $p+q = 3$.

Montrons que f_{pq} est différentiable en $(0,0)$ si $p+q \geqslant 4$. On a

$$|f_{pq}(x,y) - f_{pq}(0,0)| = \left|\frac{x^p y^q}{x^2+y^2}\right| \leqslant \|(x,y)\|_2^{p+q-2}$$

où$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ est la norme euclidienne. Comme $p+q-2 \geq 2$, $\dfrac{x^p y^q}{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2\,\varepsilon(x,y)$ avec $\varepsilon(x,y) \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent f est différentiable en $(0,0)$ et $\partial f_{(0,0)} = 0$.

d) On écrit $\overrightarrow{u} = (v, w)$. Alors

$$h(t) = f(0 + t\overrightarrow{u}) = t^2 \frac{w^3}{v}$$

donc $h'(0) = 0$. En particulier f a des dérivées directionnelles en $(0, 0)$ suivant tous vecteurs (et ces dérivées sont nulles). Montrons que f est non bornée au voisinage de $(0, 0)$. En effet, on a $f(x^4, x) = 1/x \underset{x \to 0}{+} \infty$. Or si $x \to 0$, alors $(x^4, x) \to (0, 0)$, d'où le résultat.

Quelques exemples classiques

Corrigé 4 (*Fonction déterminant*)**. a)** L'application $M \mapsto \det(M)$ est polynomiale en les coefficients m_{ij} de $M = (m_{ij})_{i,j=1...n}$. Elle est donc de classe C^1.

b) Rappelons que la matrice E_{ij} est la matrice nulle sauf pour le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1. Les matrices E_{ij} forment une base de $\mathrm{M}(n)$. En particulier $\mathrm{Id} + tE_{ij}$ est toujours triangulaire. On en déduit que $\det(\mathrm{Id} + tE_{ij}) = 1$ si $i \neq j$ et $\det(\mathrm{Id} + tE_{ij}) = 1 + t$ si $i = j$. Donc $\dfrac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(\mathrm{Id}) = 0$ si $i \neq j$ et $\dfrac{\partial \det}{\partial E_{ii}}(\mathrm{Id}) = 1$. Par la formule (5) on obtient, pour tout $H = (h_{ij}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\, E_{ij}$,

$$\partial \det{}_{(\mathrm{Id})}(H) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(\mathrm{Id})\, h_{ij} = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} = \mathrm{tr}(H).$$

c) On note $\varphi : \mathrm{M}(n) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(N) = \det(M^{-1}N)$. Par multiplicativité du déterminant, on a $\varphi(N) = \det(M^{-1}) \det(N)$. D'où, pour tout $N \in \mathrm{M}(n)$, on a

$$\partial\varphi_{(N)} \cdot (H) = \det(M^{-1})\, \partial \det{}_{(N)} \cdot (H).$$

Mais on a aussi que φ est la composée $\det \circ \psi$ où $\psi : \mathrm{M}(n) \to \mathrm{M}(n)$ est définie par $\psi(N) = M^{-1}N$. On remarque que ψ est linéaire. En appliquant le théorème de composition (formule (1)), on obtient pour tout $H \in \mathrm{M}(n)$

$$\partial\varphi_{(N)} \cdot (H) = \partial \det{}_{(M^{-1}N)}\big(\partial\psi_{(N)} \cdot (H)\big) = \partial \det{}_{(M^{-1}N)}\big(\psi \cdot (H)\big)$$

car ψ est linéaire, donc pour tout N, $\partial\psi_N \cdot (H) = \psi(H)$. En appliquant les deux formules précédentes pour $N = M$, on obtient

$$\det(M^{-1})\, \partial \det{}_{(M)} \cdot (H) = \partial \det{}_{(\mathrm{Id})}\big(M^{-1}H)\big)$$

d'où $\partial \det{}_{(M)}(H) = \det(M)\, \mathrm{tr}(M^{-1}H)$.

d) Remarquons que, lorsque M est inversible, $\mathrm{tr}({}^t\widehat{M}H) = \det(M)\, \mathrm{tr}(M^{-1}H)$. Pour tout M fixé, l'application $H \mapsto \mathrm{tr}({}^t\widehat{M}H)$ est linéaire (continue puisque on ets en dimension finie). De plus l'application $M \mapsto \big(H \mapsto \mathrm{tr}({}^t\widehat{M}H)\big)$ est continue et coincide avec $\partial \det{}_{(M)}$ sur $Gl(n)$. Comme $Gl(n)$ est dense dans $\mathrm{M}(n)$, on en déduit que

$$\partial \det{}_{(M)} \cdot (H) = \mathrm{tr}({}^t\widehat{M}H)$$

pour toute matrice $M \in \mathrm{M}(n)$.

Corrigé 5. On considère $\varphi : \mathrm{M}(n) \to \mathrm{M}(n)$ définie par $M \mapsto {}^tM.M$.

a) φ est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale en les coefficients de M. On calcule

$$\varphi(M+H) - \varphi(M) = {}^tM.H + {}^tH.M + {}^tH.H = {}^tM.H + {}^tH.M + \|H\|\frac{{}^tH.H}{\|H\|}.$$

L'application $H \mapsto {}^tM.H + {}^tH.M$ est clairement linéaire (donc continue en dimension finie). Il reste à montrer que $\dfrac{{}^tH.H}{\|H\|} \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour conclure que $\partial\varphi_{(M)} \cdot (H) = {}^tM.H + {}^tH.M$. Or on a

$$\left\|\frac{{}^tH.H}{\|H\|}\right\| \leqslant \frac{\|{}^tH\|.\|H\|}{\|H\|} = \|{}^tH\| \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

b) Si $M \in O(n) = \{M \in \mathrm{M}(n) / {}^tM.M = I_j\}$, en particulier M et ${}^tM$ sont inversibles et donc $H \mapsto {}^tM.H$ est inversible (d'inverse $H \mapsto M.H$). Pour calculer le rang de $\partial\varphi_{(M)}$, il suffit de calculer le rang de $\ker(\partial\varphi_{(M)})$. Or

$$\begin{aligned}\ker(\partial\varphi_{(M)}) &= \{H \in \mathrm{M}(n)\,/\,{}^tM.H + {}^tH.M = 0\}\\ &= \{H \in \mathrm{M}(n)\,/\,{}^tM.H = -{}^t({}^tM.H)\}\\ &= \{H \in \mathrm{M}(n)\,/\,{}^tM.H \text{ est antisymétrique}\}.\end{aligned}$$

Comme $H \mapsto {}^tM.H$ est un isomorphisme, $\ker(\partial\varphi_{(M)})$ est isomorphe à l'espace vectoriel des matrices antisymétriques, qui est de dimension $n(n-1)/2$. Par conséquent rang de $\partial\varphi_{(M)}$ vaut $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Corrigé 6. On applique l'exercice 1 et la formule de composition (1) en écrivant Π comme la composée $\Omega \xrightarrow{(f,g)} E \times F \xrightarrow{B} G$ (cela asure l'existence de la différentielle). On trouve alors, pour tout $h \in E$ et $x \in \Omega$,

$$\partial\Pi_{(x)} \cdot (h) = B(\partial f_{(x)} \cdot (h), g(x)) + B(f(x), \partial g_{(x)} \cdot (h)).$$

Corrigé 7 (*Différentiabilité des normes)***.** Soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathbb{R}^n$.

a) Il suffit de montrer que l'application

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

n'admet pas de dérivées directionnelles en 0. Or $\|t\overrightarrow{u}\| = |t|\,\|\overrightarrow{u}\|$. D'où

$$\frac{\|t\overrightarrow{u}\| - 0}{t} \underset{t\to 0^+}{\to} \|\overrightarrow{u}\| \quad \text{et} \quad \frac{\|t\overrightarrow{u}\| - 0}{t} \underset{t\to 0^-}{\to} -\|\overrightarrow{u}\| \neq \|\overrightarrow{u}\|$$

si $\overrightarrow{u} \neq 0$. Donc $\|\;\|$ n'a pas de dérivées directionnelles en 0; en particulier la norme n'est pas diférentiable en 0.

Supposons $x \neq 0$ et $\|\;\|$ différentiable en x. Alors pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\|tx + h\| = t\|x + h/t\| &= t\|x\| + t\partial\|\;\|_{(x)}(h/t) + th/t\varepsilon(h)\\ &= t\|x\| + \partial\|\;\|_{(x)}(h) + h\varepsilon(h)\end{aligned}$$

par linéarité de $\partial\|\;\|_{(x)}$. D'où, $\|\;\|$ est différentiable en tx (et sa différentielle coincide en ce point avec celle en x).

b) Remarquons que $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est différentiable sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\|\cdot\|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$.

On a $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. Montrons que $\|\cdot\|_1$ n'est pas différentiable en $(0,y)$ et $(x,0)$. En effet, si $\|\cdot\|_1$ était différentiable en $(x,0)$, alors la dérivée partielle $\dfrac{\partial \|\cdot\|_1}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\|(x,t)\|_1 - \|(x,0)\|_1}{t}$ serait bien définie. Mais

$$\frac{\|(x,t)\|_1 - \|(x,0)\|_1}{t} = \frac{|t|}{t} = 1 \text{ si } t>0 \text{ et } -1 \text{ si } t<0.$$

D'où $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\|(x,t)\|_1 - \|(x,0)\|_1}{t}$ n'existe pas et $\|\cdot\|_1$ n'est pas différentiable en $(x,0)$. Un argument similaire assure que $\|\cdot\|_1$ n'est pas différentiable en $(0,y)$.

Montrons que $\|\cdot\|_1$ est différentiable partout ailleurs. Remarquons que $\mathbb{R}^2 - (\{(0,x)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0)/x\in\mathbb{R}\})$ est une réunion de 4 ouverts disjoints. En particulier si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - (\{(0,x)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0)/x\in\mathbb{R}\})$ alors il existe un voisinage ouvert U de (x,y) tel que pour tout $(h,k)\in U$, on a

$$\|(h,k)\| = h+k \text{ si } x>0,\ y>0, \qquad \|(h,k)\| = h-k \text{ si } x>0,\ y<0,$$

$$\|(h,k)\| = -h+k \text{ si } x<0,\ y>0, \qquad \|(h,k)\| = -h-k \text{ si } x<0,\ y<0.$$

Or les différentes expressions sont toutes polynomiales donc différentiables (et même $\mathcal{C}^\infty$). On en conclut que $\|\cdot\|_1$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - (\{(0,x)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0)/x\in\mathbb{R}\})$.

On a $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$. Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable sur les diagonales $x=y$ et $x=-y$ dans $\mathbb{R}^2$. On sait par le **a)** que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable en $(0,0)$. On raisonne comme pour $\|\cdot\|_1$ pour les autres points (x,x) et $(x,-x)$ $(x\neq 0)$ des diagonales. En effet, si $\|\cdot\|_\infty$ était différentiable en (x,x), alors la dérivée partielle $\dfrac{\partial\|\cdot\|_\infty}{\partial y}(x,x) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|(x,x+t)\|_\infty - \|(x,x)\|_\infty}{t}$ serait bien définie. Mais, pour $|t|\leq |x|$, on a $\dfrac{\|(x,x+t)\|_\infty - \|(x,x)\|_\infty}{t} = \dfrac{|t|}{t} = 1$ si t et x sont de même signe et vaut 0 sinon. D'où $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|(x,t)\|_1 - \|(x,0)\|_1}{t}$ n'existe pas (puisque les limites pour $t\to 0^+$ et $t\to 0^-$ différent). Par conséquent $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable en (x,x). Un argument similaire assure que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas différentiable en $(x,-x)$.

Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable partout ailleurs. Remarquons que $\mathbb{R}^2 - (\{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\})$ est aussi une réunion de 4 ouverts disjoints. En particulier si $(x,y)\in\mathbb{R}^2 - (\{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\})$ alors il existe un voisinage ouvert U de (x,y) tel que pour tout $(h,k)\in U$, on a

$$\|(h,k)\|_\infty = h \text{ si } x>|y|, \qquad \|(h,k)\|_\infty = k \text{ si } y>|x|,$$

$$\|(h,k)\|_\infty = -h \text{ si } -x>|y|, \qquad \|(h,k)\|_\infty = -k \text{ si } -y>|x|.$$

Or les différentes expressions sont toutes polynomiales donc différentiables (et même $\mathcal{C}^\infty$). On en conclut que $\|\cdot\|_\infty$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2 - (\{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,-x)/x\in\mathbb{R}\})$.

Corrigé 8 (*Relation d'Euler*)**.** Soit $0 \neq x \in \mathbb{R}^p$ fixé. On considère la fonction réelle $t \mapsto f(tx)$. On dérive la relation $f(tx) = t^n f(x)$ par rapport à t, en utilisant le Théorème de composition des dérivées pour la fonction de droite (voir les formules (1) et (12)), et on obtient, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\partial f_{(tx)} \cdot (x) = nt^{n-1} f(x)$$

ce qui pour $t = 1$ donne $\partial f_{(x)} \cdot (x) = nf(x)$. On fixe désormais $t > 0$ et on prend la différentielle par rapport à x dans la relation $f(tx) = t^n f(x)$. On obtient, pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$,

$$\partial f_{(tx)} \cdot (th) = t^n \partial f_{(x)} \cdot (h) \Longleftrightarrow t\partial f_{(tx)} \cdot (h) = t^n \partial f_{(x)} \cdot (h)$$

par linárité de $\partial f_{(tx)}$. En divisant par $t > 0$, on obtient le résultat cherché.

Corrigé 9 (*Dimension infinie, exemples simples*)**.**

a) Le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle : H \times H \to H$ est bilinéaire continu. De plus l'application $x \mapsto (x, x)$ est différentiable (car chacune de ses fonctions coordonnées l'est). D'après l'exercice 6 (avec $f = g = \mathrm{Id}$) on sait que $x \mapsto \langle x, x\rangle$ est différentiable. De plus $\langle x, x\rangle \in]0, +\infty[$ si $x \neq 0$. On en conclut que $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est différentiable sur $H - \{0\}$. On sait déjà, reprendre l'argument de l'exercice 7, que $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.

b) On note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ la norme de la convergence uniforme et $\theta(f) := \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\, dt$. On a alors

$$\theta(f + h) - \theta(f) = 2 \int_0^1 f(t)h(t)\, dt + \int_0^1 (h(t)^2\, dt.$$

L'application $h \mapsto 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)h(t)\, dt$ est linéaire puisque l'intégration est linéaire. Montrons que cette application est continue. On a

$$|2 \int_0^1 f(t)h(t)\, dt| \leqslant 2 \int_0^1 |f(t)|\, |h(t)|\, dt \leqslant \|h\|_\infty 2 \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

Il suit que $h \mapsto 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)h(t)\, dt$ est linéaire continue de norme majorée par $2 \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, dt$. Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^1 (h(t)^2\, dt = \|h\|_\infty \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$ pour conclure que θ est différentiable et $\partial\theta_{(f)} \cdot (h) = 2 \displaystyle\int_0^1 f(t)h(t)\, dt$.

c) *(Opérateur de composition)*

i) Soit $f \in X$ (fixée) et $\varepsilon > 0$, on doit montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour toute fonction $g \in X$ avec $\|f - g\|_\infty < \delta$, on a $\|\mathrm{Comp}(f) - \mathrm{Comp}(g)\|_\infty = \|\varphi \circ f - \varphi \circ g\|_\infty < \varepsilon$. Comme $[0, 1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est séparé $f([0, 1])$ est un compact de $\mathbb{R}$. Donc inclus dans un intervalle fermé $[-M, M]$. De plus si $\|f - g\|_\infty < 1$, alors $g([0, 1]) \subset [-M - 1, M + 1]$. Comme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, elle est *uniformément* continue sur le compact $[-M - 1, M + 1]$. D'où il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-M - 1, M + 1]$ avec $|x - y| < \eta$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. On applique alors ce résultat à $x = f(t)$, $y = g(t)$; ce qui donne, pour tout

$g \in X$ tel que$\|f - g\|_\infty < \delta$, on a $|\varphi(f(t)) - \varphi(g(t))| < \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$. Il suit que

$$\|f - g\|_\infty < \delta \Longrightarrow \|\mathrm{Comp}(f) - \mathrm{Comp}(g)\|_\infty < \varepsilon.$$

Noter que l'astuce ramenant à considérer un intervalle où φ est uniformément continue est nécéssaire pour trouver un $\delta > 0$ qui marche pour toute valeur de $t \in [0,1]$ et permet de passer à la norme $\| \, , \|_\infty$. Sans cela on ne pourrait trouver qu'un δ_t pour tout t et il faudrait utiliser un argument de compacité (plus ou moins équivalent à la continuité uniforme) pour conclure.

ii) On utilise la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0:

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) &= \varphi(x) + \int_0^1 h\varphi'(x+th)\,dt \\ &= \varphi(x) + h\varphi'(x) + \big(-\varphi'(x) + \int_0^1 \varphi'(x+th)\,dt\big)\end{aligned}$$

et on pose $\Psi(x,h) = -\varphi'(x) + \displaystyle\int_0^1 \varphi'(x+th)\,dt$. Il suffit alors de montrer que $\Psi(x,h)$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ pour conclure. Ce résultat découle immédiatement de la continuite de φ' et du fait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x,y,t)\,dt$ d'une fonction $g : \mathbb{R}^2 \times [a,b] \to \mathbb{R}$ continue en chaque variable est continue en les variables (x,y) (cf le cours de L2).

iii) On revient à la définition de la différentiabilité: pour toute fonction $h \in X$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Comp}(f+h)(t) - \mathrm{Comp}(f)(t) &= \varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)) \\ &= h(t)\,h(t)\varphi'(f(t)) + h(t)\Psi(f(t),h(t))\end{aligned}$$

d'après la question **ii)**.

Lorsque h converge uniforméemnt vers 0, alors par continuité de $\Psi(x,h)$ en h, on a que la fonction $t \mapsto \Psi(f(t),h(t))$ converge uniformément vers la fonction $\Psi(f(t),0)$ qui est nulle vu la question **ii)**. Il suit que $h\Psi(f,h)$ est de la forme $\|h\|_\infty\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Montrons que l'application $L : X \to X$ définie par $h \mapsto L(h) = h.\varphi'(f)$ est linéaire et continue. La linárité est évidente. Pour la continuité on a, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|h(t)\varphi'(f(t))| \leqslant \|\varphi'(f)\_\infty \|h\|_\infty$$

($\varphi'(f) \in X$ puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$) d'où L est continue et $\|L\| \leqslant \|\varphi'(f)\_\infty$.

On déduit finalement des considérations précédentes que $\mathrm{Comp} : X \to X$ est différentiable en tout $f \in X$ et que

$$\partial \mathrm{Comp}_{(f)} \cdot (h) = \varphi'(f).h$$

Problèmes d'extremum

Rappelons que la Hessienne d'une application deux fois différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est la matrice

$$Hess(f)_{(x)} = \left(\frac{\partial^{(2)} f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1\ldots n}.$$

C'est la matrice de la forme bilinéaire symétrique qui correspond à la différentielle seconde $\partial^{(2)} f_{(x)} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (on a identifié $\partial^{(2)} f_{(x)} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec une forme bilinéaire symétrique, par le lemme de Schwarz, sur $\mathbb{R}^n$).

Supposons que $\partial f_{(x)} = 0$ pour $x \in U$ avec U **ouvert**. Lorsque la différentielle seconde $\partial^{(2)} f_{(x)}$ est **non-dégénérée** (ce qui est équivalent à $\det(Hess(f)(x)) \neq 0$), on a que x est un maximum local si $\partial^{(2)} f_{(x)}$ est définie négative, un minimum local si $\partial^{(2)} f_{(x)}$ est définie positive, n'est pas un extremum local si $\partial^{(2)} f_{(x)}$ n'est ni positive, ni négative.

Pour vérifier si $\partial^{(2)} f_{(x)}$ est définie positive, on peut utiliser les critères suivants (qui sont équivalents):

i) pour tout $h \neq 0$, $\partial^{(2)} f_{(x)}(h, h) > 0$;

ii) Les valeurs propres de $\partial^{(2)} f_{(x)}(h, h)$ (c'est à dire de $Hess(f)(x)$) sont toutes strictement positives (comme la matrice est symétrique, on sait qu'elle est nécéssairement diagonalisable),

iii) tous les mineurs principaux $\Delta_k(x)$ ($k = 1 \dots n$) de $Hess(f)(x)$ sont strictements positifs. Rappelons que $\Delta_k(x) = \det \left(\frac{\partial^{(2)} f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1\dots k}$ est le déterminant de la matrice obtenue en ne conservant dans la Hessienne que les k-premières lignes et colonnes.

iv) dans le cas où $n = 2$ (et seulement dans ce cas), les conditions précédentes sont équivalentes à $\det(Hess(f)(x)) > 0$ et $Trace(Hess(f)(x)) > 0$.

Enfin une matrice est définie négative si et seulement si son inverse est définie positive. Ce qui est équivalent ǹ'importe laquelle des conditions suivantes:

i) pour tout $h \neq 0$, $\partial^{(2)} f_{(x)}(h, h) < 0$;

ii) Les valeurs propres de $\partial^{(2)} f_{(x)}(h, h)$ (c'est à dire de $Hess(f)(x)$) sont toutes strictement négatives (comme la matrice est symétrique, on sait qu'elle est nécéssairement diagonalisable),

iii) tous les mineurs principaux $\Delta_k(x)$ ($k = 1 \dots n$) de $Hess(f)(x)$ avec k pair sont strictements positifs et ceux pour k impair sont strictements négatifs.

iv) dans le cas où $n = 2$ (et seulement dans ce cas), les conditions précédentes sont équivalentes à $\det(Hess(f)(x)) > 0$ et $Trace(Hess(f)(x)) < 0$.

Il faut faire attention que si $\partial^{(2)} f_{(x)}$ est dégénérée, ou si U n'est pas ouvert, les critères précédents ne marchent plus !

Corrigé 10. Remarquons que X est fermé car X est l'intersection des fermés $\phi_1^{-1}(\{0\})$ et $\phi_2^{-1}(\{0\})$ où ϕ_1, ϕ_2 sont les fonctions continues $\phi_1(x, y, z) = x+y+z-1$ et $\phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. X est même compact, puisque borné (il est inclus dans la sphère unité de $\mathbb{R}^2$) dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^3+y^3+z^3$ et X l'intersection du plan $\{(x, y, z)/x+y+z = 1\}$ et de la sphère $\{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. En particulier la fonction continue $f_{|X}$ admet un maximum et un minimum sur X.

a) Puisque X n'est pas ouvert, il nous faut utiliser le Théorème des multiplicateurs de Lagrange (dit aussi des Extrema liés). On commence par en vérifier les hypothèses. On a $X = \phi_1^{-1}(\{0\}) \cap \phi_2^{-1}(\{0\})$ avec ϕ_1, ϕ_2 de classe $\mathcal{C}^1$ (elles sont polynomiales en leurs coordonnées). On note $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ qui est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Il faut encore vérifier que

- pour tout $x \in X$, l'application linéaire (continue) $\partial\phi_{(x)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est surjective (autrement dit, $\partial\phi_{1(x)}$ et $\partial\phi_{2(x)}$ sont linéairement indépendantes);
- f est différentiable en tout point de X.

Le deuxième point est évident puisque f est polynomiale en ses coordonnées. Pour le premier point, on calcule la matrice jacobienne de ϕ:

$$Jac(\phi)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

Ses vecteurs lignes sont indépendants sauf si $x = y = z$. Vérifions qu'il n'y aucun point de X de cette forme. En effet $\phi_1(x, x, x) = 0$ implique $x = 1/3$. Mais $\phi_2(1/3, 1/3, 1/3) = 3/9 - 1 = -2/3 \neq 0$.

On a vérifié les hypothèses du Théorème des multiplicateurs de Lagrange. En conséquence, si (x, y, z) est un extremum de $f_{|X}$, alors $\partial f_{(x)}$ est combinaison linéaire de $\partial\phi_{1(x)}$ et $\partial\phi_{2(x)}$. Comme $\partial\phi_{1(x)}$ et $\partial\phi_{2(x)}$ sont linéairement indépendantes ,$\partial f_{(x)}$ est combinaison linéaire de $\partial\phi_{1(x)}$ et $\partial\phi_{2(x)}$ est équivalent au fait que la matrice

$$M_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

est non inversible, c'est à dire de déterminant nul. Or

$$\det M_{(x,y,z)} = 6\det(VdM(x, y, z)) \text{ où } VdM(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de van Der Monde de x, y, z. Il est connu que

$$\det(VdM(x, y, z)) = (y - x)(z - x)(z - y).$$

Donc $\det M_{(x,y,z)} = 0$ si et seulement si $x = y$ ou $x = z$ ou $y = z$. Si $x = y$, on déduit de $\phi_1(x, y, z) = 0$ et $\phi_2(x, y, z) = 0$ que $(x, y, z) = (2/3, 2/3, -1/3)$ ou $(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Comme f, ϕ_1, ϕ_2 sont symétriques en (x, y, z), on obtient facilement que les autres extremums possibles sont $(2/3, -1/3, 2/3)$, $(0, 1, 0)$, $(-1/3, 2/3, 2/3)$ et $(1, 0, 0)$.

b) Rappelons que X est compact. Comme f est continue sur X, elle admet donc un maximum local et un minimum. Les extremums de f sont parmi les points trouvés en **a)**. De plus $f(x, y, z) = f(z, y, x) = f(y, x, z)$. Donc le point $(0, 0, 1)$ est un maximum (resp. minimum) si et seulement si $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$ le sont. De même, $(2/3, -1/3, 2/3)$ est un maximum (resp. minimum) si et seulement si $(-1/3, 2/3, 2/3)$ et $(2/3, 2/3, -1/3)$ le sont. Puisque les extremums de f sont nécéssairement parmi les points précédents, on en déduit que ces points sont tous des extremums. De plus $f(0, 0, 1) = 1$ et $f(-1/3, 2/3, 2/3) = 15/27 = 5/9 < 1$. Par conséquent, les points $(0, 0, 1)$,$(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$ sont des maximums et les points $(2/3, 2/3, -1/3)$, $(-1/3, 2/3, 2/3)$ et $(2/3, -1/3, 2/3)$ sont des minimums.

On montre ici comment on pourrait utiliser le théorème des fonctions implicites pour déterminer quels points sont des extremum. Lorsque des arguments de compacité et de symétrie ne sont pas suffisants/possibles pour traiter le cas de tous els candidats extremums, c'est souvent la bonne méthode.

Pour étudier la réciproque du **a**, on utilise donc le Théorème des fonctions implicites au voisinage des extremums trouvés. Etudions le cas $x = y$, c'est à dire les points $A = (2/3, 2/3, -1/3)$ et $B = (0, 0, 1)$. On a

$$Jac(\phi)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

En A le déterminant extrait

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 2(z - y) = 2 \neq 0$$

est non nul. En écrivant $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, on en déduit que $\partial_{(2)}\phi_{(x,y,z)}$ est inversible (où on a noté $\partial_{(2)}\phi_{(x,y,z)}$ la différentielle partielle par rapport au deuxième facter $\mathbb{R}^2$). Comme ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$, le Théorème des fonctions implicites assure qu'il existe un ouvert U_A de $A = (2/3, 2/3, -1/3)$, un ouvert $V \subset \mathbb{R}$, voisinage de $2/3$ et $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) \in U_A$ vérifie $\phi(x, y, z) = 0$ (autrement dit $(x, y, z) \in U_A$) si et seulement si $(y, z) = \psi(x)$ avec ψ de classe $\mathcal{C}^1$.

En termes moins compliqués, cela veut dire que dans le voisinage de A, un élément (x, y, z) de X est sous la forme $x \in V$, $y = y(x)$ et $z = z(x)$ (on oublie ψ dans les notations). Donc dans ce voisinage $f(x, y, z) = x^3 + y^3(x) + z^3(x)$ ets une fonction définie sur l'ouvert V. On sait déjà que f admet un extremeum en $x = 2/3$. Il reste à déterminer la nature de ce maximum en regardant la dérivée seconde de

$$f"(x) = 6x + 6y(x)(y'(x))^2 + 3y^2(x)y''(x) + 6z(x)(z'(x))^2 + 3z^2(x)z''(x)$$

pour $x = 2/3$. Pour cela il ne nous reste plus qu'à calculer $y"(2/3)$ et $z"(2/3)$. Il y a deux méthodes:

i) appliquer la formule du cours: d'après le cours, pour tout $x \in V$, on a $\partial\psi_{(x)} = -(\partial_{(2)}\phi_{(x,\psi(x))})^{-1} \circ \partial_{(1)}\phi_{(x,\psi(x))}$ (où $\partial_{(1)}\phi_{(x,\psi(x))}$ est la différentielle partielle par rapport à $\mathbb{R}$). En appliquant la formule (3), on obtient $\psi'(x) = -(\partial_{(2)}\phi_{(x,\psi(x))})^{-1}(\partial_{(1)}\phi_{(x,\psi(x))}(1))$. Il reste à calculer $(\partial_{(2)}\phi_{(x,\psi(x))})^{-1}$ ce qui donne

$$(\partial_{(2)}\phi_{(x,\psi(x))})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(y-z)} & 1 & -2z \\ & -1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Enfin $\partial_{(1)}\phi_{(x,\psi(x))} = (2x, 1)$. D'où

$$(y'(x), z'(x)) = \psi'(x) = \left(\frac{z - x}{y - z}, \frac{x - y}{y - z}\right).$$

En particulier en $(x, y, z) = A$, on obtient $y'(2/3) = -1$ et $z'(2/3) = 0$. Enfin

$$y''(x) = \frac{\partial y'(x)}{\partial x} = \frac{\partial \frac{z-x}{y-z}}{\partial x} = \frac{(y - z)(z'(x) - 1) - (y'(x) - 1)(z - x)}{(y - z)^2}$$

d'où $y''(2/3) = -1$ et de même on a

$$z''(x) = \frac{\partial z'(x)}{\partial x} = \frac{(y - z)(1 - y'(x)) - (y'(x) - z'(x))(x - y)}{(y - z)^2}$$

d'où $z''(2/3) = 1$. On trouve $f"(2/3) = 7 > 0$ donc $A = (2/3, 2/3, -1/3)$ est un minimum local.

ii) Dériver implicitement ϕ. On écrit le système définissant X

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

et on dérive chaque équation par rapport à x:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + y'(x) + z'(x) \\ 2x + 2y(x)y'(x) + 2z(x)z'(x) = 0 \end{array} \right. \tag{14}$$

On fait $x = 2/3$ ce qui donne le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + y'(2/3) + z'(2/3) \\ 4/3 + 4/3y'(2/3) - 2/3z'(2/3) = 0 \end{array} \right.$$

qui se résoud facilement pour donner $y'(2/3) = -1$ et $z'(2/3) = 0$. Pour calculer les dérivées seconde, on dérive le système (14) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y"(x) + z"(x) \\ 2 + 2y(x)y"(x) + 2(y'(x))^2 + 2z(x)z"(x) + 2(z'(x))^2 = 0 \end{array} \right.$$

On fait $x = 2/3$ et on résoud le système en utilisant les valeurs de $y'(2/3)$, $z'(2/3)$ calculée précédement. On retrouve $y"(2/3) = -1$ et $z"(2/3) = 1$.

Ici la méthode **i)** est assez rapide car on ne considère qu'une matrice $2x2$. En général la méthode **ii)** est plus rapide en pratique.

En $B = (0, 0, 1)$, on a

$$\det \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{array} \right) = 2(z - y) = 2 - 0 \neq 0.$$

On peut donc encore appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir que dans un voisinage de B, y, z sont fonctions de x. En appliquant les méthodes précédentes (**a)** ou **b)**), on obtient

$$y'(0) = -1, \quad z'(0) = 0, \quad z"(0) = -2, \quad y"(0) = 2.$$

On en déduit que $f"(0) = -2 < 0$. Donc $(0, 0, 1)$ est un maximum local.

Par symétrie $(0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0)$ sont des maximums locaux et $(2/3, -1/3, 2/3)$ et $(-1/3, 2/3, 2/3)$ des minimums locaux. Comme X est compact, ces maximus et minimums locaux sont des extremums stricts (puisque de tels extremums stricts existent).

Corrigé 11. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est définie sur un ouvert et différentiable (car polynomiale). D'après le cours, les extremums possibles de f sont les points (x, y) tels que $\partial f_{(x,y)} = 0$. Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$. On doit donc résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x^3 = 4(x - y) \\ 4y^3 = -4(x - y) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^3 = (x - y) \\ y^3 = -x^3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ x^3 = 2x \end{array} \right.$$

ce qui donne les points $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Il reste à déterminer si ces points sont des extrémums. Pour cela on regarde la Hessienne de f.

$$Hess(f)_{(x,y)} = 4 \left(\begin{array}{cc} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{array} \right)$$

Ce qui donne

$$Hess(f)_{(0,0)} = 4\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Hess(f)_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})} = Hess(f)_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = 4\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess(f)_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})})4^2(25-16) \neq 0$ et $Tr(Hess(f)_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})}) = 40 > 0$. Donc $Hess(f)_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})}$ est définie positive et $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum local. De même $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ est un minimum local. En revanche $Hess(f)_{(0,0)}$ est dégénérée (on voit sans mal que son déterminant est nul). On ne peut donc pas utiliser le théorème du cours.

Montrons que $(0,0)$ n'est ni un mimimum, ni un maximum local. On a $f(0,0) = 0$Clairement $f(x,x) = 2x^4 > 0$ si $x \neq 0$ et $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ si $0 < x < \sqrt{2}$. En particulier les inégalités précédentes sont vraies pour x proche de 0. On en déduit que dans tout voisinage de $(0,0)$, il existe des valeurs pour lesquelles $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ et des valeurs pour lesqueles $f(x,y) < 0 = f(0,0)$. Donc $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum (on dit que $(0,0)$ est un point selle).

Corrigé 12 (janvier 2007)**.** On note

$$\phi(x,y,z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 5, x^2 + y^2 - 2z).$$

En particulier $P = \phi^{-1}(\{(0,0)\})$.

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 = 5 \text{ et } x^2 + y^2 - 2z = 0\}.$$

a) Montrer que $P = \phi^{-1}(\{(0,0)\})$ est fermé car ϕ est continue. P est de plus borné car $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x^2 + 2y^2 + z^2 = 5$. Donc P est compact dans $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension finie). Il est non vide car, par exemple $(0,\sqrt{2},1) \in P$.

b) La matrice Jacobienne de ϕ en $m = (x,y,z)$ est

$$Jac(\phi)_{(x,y,z)} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 2x & 2y & -2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Montrons que rang de $Jac(\phi)_{(x,y,z)}$ est 2. Remarquons que l'équation $x^2+y^2-2z = 0$ implique que si $m \in P$ alors $z \geq 0$. On regarde le déterminant extrait obtenu à partir des deux derni'eres colonnes de la matrice $Jac(\phi)_{(x,y,z)}$. On obtient

$$\det\begin{pmatrix} 4y & 2z \\ 2y & -2 \end{pmatrix} = -4y(2+z).$$

Comme $z \geq 0$, ce déterminant est non nul sauf si $y = 0$. Si $y = 0$, $x \neq 0$ car $(0,0,z) \in P$ implique $z = 0$ et $z^2 = 5$ ce qui est contradictoire. Dans ce cas on considère le déterminant extrait

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 2x & -2 \end{pmatrix} = -4x(1+z) \neq 0.$$

Donc, pour tout $m = (x,y,z) \in P$, $Jac(\phi)_{(x,y,z)}$ est de rang 2.

c) Pour trouver les extremas de f, on applique le Th'eorème des multiplicateurs de Lagrange. On a bien $\partial\phi_{(x,y,z)}$ surjective en tout point de P et $f(x,y,z) = y + z$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, si (x,y,z) est un extremum, on a $\partial f_{(x,y,z)}$ est combinaison linéaire de $\partial\phi_{1(x,y,z)}$ et $\partial\phi_{2(x,y,z)}$ ce qui revient à dire que la matrice

$$\begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 2x & 2y & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a un déterminant nul (c'est à dire n'est pas inversible). On calcule

$$\det\begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 2x & 2y & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 8x\det\begin{pmatrix} 1 & 2y & z \\ 0 & -y & -1-z \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en factorisant par 2, x et en retirant la première ligne à la deuxième ligne. On obtient (en retirant la dernière colonne à la deuxième) que ce déterminant vaut $8x(z+1-y)$. Les extremums possibbles sont donc obtenus pour

$x=0$ ce qui donne le système $2y^2+z^2=5$ et $y^2=2z$ qui se résoud en $y=\pm\sqrt{2}$ et $z=1$. On a donc les points $(0,\sqrt{2},1)$ et $(0,-\sqrt{2},1)$.

$z=y-1$. Alors l'équation $x^2+y^2-2z=0$ devient $x^2+y^2-2y+2=0$ c'est à dire $x^2+(y-1)^2+1=0$ qui n'a pas de solutions.

Conclusion il y a 2 extremums possibles: $(0,\sqrt{2},1)$ et $(0,-\sqrt{2},1)$. Comme P est compact on sait déjà que f doit admettre au moins un maximum et un minimum. Donc comme on a que deux candidats pour les extremums, on sait déjà que ces candidats extremums sont des extremums globaux (et en particulier sont des extremums). Il ne reste plus qu'à déterminer qui est un maximum et qui est un minimum. Il suffit de vérifier que $f(0,\sqrt{2},1)=1+\sqrt{2}>f(0,-\sqrt{2},1)=1-\sqrt{2}$. Donc $(0,\sqrt{2},1)$ est un maximum et $(0,-\sqrt{2},1)$ est un minimimum.

A titre pédagogique, on montre comment vérifier si les candidats extremums obtenus sont des maximums ou minimums en appliquant le théorème des fonctions implicites (comme dans l'exercice précédent). Etudions le point $(0,\sqrt{2},1)$. On applique le théorème des fonctions implicites. Comme le candidat extremum vérifie $y\neq 0$, on a alors que dans un voisinage de $(0,\sqrt{2},1)$ par les calculs précédents, que y,z sont des fonctions de x. On calcule maintenant $y'(0), y"(0), z'(0), z"(0)$. POur cela on applique la méthode **b)** de l'exercice précédent. On écrit le système définissant P:

$$\begin{cases} x^2+2y^2+z^2-5=0 \\ x^2+y^2-2z=0 \end{cases}$$

et on le dérive (par rapport à x):

$$\begin{cases} 2x+4yy'+2zz'=0 \\ 2x+2yy'-2z'=0 \end{cases}$$

En $(0,\sqrt{2},1)$ on obtient le système

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}y'(0)+2z'(0)=0 \\ 2\sqrt{2}y'(0)-2z'(0)=0 \end{cases}$$

dont la solution est $y'(0)=z'(0)=0$. En dérivant une deuxième fois le système définissant P, on obtient

$$\begin{cases} 2+4yy"+4(y')^2+2zz"+2(z')^2=0 \\ 2+2yy"+2(y')^2-2z"=0 \end{cases}$$

En remplaçant x,y,z,z',y' par leurs valeurs en $x=0$, on obtient $z"(0)=-1/4$ et $y"(0)=-3/(4\sqrt{2})$.

On a alors $f''(0) = -3/(4\sqrt{2}) - 1/4 < 0$ ce qui prouve que le point $(0, \sqrt{2}, 1)$ est un maximum.

Un calcul similaire montre que pour le point $(0, -\sqrt{2}, 1)$, on a encore y, z fonction de x et $y'(0) = z'(0) = 0$, $y"(0) = 3/(4\sqrt{2})$, $z"(0) = 1/4$. On conclut que $f''(0) = 3/(4\sqrt{2}) - 1/4 > 0$ et $(0, -\sqrt{2}, 1)$ est un minimum.

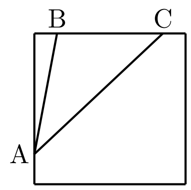
Corrigé 13. On note S le carré $S = [0, a]^2$ dans le plan (euclidien) et *Aire* la fonction qui à un triplet (A, B, C) de points des côtés de S associe l'aire du triangle (A, B, C). En particulier

$$Aire(A, B, C) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$$

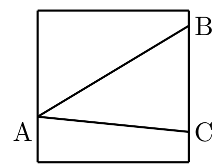
est une focntion continue. il est clair qu'être un triangle d'aire maximale est invariant par rotation d'angle $\pi/2$ du carré S ou par permutation des sommets (*i.e.* $Aire(A, B, C) = Aire(B, A, C)$...).

a) Comme $S = [0, a]^2$ est un produit de compacts de $\mathbb{R}$, c'est un compact de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un fermé. Donc sa frontière $\mathrm{fr}(S) = S - \mathring{S}$ est fermé dans S donc compact. La réunion des 4 côtés de S est exactement la frontière $\mathrm{fr}(S)$. Donc, comme $\mathrm{fr}(S)$ est compact, la fonction continue $Aire : \mathrm{fr}(S)^3 \to \mathbb{R}_+$ admet un minimum (qui est trivialement 0 pour trois points confondus) et un maximum.

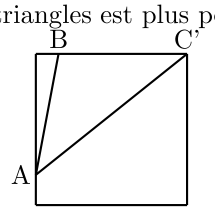
b) Montrons pour commencer qu'on peut supposer que A, B, C sont sur 3 côtés distincts (au sens large, c'est à dire qu'un point peut appartenir à deux côtés simultanément). En effet, si A, B, C sont sur un seul côté, alors $Aire(A, B, C) = 0$ et (A, B, C) n'est aps d'aire maximale. Si A, B, C sont sur deux côtés, à une rotation près et permutation des sommets prés, le triangle (A, B, C) est de la forme



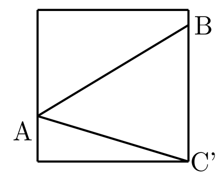
ou



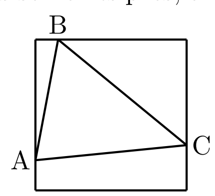
Or l'aire de ces triangles est plus petite que celles des triangles



ou



obtenus en déplaçant C en C'. Comme les triangles obtenus sont sur 3 côtés distincts, un triangle d'aire maximale a ses côtés qui sont sur 3 côtés distincts. A rotation et permutation des somemts prés, on peut donc supposer qu'un tel triangle est de la forme



c'est à dire que les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $A = (0, y)$, $B = (x, a)$, $C = (a, z)$. On s'est donc ramené au cas où $(A, B, C) \in K$ (où

$(x,y,z) \in K = [0,a]^3$ est identifié avec le triplet de points de S de la forme $\big((x,a),(0,y),(a,z)\big)$.

c) on note $f(x,y,z) = Aire(A,B,C)$ l'aire d'un triangle (A,B,C) vérifiant les hypothèses de la question **b)**. On obtient facilement (remarquer que (A,B,C) est direct) que

$$f(x,y,z) = Aire(A,B,C) = \frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}(-ay - xz + xy + a^2).$$

Comme $\overset{\circ}{K}$ est ouvert, si (A,B,C) est d'aire maximale alors $\partial f_{(x,y,z)} = 0$. Or

$$Jac(f)_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y-z & x-a & -x \end{pmatrix}$$

Elle ne peut être nulle que si $x=0$ et $x=a$ ce qui est absurde. Donc il n'y a pas d'extremum dans $\overset{\circ}{K}$.

d) Un triangle d'aire maximale vérifie donc nécéssairement que $(x,y,z) \in \mathrm{fr}(K) = [0,a]^3 -]0,a[^3$, c'est à dire si x,y ou z vaut 0 ou a (ou, de manière équivalente, si un des sommets A,B,C appartient à deux côtés distincts). Montrons maintenant qu'en fait au moins deux sommets doivent être sur deux côtés distincts (c'est à dire qu'au plus une des coordonnées x,y,z est différente de 0 ou a). Il y a 3 cas:

Si $x \in \{0,a\}$. En fixant x, $f(x,y,z)$ devient une fonction des seules variables y,z. Si elle a un extremum en un point (y,z) de $\overset{\circ}{[0,a]^2}$, alors sa différentielle en (y,z) est nulle c'est à dire que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\,(x-a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{x}{2}$ sont nulles ce qui est absurde.

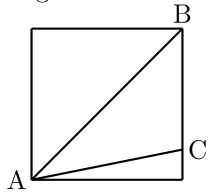
Si $y \in \{0,a\}$. En fixant y, $f(x,y,z)$ devient une fonction des seules variables x,z. Si elle a un extremum en un point (x,z) de $\overset{\circ}{[0,a]^2} =]0,a[^2$, alors sa différentielle en (x,z) est nulle c'est à dire que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\,(y-z)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{x}{2}$ sont nulles ce qui est absurde puisque $x \in]0,a[$ donc non nul pour $(x,z) \in \overset{\circ}{[0,a]^2} =]0,a[^2$.

Enfin si $z \in \{0,a\}$. En fixant z, $f(x,y,z)$ devient une fonction des seules variables x,y. Si elle a un extremum en un point (x,z) de $\overset{\circ}{[0,a]^2} =]0,a[^2$, alors sa différentielle en (x,z) est nulle c'est à dire que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\,(y-z)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{1}{2}\,(x-a)$ sont nulles ce qui est absurde puisque $x \in]0,a[$ donc $x-a$ est non nul pour $(x,y) \in \overset{\circ}{[0,a]^2} =]0,a[^2$.

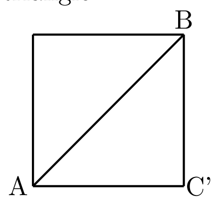
par conséquent, au moins 2 des coordonnées x,y,z sont dans $\{0,a\}$. On étudie les différents cas possibles:

i) Si $x=0$ et $y=0$ on a alors, quel que soit z, un triangle d'aire $\dfrac{a^2}{2}$. Si $x=0$ et $y=a$ $A=B$ et donc on a un triangle d'aire nulle

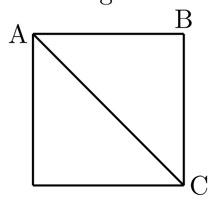
ii) Si $x=a$ et $y=0$, alors le triangle ABC est de la forme



d'aire inférieure à celle du triangle

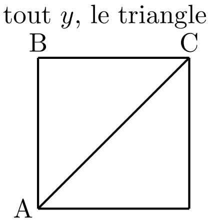


d'aire $\frac{a^2}{2}$. De même si $x = a$ et $y = a$ on obtient que tout traingle ABC ets d'aire inférieure à celle du triangle



dont l'aire est également $\frac{a^2}{2}$.

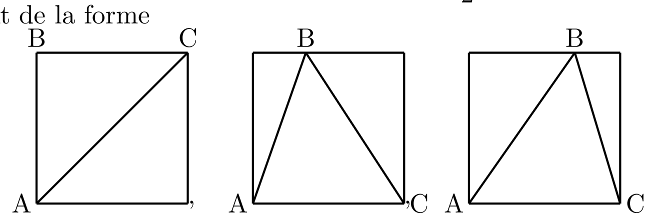
iii) Si $y = 0$ et $z = 0$, alors que que soit x le triangle ABC est d'aire $\frac{a^2}{2}$. Si $y = 0$ et $z = a$, alors pour tout y, le triangle ABC est d'aire inférieure à celle de



d'aire $\frac{a^2}{2}$.

iv) les cas restants se traitent de la même manière et donne des triangles d'aire au plus $\frac{a^2}{2}$.

On conclut que l'aire maximale d'un triangle est $\frac{a^2}{2}$ et que les triangles maximaux sont de la forme



et tous ceux obtenus à partir de ceux là par rotations et permutations des sommets.

Devoir corrigé

Exercice 1

(1) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$). Montrer que l'application : $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.

(2) On suppose maintenant que E est un espace de Hilbert (réel), on définit ϕ et ψ de E dans $\mathbb{R}$ par :
$$\phi(x) = (x, x), \quad \psi(x) = \|x\|, \text{ pour } x \in E,$$
où (x, y) désigne le produit scalaire de x avec y ($\|x\|^2 = (x, x)$). Montrer que ϕ est différentiable en tout point de E. Calculer $D\phi(x)(h)$, pour tout $(x, h) \in E \times E$. Montrer que ψ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$. Calculer $D\psi(x)(h)$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et tout $h \in E$.

(3) Sous les hypothèses de la question 2, montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $v(x) \in E$ tel que $D\psi(x)(h) = (v(x), h)$. Calculer $v(x)$. On appelle ce vecteur le gradient de ψ au point x.

Corrigé

(1) *Soit $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, montrons que*
$$\frac{\|0 + h\| - \|0\| - L(h)}{\|h\|} = 1 - \frac{L(h)}{\|h\|}$$
ne tend pas vers 0 lorsque h tend vers 0. Il est clair que c'est le cas si $L = 0$. Supposons donc qu'il existe $h_0 \in E$, $\|h_0\| = 1$, $L(h_0) \neq 0$. Soit $h = th_0$ où $t \in \mathbb{R}$, on obtient
$$\frac{1}{\|th_0\|} L(th_0) = \frac{t}{|t|} L(h_0).$$
Cette expression n'a pas de limite quand t tend vers 0.

(2) *Soit $x \in E$. On a :*
$$\phi(x + h) - \phi(x) = 2(x, h) + \|h\|^2.$$
L'application $h \to (x, h)$ est linéaire et continue de $(E, \|.\|)$ dans $\mathbb{R}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0$, donc ϕ est différentiable en x et $D\phi(x)h = (2x, h)$. La différentiabilité de ψ se déduit de celle de ϕ en remarquant que $\psi(x) = \sqrt{\phi(x)}$, que la fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $]\mathbf{0}, +\infty[$ et en appliquant le théorème sur la composition de fonctions diiférentiables. De ce même théorème, on déduit que $D\psi(x)(h) = \frac{1}{\psi(x)}(x, h)$.

(3) *Le calcul précédent montre que pour tout $x \in E$, on a $D\psi(x)(h) = (v(x), h), \forall h \in E$, avec $v(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a donc prouvé que $grad\|x\| = \frac{x}{\|x\|}$.*

Exercice 2

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

couplée à la condition initiale

$$u(0, x, y) = h(x, y) \tag{2}$$

où $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et où l'inconnue est $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

(1) On suppose d'abord que $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifie l'équation (1). Pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminez une application (non constante)
$$\gamma_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
telle que u soit contant le long de la courbe $t \to \gamma_X(t)$ (c'est à dire que $u \circ \gamma_X$ est une constante) et telle que $\gamma_X(0) = (0, x, y)$.

(2) Montrez que
$$\Gamma : (t,x,y) \to \gamma_{(x,y)}(t)$$
est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

(3) Montrez que l'équation (1) possède une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant la condition (2).

Corrigé

(1) *On va chercher γ_X de classe C^1. Comme u est de classe $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, $u \circ \gamma_X$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{d}{dt}(u\circ\gamma_X)(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Notons $(\theta_X(t), \phi_X(t), \psi_X(t)) = \gamma_X(t)$. On a*
$$\frac{d}{dt}(u\circ\gamma_X)(t) = \theta'_X(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \phi'_X(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \psi'_X(t)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$
De (1), on déduit qu'il suffit de choisir $\theta_X(t) = t$, $\phi_X(t) = t + x$ et $\psi_X(t) = -t + y$. Ce sont bien des applications de classe $C^1(\mathbb{R})$ et donc $\gamma_X = (\theta_X, \phi_X, \psi_X)$ vérifie les hypothèses.

(2) *De la question précédente, on déduit que $\Gamma(t,x,y) = \gamma_X(t) = (t, x+t, y-t) = t(1,1,-1) + x(0,1,0) + y(0,0,1)$. Ainsi Γ est une application linéaire, bijective de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. C'est donc un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.*

(3) *De la question (1), on déduit que si $u \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ vérifie (1), alors $\frac{\partial u\circ\Gamma}{\partial t}(t,x,y) = 0$ et donc $u\circ\Gamma(t,x,y) = u\circ\Gamma(0,x,y)$. En conséquence, si (2) est vérifiée on a $u\circ\Gamma(t,x,y) = h(x,y)$ et, si u vérifie (1) et (2), alors $u\circ\Gamma$ est* **uniquement déterminé**. *Comme*
$$u = (u\circ\Gamma)\circ\Gamma^{-1},$$
c'est **l'unique solution de (1), (2) qui soit dans $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$.** *On a vu que $u\circ\Gamma(t,x,y) = u(0,x,y)$ d'où, en notant $\Gamma^{-1}(t,x,y) = (\delta(t,x,y), \alpha(t,x,y), \beta(t,x,y))$,*
$$u(t,x,y) = h(\alpha(t,x,y), \beta(t,x,y)),\ \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^3.$$
Tous calculs faits, on trouve $u(t,x,y) = h(x-t, y+t)$.

Exercice 3

On note $M_m(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $m \times m$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, muni de la norme de l'application linéaire associée. On rappelle que $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

(1) Démontrez que pour tout $A \in M_m(\mathbb{C})$, la série
$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!}A^n$$
converge dans $M_m(\mathbb{C})$. On note $E(A)$ la somme de cette série.

(2) Soit $A \in M_m(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $M_m(\mathbb{C})$ définie par $u_n : t \mapsto \frac{t^n}{n!}A^n$. Montrez que u_n est différentiable, et explicitez la différentielle $Du_n : \mathbb{R} \to L\big(\mathbb{R}, M_m(\mathbb{C})\big)$. En déduire que u_n est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et explicitez sa fonction dérivée $u'_n : \mathbb{R} \to M_m(\mathbb{C})$.

(3) Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $f(t) = E(tA)$. Montrez que f est différentiable sur $\mathbb{R}$. *(Utilisez le théorème sur la différentiabilité d'une série de fonctions).*

(4) Montrez que f vérifie les propriétés suivantes :
   (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(t) = Af(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,
   (b) $f(s+t) = f(s).f(t)$, $\forall s,t \in \mathbb{R}$,
   (c) $f(0) = I$.

(5) Soit $x \in \mathbb{C}^m$. Montrez que la fonction $v(t) = E(tA)x$ est l'unique application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^m$ solution du problème: $v' = Av$ et $v(0) = x$.

(6) On définit l'application E qui à $A \in M_n(\mathbb{C})$ associe $\sum_0^\infty \frac{1}{n!}A^n$.
   (a) Montrer que E est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que $E(M_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$ et que $E(A)^{-1} = E(-A)$.
   (c) Montrer que E est différentiable en 0 et calculer sa différentielle.

Corrigé

(1) *La série de terme général $\frac{1}{n!}\|A^n\|$ est convergente ($\frac{1}{n!}\|A^n\| \le \frac{1}{n!}\|A\|^n$), et comme l'espace $M_n(\mathbb{C})$ est complet (de dimension finie), la série $\sum_0^\infty \frac{1}{n!}A^n$ est convergente.*

(2) *Si $n \neq 0$, on a*
$$u_n(t+h) - u_n(t) = \frac{(t+h)^n - t^n}{n!}A^n.$$

26

L'application g qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\frac{t^n}{n!} \in \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et sa différentielle est $Dg(t)h = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}h$. On a donc

$$\frac{(t+h)^n - t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}h + |h|\epsilon(h),$$

où $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, puis

$$u_n(t+h) - u_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}hA^n + |h|\epsilon(h)A^n.$$

On en déduit que les applications u_n sont différentiables sur $\mathbb{R}$ et $Du_n(t)h = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n h$. Comme $u_0(t) = I$, elle est aussi différentiable sur $\mathbb{R}$ et $Du_0(t)h = 0$. Ainsi, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $n \neq 0$, $u_n'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n$ et $u_0'(t) = 0$.

(3) *Comme $E(tA) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{n=N} u_n(t)$, on va déduire la différentiabilité de f à partir de celle des u_n. Pour cela on va vérifier les hypothèses du corollaire 2.3, du chapitre 4 du cours avec $\Omega =]-\alpha, \alpha[$, $\alpha > 0$ quelconque. On a déjà montré la différentiabilité du terme général, ainsi que la convergence simple de la série. Il reste à montrer la convergence uniforme de la série de terme général $u_n'(t)$ sur Ω. Comme*

$$\sup_{t\in]-\alpha,\alpha[} \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!}\|A^n\| = \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\|A^n\| \leq \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\|A\|^n$$

et que la série numérique de terme général $\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}\|A\|^n$ converge, la série de terme général u_n' converge uniformément sur $\Omega =]-\alpha, \alpha[$. Donc, l'application du corollaire 2.3 du cours implique que f est différentiable en tout point de $]-\alpha, \alpha[$. Comme $\alpha > 0$ est quelconque dans ce qui précède, on a bien montré que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : *On a pas convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est pourquoi on doit travailler dans les intervalles $]-\alpha, \alpha[$.*

(4) (a) *L'application du même corollaire conduit à*

$$f'(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n'(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n.$$

On pose $m = n-1$, ce qui donne

$$f'(t) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{t^m}{m!}A^{m+1}.$$

Comme la série converge dans $M_n(\mathbb{C})$, on obtient

$$f'(t) = A\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{t^m}{m!}A^m = Af(t).$$

Cette dernière série d'égalités provient de la continuité de l'application (linéaire !) $M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in M_n(\mathbb{C})$, ce qui justifie de pouvoir "sortir" un facteur A de la somme de la série.

(b) *On propose deux démonstrations de ce résultat. La première est un calcul direct, la seconde utilise les résultats des questions suivantes.*

Preuve 1. *Posons*

$$W_n = (\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}A^k)(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{s^k}{k!}A^k) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(t+s)^k}{k!}A^k.$$

La formule du binôme s'écrit

$$\frac{(t+s)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{C_k^i t^{k-i} s^i}{k!} = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!}\frac{s^i}{i!}.$$

D'où

$$W_n = (\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!}A^k)(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{s^k}{k!}A^k) - \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{i=0}^{i=k} \frac{(tA)^{k-i}}{(k-i)!}\frac{(sA)^i}{i!} = \sum_{k=n+1}^{k=2n}\sum_{i=0}^{i=k} \frac{(tA)^{k-i}}{(k-i)!}\frac{(sA)^i}{i!},$$

puis en utilisant la propriété de la norme utilisée sur l'ensemble des matrices, on déduit

$$\|W_n\| \le \sum_{k=n+1}^{k=2n} \sum_{i=0}^{i=k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \frac{s^i}{i!} \|A\|^k,$$

$$\|W_n\| \le \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{(t+s)^k}{k!} \|A\|^k.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$*. Ceci montre bien l'inégalité demandée en passant à la limite dans la définition de* W_n*.*

Preuve 2. *On suppose connue la propriété suivante (qui est démontrée dans la question suivante et qui n'utilise que le résultat de la question 4a):*

$$\text{Si } v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \text{ vérifie } v'(t) = Av(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } v(0) = 0, \text{ alors } v \equiv 0$$

On fixe $s \in \mathbb{R}$ *et on considère les fonctions* v_1 *et* v_2 *définies par*

$$v_1(t) = f(t+s), \quad v_2(t) = f(t)f(s).$$

D'après ce qui précède, ces deux fonctions sont de classe C^1 *et on a*

$$v_1'(t) = f'(t+s) = Af(t+s) = Av_1(t),$$
$$v_2'(t) = f'(t)f(s) = Af(t)f(s) = Av_2(t).$$

Ainsi, la différence $v = v_1 - v_2$ *vérifie l'équation* $v'(t) = Av(t)$ *ainsi que* $v(0) = v_1(0) - v_2(0) = f(s) - f(s) = 0$*. D'après la propriété rappelée ci-dessus on en déduit que* v *est identiquement nulle, ce qui montre le résultat attendu.*

(c) *Par un calcul direct , on trouve* $f(0) = I$*.*

(5) *On a vu que* v *est dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}^n$*, que* $v'(t) = AE(tA)x = Av(t)$ *et, de plus, on a* $v(0) = E(0)x = x$*, ce qui montre vérifie bien le problème considéré.*

Montrons qu'il s'agit bien de l'unique solution. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ *dérivable vérifiant* $v'(t) = Av(t), \forall t$ *et* $v(0) = x$*. La fonction* $h(t) = f(-t)v(t)$ *est bien dérivable et on a*

$$h'(t) = -f'(-t)v(t) + f(-t)v'(t) = -Af(-t)v(t) + f(-t)Av(t).$$

Or, il est clair d'après la définition de f *que* A *et* $f(t)$ *sont deux matrices qui commuttent, on a donc* $h'(t) = 0$ *pour tout* t*, ce qui montre que* h *est constante et donc que* $h(t) = h(0) = v(0) = x$ *et ainsi* $v(t) = f(t)x$*.*

(6) (a) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, l'application qui à* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *associe* $A^k \in M_n(\mathbb{C})$ *est continue et même différentiable (voir exercice 12 de la planche 4). Comme la convergence de la série est uniforme sur tout compact de* $M_n(\mathbb{C})$*, on en déduit la continuité de* E*.*

(b) *Comme* $f(1) = E(A)$*, de la question (4)(b), on déduit que*

$$I = E(A - A) = E(A)E(-A).$$

Donc $E(A)$ *est inversible, d'inverse* $E(A)^{-1} = E(-A)$*.*

(c) *Par définition,* $E(A) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^n$*. Donc*

$$E(H) - E(0) = H + \sum_2^\infty \frac{1}{n!} H^n.$$

L'application qui à $H \in M_n(\mathbb{C})$ *associe* H *est linéaire et continue de* $M_n(\mathbb{C})$ *dans* $M_n(\mathbb{C})$*. La série précédente étant convergente dans* $M_n(\mathbb{C})$*, on peut écrire :*

$$\lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|} \sum_2^\infty \frac{1}{n!} H^n = \lim_{h\to 0} \frac{H^2}{\|H\|} \sum_0^\infty \frac{1}{(n+2)!} H^n = 0.$$

Ainsi, E *est différentiable en* 0 *et* $DE(0) = I$*.*