

## SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 01

### CHAMP ÉLECTRIQUE ET CHAMP MAGNÉTIQUE STATIQUES

**EXERCICE 01 :** *Champ et potentiel créés par une distribution de charges.*

1. Demi-sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  et  $z > 0$

Potentiel :

$$V = \int dV = K\sigma \iint \frac{ds}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre  $(0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ ) avec  $ds = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$  et  $r = R$   
D'où

$$V = K\sigma \cdot R \left( \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \Rightarrow V = 2\pi \cdot K\sigma \cdot R [-\cos \theta]_0^{\pi/2}$$

Donc

$$V = 2\pi \cdot K\sigma \cdot R = \frac{\sigma \cdot R}{2\epsilon_0}$$

Champ :

Distribution : La distribution est surfacique  $dq = \sigma \cdot ds$  et uniforme  $\sigma = \text{constante}$ . Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie :  $O$  se trouve sur l'axe ( $Oz$ ) qui est un axe de symétrie  $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant ( $Oz$ ).

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \quad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe ( $Oz$ ). ( $\theta$  est l'angle défini par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE \cdot \cos \theta = -K\sigma \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

Et

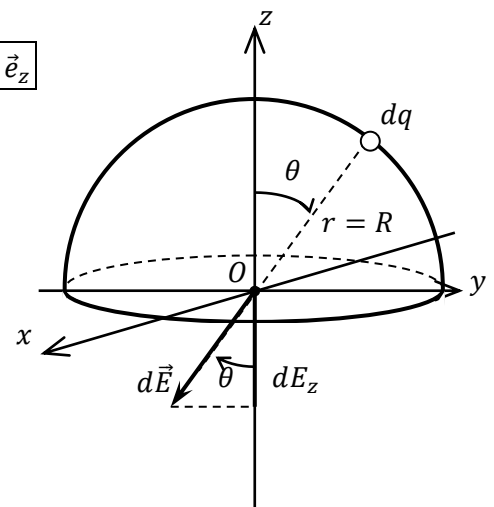
$$E_z = \int dE_z = -K\sigma \iint \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

Paramétrage : (Paramètre  $(0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ )

$$\begin{cases} ds = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ r = R = \text{constante} \\ \cos \theta = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow E_z = -K\sigma \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = -\frac{1}{2} K\sigma \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Donc

$$E_z = -K\pi \cdot \sigma \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = (-\pi \cdot K\sigma) \vec{e}_z = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{e}_z}$$



2. Sphère de rayon  $R$  centrée en  $O$

$$\sigma = \sigma_0 \frac{|z|}{z} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_0 & \text{pour } z > 0 \\ \sigma = -\sigma_0 & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

D'après la question 1.

La demi-sphère ( $z > 0$ ) donne un champ au point  $O$  égal à :  $\vec{E}_1 = (-\pi \cdot K\sigma)\vec{e}_z = (-\pi \cdot K\sigma_0)\vec{e}_z$

La demi-sphère ( $z < 0$ ) donne un champ au point  $O$  égal à :  $\vec{E}_2 = (+\pi \cdot K\sigma)\vec{e}_z = (-\pi \cdot K\sigma_0)\vec{e}_z$

Et le champ total au point  $O$ .

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (-\pi \cdot K\sigma_0)\vec{e}_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$$

3. Sphère de rayon  $R$  centrée en  $O$  et portant une densité surfacique  $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos \theta$

Potentiel :

$$V = \int dV = K\sigma \iint \frac{ds}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ )) avec  $ds = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$  et  $r = R$   
D'où

$$V = K\sigma_0 \cdot R \left( \int_0^\pi \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \Rightarrow V = \pi \cdot K\sigma_0 \cdot R \int_0^\pi \sin(2\theta) \cdot d\theta$$

Donc

$$V = \pi \cdot K\sigma_0 \cdot R \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^\pi \quad \text{et} \quad \boxed{V = 0}$$

Champ :

Distribution : La distribution est surfacique  $dq = \sigma \cdot ds$  non uniforme  $\sigma \neq$  constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K \iint \frac{\sigma \cdot ds}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie : Puisque  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ , alors  $O$  se trouve

sur l'axe ( $Oz$ ) qui est un axe de symétrie  $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant ( $Oz$ ).

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \quad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe ( $Oz$ ). ( $\theta$  est l'angle défini par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE \cdot \cos \theta = -K\sigma \frac{ds}{r^2} \cos \theta$$

Et

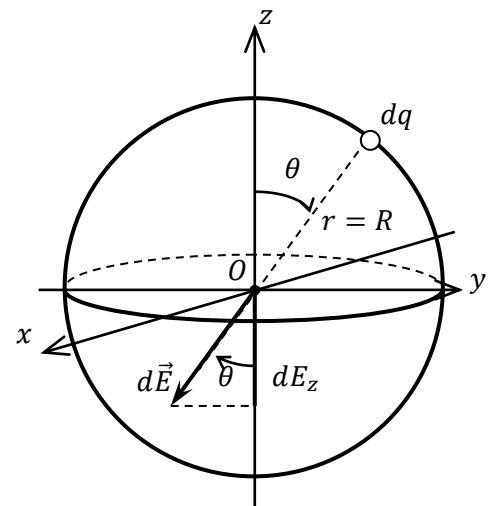
$$E_z = \int dE_z = -K \iint \frac{\sigma \cdot ds}{r^2} \cos \theta$$

Paramétrage : (Paramètre ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ))

$$\begin{cases} ds = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ r = R = \text{constante} \\ \cos \theta = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow E_z = -K\sigma_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Donc

$$E_z = K \cdot 2\pi \cdot \sigma_0 \left[ \frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_0^\pi \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \left( -\frac{4\pi}{3} \cdot K\sigma_0 \right) \vec{e}_z = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z}$$



4. Demi-sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  et  $z > 0$

Potentiel :

$$V = \int dV = K\rho \iiint \frac{d\tau}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre ( $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ))

Avec  $d\tau = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . D'où

$$V = K\rho \cdot \left( \int_0^R r \cdot dr \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \Rightarrow V = \pi K \cdot \rho \cdot R^2 [-\cos \theta]_0^{\pi/2}$$

Donc

$$V = \pi K \cdot \rho \cdot R^2 = \frac{\rho \cdot R^2}{4\epsilon_0}$$

Champ :

Distribution : La distribution est volumique  $dq = \rho \cdot d\tau$  et uniforme  $\rho = \text{Constante}$ . Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\rho \iiint \frac{d\tau}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie :  $O$  se trouve sur l'axe ( $Oz$ ) qui est un axe de symétrie  $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcule uniquement la composante suivant ( $Oz$ ).

$$dE = K\rho \frac{d\tau}{r^2} \quad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe ( $Oz$ ). ( $\theta$  est l'angle défini par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE \cdot \cos \theta = -K\rho \frac{d\tau}{r^2} \cos \theta$$

Et

$$E_z = \int dE_z = -K\rho \iiint \frac{d\tau}{r^2} \cos \theta$$

Paramétrage : (Paramètre ( $0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ))

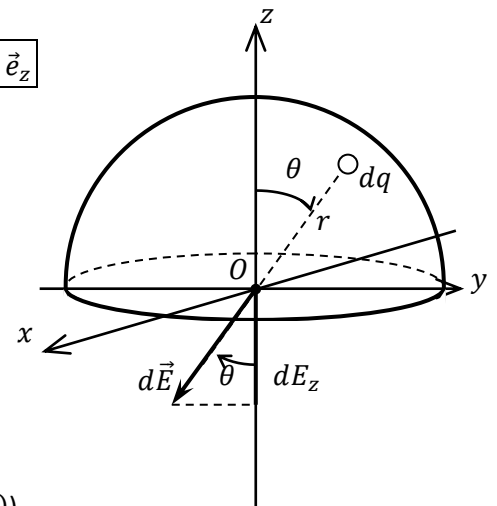
$$\begin{cases} d\tau = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ r = r \\ \cos \theta = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow E_z = -K\rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Donc

$$E_z = -K\rho \left( \int_0^R dr \right) \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right)$$

Et

$$E_z = -K\rho \cdot \pi R \cdot \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = (-K\rho \cdot \pi R) \vec{e}_z = -\frac{\rho R}{4\epsilon_0} \vec{e}_z}$$



5. Sphère de rayon  $R$  centrée en  $O$  et portant une densité volumique  $\rho = \rho_0 \cdot \cos \theta$

Potentiel :

$$V = \int dV = K \iiint \frac{\rho \cdot d\tau}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre  $(0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ )

Avec  $d\tau = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . D'où

$$V = K\rho_0 \cdot \left( \int_0^R r \cdot dr \right) \left( \int_0^\pi \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \Rightarrow V = \pi K \cdot \rho_0 \cdot R^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi$$

Donc

$$\boxed{V = 0}$$

Champ :

Distribution : La distribution est volumique  $dq = \rho \cdot d\tau$  non uniforme  $\rho \neq$  Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K \iiint \frac{\rho \cdot d\tau}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie :  $O$  se trouve sur l'axe  $(Oz)$  qui est un axe de symétrie  $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant  $(Oz)$ .

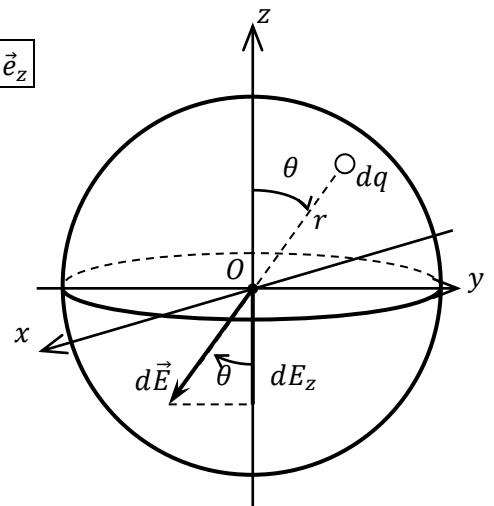
$$dE = K\rho \frac{d\tau}{r^2} \quad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe  $(Oz)$ . ( $\theta$  est l'angle défini par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE \cdot \cos \theta = -K\rho \frac{d\tau}{r^2} \cos \theta$$

Et

$$E_z = \int dE_z = -K \iiint \frac{\rho \cdot d\tau}{r^2} \cos \theta$$



Paramétrage : (Paramètre  $(0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ )

$$\begin{cases} d\tau = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ r = r \\ \cos \theta = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow E_z = -K\rho_0 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Donc

$$E_z = -K\rho_0 \left( \int_0^R dr \right) \cdot \left( \int_0^\pi \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right)$$

Et

$$E_z = -K\rho_0 \cdot 2\pi R \cdot \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \left( -\frac{4\pi}{3} K \cdot \rho_0 R \right) \vec{e}_z = -\frac{\rho_0 R}{3\epsilon_0} \vec{e}_z}$$

**EXERCICE 02 : Théorème de Gauss. Calcul du champ et du potentiel électrostatique.**

1. Champ électrostatique crée en un point quelconque de l'espace par une droite infinie chargée avec une densité linéique uniforme  $\lambda$ .

*Théorème de Gauss :*

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

*Symétrie du champ électrostatique :* cylindrique (ou axiale)

Surface de Gauss : Cylindre  $S_1$  coaxial à la distribution fermé par deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

La hauteur du cylindre  $S_1$  est notée  $h$  et son rayon  $\rho$ ,  $\rho$  est aussi le rayon des deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3$$

Comme  $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$  et  $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$  alors

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3 = 0$$

Et comme  $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$  et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E_1 \cdot ds_1$$

En plus, en utilisant la symétrie de translation le long de la droite chargée et la symétrie de rotation avec comme axe de rotation la droite chargée, nous trouvons que  $E_1 = \text{Constante}$  sur la surface  $S_1$ . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 \iint_{S_1} ds_1 = E_1 \cdot S_1$$

Nous obtenons donc :

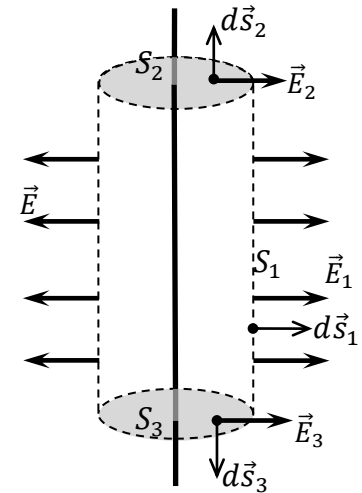
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot h$$

*Calcul de la charge intérieure :*

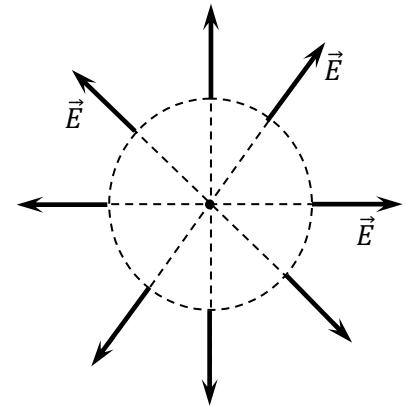
Distribution linéaire uniforme  $dq = \lambda \cdot dl \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \int dq = \lambda \int_{\text{int}} dl \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \lambda \cdot h$

En remplaçant, nous trouvons

$$E_1 \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot h = \frac{\lambda \cdot h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho = \frac{2K \cdot \lambda}{\rho} \vec{e}_\rho}$$

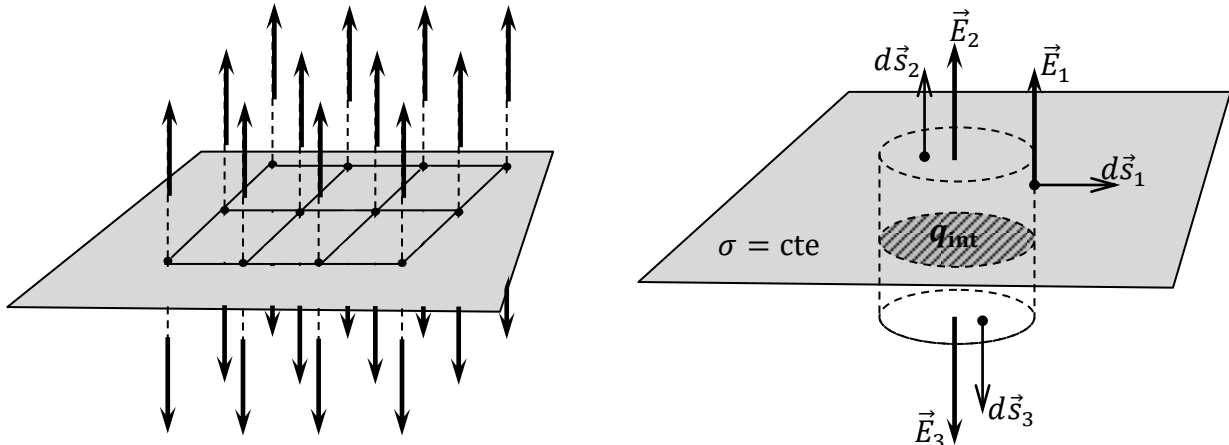


Symétrie : Vue en perspective.



Symétrie : Vue d'en haut.

2. Champ électrostatique créée en un point quelconque de l'espace par un plan infini chargé avec une densité surfacique uniforme  $\sigma$ .



Théorème de Gauss : 
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : Plane.

Surface de Gauss : Cylindre  $S_1$  dont l'axe est perpendiculaire à la distribution fermé par deux disques  $S_2$  et  $S_3$ . La hauteur du cylindre  $S_1$  est notée  $h$  et son rayon  $r$ ,  $r$  est aussi le rayon des deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3$$

Comme  $\vec{E}_1 \perp d\vec{s}_1$  alors

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = 0$$

Et comme  $\vec{E}_2 \parallel d\vec{s}_2$  et  $\vec{E}_3 \parallel d\vec{s}_3$  et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3 = \iint_{S_2} E_2 \cdot ds_2 + \iint_{S_3} E_3 \cdot ds_3$$

En plus, en utilisant la symétrie de translation le long d'une droite parallèle au plan chargé et la symétrie de part et d'autre du plan chargé, nous trouvons que  $E_2 = E_3 = E = \text{constante}$  (en module) sur les surfaces  $S_2$  et  $S_3$ . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_{S_2} ds_2 + E \iint_{S_3} ds_3 = E \cdot (S_2 + S_3)$$

Nous obtenons donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 2 \cdot \pi r^2$$

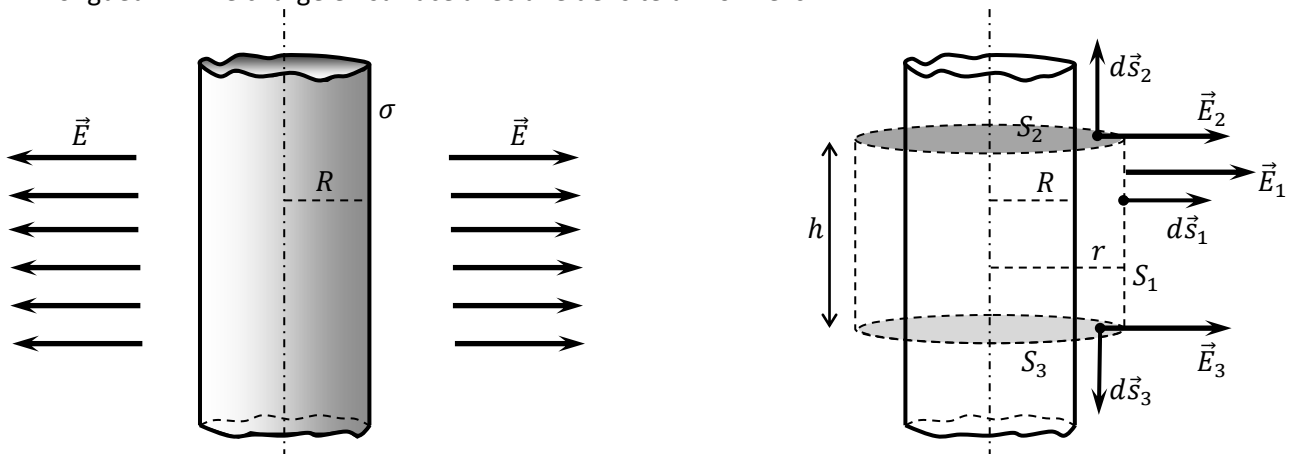
Calcul de la charge intérieure :

Distribution surfacique uniforme  $dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \iint_{\text{int}} ds \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \sigma \cdot \pi r^2$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 2 \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma \cdot \pi r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z}$$

3. Champ électrostatique créé en un point quelconque de l'espace par un cylindre de rayon  $R$  et de longueur infinie chargé en surface avec une densité uniforme  $\sigma$ .



Théorème de Gauss :  $\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

Symétrie du champ électrostatique : cylindrique.

Surface de Gauss : Cylindre  $S_1$  coaxial à la distribution fermé par deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

La hauteur du cylindre  $S_1$  est notée  $h$  et son rayon  $r$ ,  $r$  est aussi le rayon des deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3$$

Comme  $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$  et  $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$  alors

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3 = 0$$

Et comme  $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$  et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E_1 \cdot ds_1$$

En plus, en utilisant la symétrie de translation le long de l'axe du cylindre chargé et la symétrie de rotation avec comme axe de rotation le même axe, nous trouvons que  $E_1 = \text{constante}$  sur la surface  $S_1$ . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 \iint_{S_1} ds_1 = E_1 \cdot S_1 \quad \text{et} \quad \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 \cdot 2\pi r \cdot h$$

**Ce résultat est toujours valable pour une distribution à symétrie cylindrique.**

Calcul de la charge intérieure :

A l'intérieur du cylindre chargé  $0 \leq r \leq R$  :

Distribution surfacique uniforme  $dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \iint_{\text{int}} ds \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = 0$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{int}}(r) = \vec{0}}$$

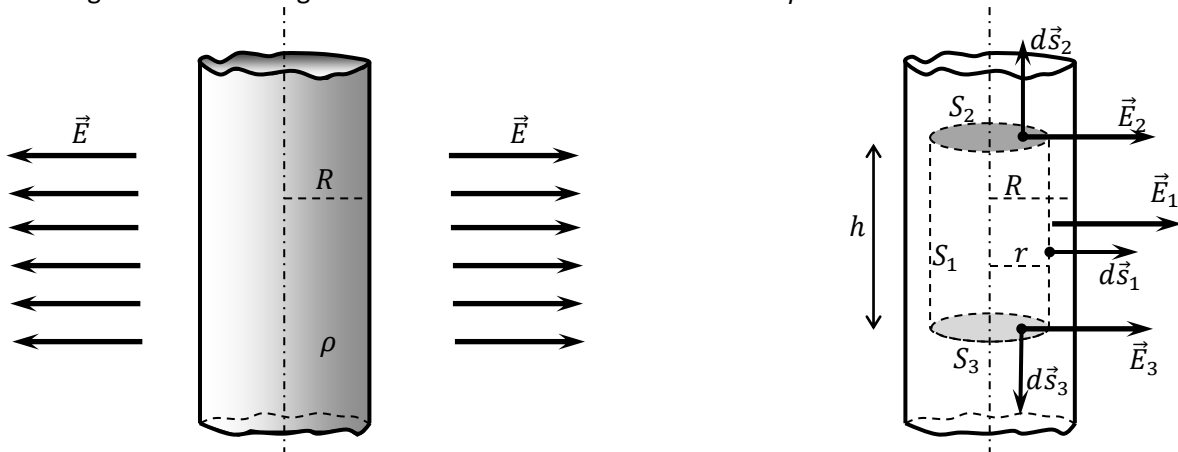
A l'extérieur du cylindre chargé  $R \leq r < +\infty$  :

Distribution surfacique uniforme  $dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \iint_{\text{int}} ds \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = Q = \sigma \cdot 2\pi R \cdot h$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\sigma \cdot 2\pi R \cdot h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma \cdot R}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_\rho}$$

4. Champ électrostatique créé en un point quelconque de l'espace par un cylindre de rayon  $R$  et de longueur infinie chargé en volume avec une densité uniforme  $\rho$ .



Théorème de Gauss : 
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : cylindrique.

Surface de Gauss : Cylindre  $S_1$  coaxial à la distribution fermé par deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

La hauteur du cylindre  $S_1$  est notée  $h$  et son rayon  $r$ ,  $r$  est aussi le rayon des deux disques  $S_2$  et  $S_3$ .

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3$$

Comme  $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$  et  $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$  alors

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s}_3 = 0$$

Et comme  $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$  et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E_1 \cdot ds_1$$

En plus, en utilisant la symétrie de translation le long de l'axe du cylindre chargé et la symétrie de rotation avec comme axe de rotation le même axe, nous trouvons que  $E_1 = \text{constante}$  sur la surface  $S_1$ . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 \iint_{S_1} ds_1 = E_1 \cdot S_1 \quad \text{et} \quad \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 \cdot 2\pi r \cdot h$$

**Ce résultat est toujours valable pour une distribution à symétrie cylindrique.**

Calcul de la charge intérieure :

A l'intérieur du cylindre chargé  $0 \leq r \leq R$  :

Distribution volumique uniforme  $dq = \rho \cdot d\tau \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \int dq = \rho \iiint_{\text{int}} d\tau \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\rho \cdot \pi r^2 \cdot h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{int}}(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \cdot \vec{e}_\rho}$$

A l'extérieur du cylindre chargé  $R \leq r < +\infty$  :

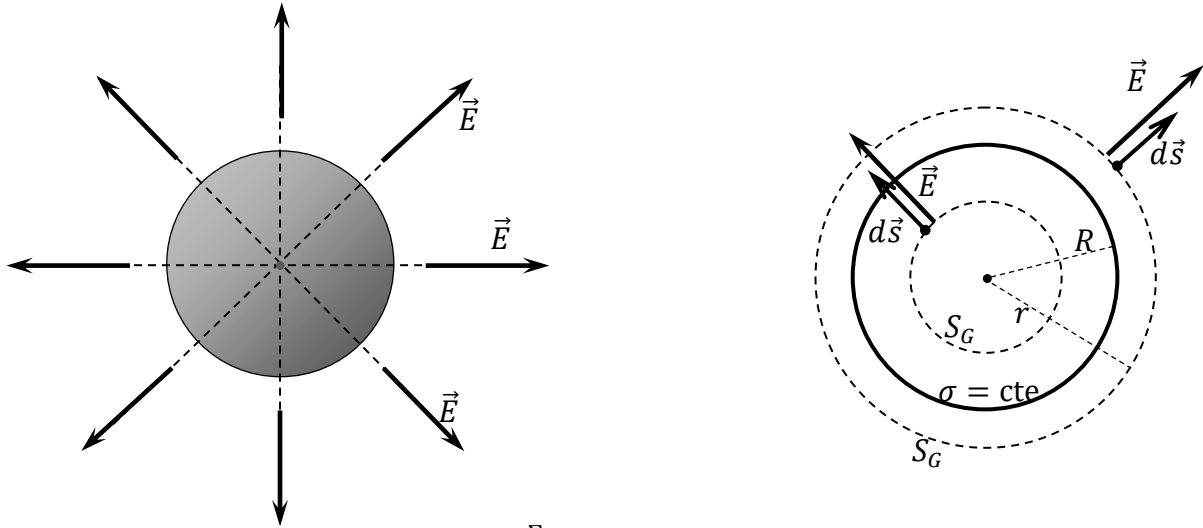
Distribution surfacique uniforme  $dq = \rho \cdot d\tau \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \int dq = \rho \iiint_{\text{int}} d\tau \Rightarrow \Sigma q_{\text{int}} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\rho \cdot \pi R^2 \cdot h}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_\rho}$$



5. Champ électrostatique créé en un point quelconque de l'espace par une sphère « creuse » chargée avec une densité surfacique uniforme  $\sigma$  (rayon  $R$ ).



Théorème de Gauss : 
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : Sphérique.

Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon  $r$ .

Comme  $\vec{E} \parallel d\vec{s}$  et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_G} E \cdot ds$$

En plus, en utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que  $E = \text{constante}$  (en module) sur la surface de Gauss  $S_G$ . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E \cdot S_G$$

Nous obtenons donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

**Ce résultat est toujours valable pour une distribution à symétrie sphérique.**

Calcul de la charge intérieure :

A l'intérieur de la sphère chargée  $0 \leq r \leq R$  :

Distribution surfacique uniforme  $dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow \sum q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \iint_{\text{int}} ds \Rightarrow \sum q_{\text{int}} = 0$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{int}}(r) = \vec{0}}$$

A l'extérieur de la sphère chargée  $R \leq r < +\infty$  :

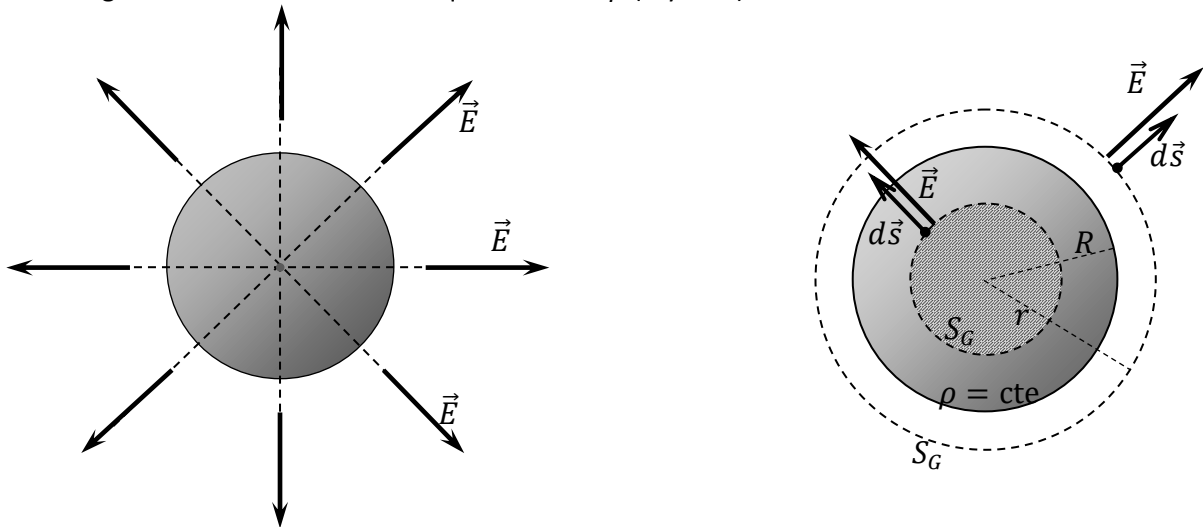
Distribution surfacique uniforme

$$dq = \sigma \cdot ds \Rightarrow \sum q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \iint_{\text{int}} ds \Rightarrow \sum q_{\text{int}} = Q = \sigma \cdot 4\pi \cdot R^2$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi \cdot R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = K \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r}$$

6. Champ électrostatique créé en un point quelconque de l'espace par une sphère « pleine » chargée avec une densité volumique uniforme  $\rho$  (rayon  $R$ ).



Théorème de Gauss : 
$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : Sphérique.

Surface de GAUSS : Sphère concentrique à la distribution de rayon  $r$ .

Comme  $\vec{E} \parallel d\vec{s}$  et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_G} E \cdot ds$$

En plus, en utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que  $E = \text{constante}$  (en module) sur la surface de Gauss  $S_G$ . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E \cdot S_G$$

Nous obtenons donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

**Ce résultat est toujours valable pour une distribution à symétrie sphérique.**

Calcul de la charge intérieure :

A l'intérieur de la sphère chargée  $0 \leq r \leq R$  :

Distribution volumique uniforme

$$dq = \rho \cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \rho \iiint_{\text{int}} d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{\rho \cdot 4\pi \cdot r^3}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{int}}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \cdot \vec{e}_r}$$

A l'extérieur de la sphère chargée  $R \leq r < +\infty$  :

Distribution surfacique uniforme

$$dq = \rho \cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = \int dq = \rho \iiint_{\text{int}} d\tau \quad \Rightarrow \quad \sum q_{\text{int}} = Q = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{\rho \cdot 4\pi \cdot R^3}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(r) = K \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r}$$

**Calcul du potentiel électrostatique  $V(r)$  dans le cas d'une symétrie sphérique.**

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dans le cas d'une symétrie sphérique  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r$  et

$$dV = -E \cdot dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(r) = - \int E(r) \cdot dr}$$

**Sphère creuse (densité surfacique uniforme  $\sigma$ )**

$$\begin{cases} E_{\text{int}} = 0 \\ E_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\text{int}} = - \int E_{\text{int}} \cdot dr \\ V_{\text{ext}} = - \int E_{\text{ext}}(r) \cdot dr \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} V_{\text{int}} = C_1 \\ V_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2 \end{cases}$$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration, que nous déterminons en utilisant les conditions limites.

- Dans le cas d'une distribution finie  $V(r \rightarrow +\infty) = 0$

$$\frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{+\infty} + C_2 = 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

- Continuité en  $r = R$ .

$$V_{\text{int}}(r = R) = V_{\text{ext}}(r = R) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \sigma \cdot R / \epsilon_0$$

Finalement

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{\sigma \cdot R}{\epsilon_0} = \text{Constante}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r}}$$

Ou

$$\boxed{V_{\text{int}} = K \frac{Q}{R} = \text{Constante}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = K \frac{Q}{r}}$$

**Sphère pleine (densité volumique uniforme  $\rho$ )**

$$\begin{cases} E_{\text{int}}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \\ E_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\text{int}} = - \int E_{\text{int}} \cdot dr \\ V_{\text{ext}} = - \int E_{\text{ext}}(r) \cdot dr \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} V_{\text{int}} = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1 \\ V_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2 \end{cases}$$

$C_1$  et  $C_2$  (constantes d'intégration) sont calculées à partir des conditions limites.

- Dans le cas d'une distribution finie  $V(r \rightarrow +\infty) = 0$

$$\frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{+\infty} + C_2 = 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

- Continuité en  $r = R$ .

$$V_{\text{int}}(r = R) = V_{\text{ext}}(r = R) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_1 = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Finalement

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (-r^2 + 3 \cdot R^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}}$$

Ou

$$\boxed{V_{\text{int}} = \frac{1}{2} K \frac{Q}{R} \left( -\frac{r^2}{R^2} + 3 \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{V_{\text{ext}}(r) = K \frac{Q}{r}}$$

**EXERCICE 03 : Dipôle électrostatique.**

1. Champ et le potentiel crée à grande distance par un dipôle électrostatique.

Potentiel crée par le dipôle

$$V(r) = V_1 + V_2 = Kq \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1}$$

Approximation dipolaire :

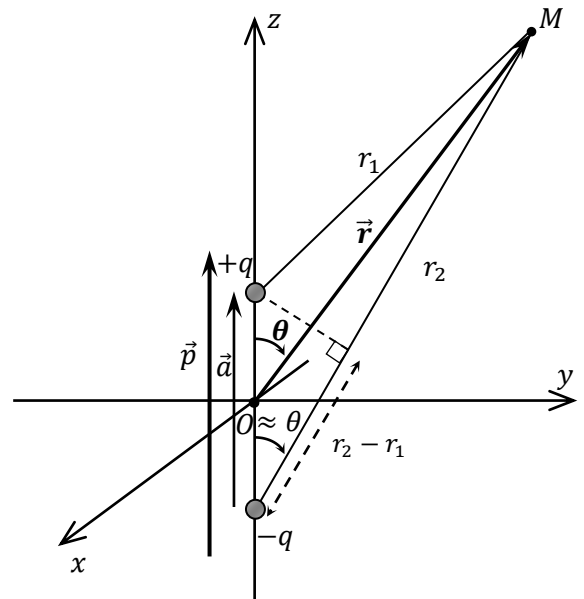
$$\begin{cases} r_2 - r_1 = a \cdot \cos \theta \\ r_2 \cdot r_1 = r^2 \end{cases}$$

Donc

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2} \quad \text{avec} \quad \theta = (\vec{p}, \vec{r})$$

Ou

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$



Champ crée par le dipôle

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

En coordonnées sphériques

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

2. On superpose un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{e}_z$  au champ du dipôle.

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{dipôle}} + \vec{E}_0 = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta + E_0 \cdot \vec{e}_z$$

Potentiel total

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_{\text{dipôle}} - \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{r}$$

Or

$$\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = \int E_0 \cdot dz = E_0 \cdot z + \text{constante}$$

Donc

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \cos \theta}{r^2} - E_0 \cdot z + \text{constante}$$

Comme  $z = r \cdot \cos \theta$ .

$$V = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} - E_0 \cdot r \right) \cos \theta + \text{constante}$$

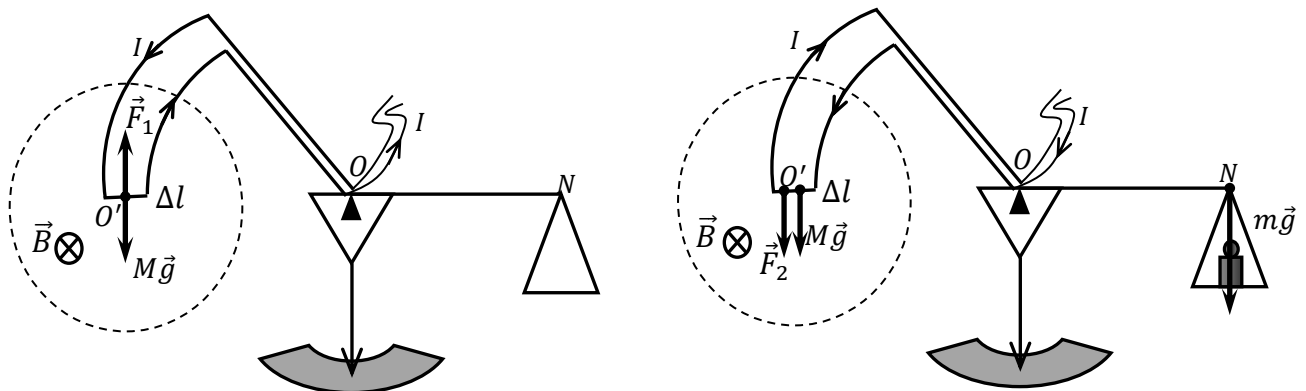
Equipotentielle sphérique : Pour  $r = r_0 = \text{Constante} \Rightarrow V = \text{Constante}$

D'où

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r_0^2} - E_0 \cdot r_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{E_0} \right)^{1/3}$$

**EXERCICE 04 : Balance de Cotton.**

L'étude expérimentale du champ magnétique créé par un solénoïde « infini » parcourue par un courant  $I_0$ , montre qu'à l'intérieur du solénoïde le champ magnétique est uniforme, et qu'il est nul à l'extérieur.



Avant la surcharge du bras (ON) : la balance est en équilibre car la force magnétique  $\vec{F}_1$  équilibre le poids  $M\vec{g}$  du bras (OO') parcouru par le courant.

$$\text{Moment}(M\vec{g}) = \text{Moment}(\vec{F}_1)$$

Donc

$$Mg \cdot OO' = F_1 \cdot OO' \quad \Rightarrow \quad Mg = F_1 = I \cdot \Delta l \cdot B \quad (\Delta \vec{l} \perp \vec{B})$$

Après inversion du courant, la force magnétique change de sens en gardant la même direction, il faut alors équilibrer la balance par une surcharge du bras (ON) . La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$\text{Moment}(M\vec{g}) + \text{Moment}(\vec{F}_2) = \text{Moment}(m\vec{g})$$

Donc

$$Mg \cdot OO' + F_2 \cdot OO' = mg \cdot ON$$

Les deux bras de la balance ayant la même longueur ( $OO' = ON$ )

$$Mg + F_2 = mg$$

Comme

$$F_2 = F_1 = I \cdot \Delta l \cdot B \quad (\Delta \vec{l} \perp \vec{B})$$

Donc

$$mg = 2I \cdot \Delta l \cdot B$$

Et le module du champ magnétique

$$B = \frac{mg}{2I \cdot \Delta l}$$

Application numérique

$$B = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Tesla} = 25 \text{ Gauss}$$

**EXERCICE 05 : Effet Hall.**

Le cuivre a une masse molaire  $M = 63,54 \text{ g}$  et une masse volumique  $\mu = 8,8 \times 10^3 \text{ Kg.m}^{-3}$ .

1. La masse d'un (01) atome de cuivre.

$$m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$$

$\mathcal{N}_A = 6,022 \ 136 \times 10^{23}$  étant le nombre d'Avogadro.

D'où, le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume.

$$N = \frac{\mu}{m} = \frac{\mu \cdot \mathcal{N}_A}{M}$$

Numériquement

$$N = 8,3403 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

2. Dans le cas où nous pouvons considérer que la densité volumique de courant est uniforme ( $\vec{j} = \text{constante}$ ) et perpendiculaire à la section du fil ( $\vec{j} \parallel d\vec{s}$ ).

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iint j \cdot ds = j \cdot S$$

Donc

$$I = nqv \cdot ab$$

Et

$$v = \frac{I}{nq \cdot ab}$$

Numériquement

$$v = 7,4937 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Avec :  $a = 10 \text{ mm}$  ;  $b = 0,1 \text{ mm}$  ;  $I = 10 \text{ A}$  et  $n = N = 8,3403 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

3. Valeur du champ magnétique  $B$ .

$$n = \frac{I \cdot B}{q \cdot \Delta V \cdot b} \Rightarrow B = \frac{nq \cdot \Delta V \cdot b}{I}$$

Numériquement

$$B = 1,006 \text{ Tesla}$$

Avec :  $\Delta V = 7,53 \text{ } \mu\text{V}$ .

4. Pour  $\Delta V = 10 \text{ } \mu\text{V}$ , la densité volumique d'électrons libres dans l'échantillon.

$$n = \frac{I \cdot B}{q \cdot \Delta V \cdot b}$$

Numériquement

$$n = 6,2802 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

**EXERCICE 06 : Champ magnétique créée par une distribution linéaire.**

**1. Champ créée par la spire carrée.**

Le champ créé par un coté du carré (segment de droite)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Puisque  $\vec{B}$  est perpendiculaire à  $d\vec{l}$  et  $\vec{r}$ , alors  $\vec{B}$  est tangent au cercle de rayon  $R$ .

$$d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = dl \cdot r \cdot \cos(\theta)$$

Paramétrage : (paramètre  $-\pi/4 \leq \theta \leq +\pi/4$ )

$$dl = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \text{et} \quad r = \frac{R}{\cos \theta}$$

D'où le module de  $\vec{B}$  est égal à l'intégrale

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos \theta \cdot d\theta \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\sqrt{2} \cdot \mu_0 I}{2\pi a}$$

Avec  $R = a/2$  la distance entre le milieu des segments et le point  $O$ .  
Finalement, le champ créée par tout le carré.

$$B_{\text{tot}} = 4B = \frac{2\sqrt{2} \cdot \mu_0 I}{\pi a}$$

**2. Dans le cas d'un polygone régulier de  $N$  cotés.**

$$-\pi/N \leq \theta \leq +\pi/N$$

Le champ magnétique créée par un seul sègment.

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_C \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot R} \int_{-\pi/N}^{+\pi/N} \cos \theta \cdot d\theta \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

Et le champ magnétique total.

$$B_{\text{tot}} = NB = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{N}{\pi}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

$\vec{B}_{\text{tot}}$  est perpendiculaire à la surface du polygone. Son sens est donné par la Règle de la Main Droite appliquée au sens du courant.

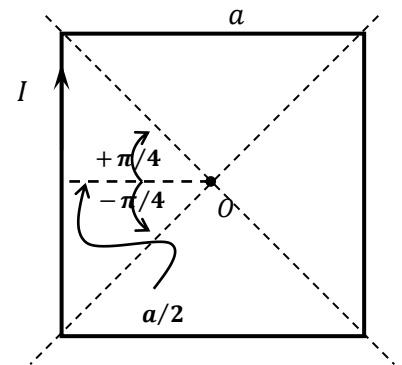
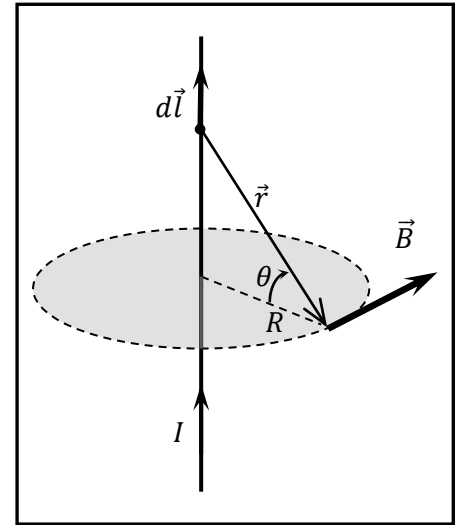
**3. Dans le cas où  $N \rightarrow +\infty$ .**

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (B_{\text{tot}}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{N}{\pi}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_0 I \sin(x)}{2R x} \right)$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (B_{\text{tot}}) = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

**C'est le champ magnétique créée par une spire circulaire en son centre.**



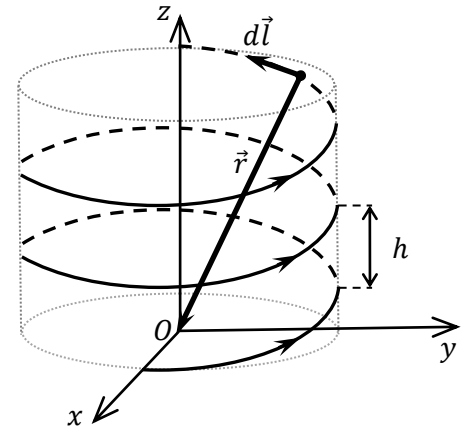
**EXERCICE 07 : Champ magnétique créée par une distribution linéaire de courant.**

Une hélice de rayon  $R$  et de pas  $h$  a pour équation paramétrique dans un repère orthonormé :

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos \varphi \\ y = R \cdot \sin \varphi \\ z = h \cdot \varphi / \pi \end{cases}$$

Où le paramètre  $\varphi$  varie de  $+\infty$  à  $-\infty$ .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



1. En coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = R \cdot \cos \varphi \\ y = R \cdot \sin \varphi \\ z = h \cdot \varphi / 2\pi \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \rho = R = \text{constante} \\ \varphi = \varphi \\ z = h \cdot \varphi / 2\pi \end{cases}$$

$$d\vec{l} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z = \{R \cdot \vec{e}_\varphi + (h/2\pi) \cdot \vec{e}_z\} \cdot d\varphi$$

Le vecteur  $\vec{r}$  étant orienté de  $d\vec{l}$  vers le point  $O$ .

$$\vec{r} = -\vec{OM} = -(\rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z) \Rightarrow \vec{r} = -(R \cdot \vec{e}_\rho + (h \cdot \varphi / 2\pi) \cdot \vec{e}_z)$$

Et son module

$$r = \sqrt{R^2 + (h \cdot \varphi / 2\pi)^2}$$

Donc

$$d\vec{l} \times \vec{r} = -d\varphi \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ 0 & R & h/2\pi \\ R & 0 & h \cdot \varphi / 2\pi \end{vmatrix} = -d\varphi \begin{pmatrix} Rh \cdot \varphi / 2\pi \\ Rh / 2\pi \\ -R^2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$B_\rho = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot Rh}{4\pi \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi}{(R^2 + h^2 \cdot \varphi^2 / 4\pi^2)^{3/2}} d\varphi$$

$$B_\rho = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot h}{8\pi^2 \cdot R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi}{(1 + h^2 \cdot \varphi^2 / 4\pi^2 R^2)^{3/2}} d\varphi$$

Changement de variable

$$\begin{cases} u = h \cdot \varphi / 2\pi R \\ du = (h/2\pi R) \cdot d\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = (2\pi R/h) \cdot u \\ d\varphi = (2\pi R/h) \cdot du \end{cases}$$

D'où

$$B_\rho = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(1 + u^2)^{3/2}} du = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \frac{1}{h} [(1 + u^2)^{-1/2}]_{-\infty}^{+\infty} \Rightarrow \boxed{B_\rho = 0}$$



$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 \cdot I R h}{4\pi \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(R^2 + h^2 \cdot \varphi^2 / 4\pi^2)^{3/2}} d\varphi$$

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 \cdot I h}{8\pi^2 R^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + h^2 \cdot \varphi^2 / 4\pi^2 R^2)^{3/2}} d\varphi$$

Changement de variable

$$\begin{cases} u = h \cdot \varphi / 2\pi R \\ du = (h/2\pi R) \cdot d\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = (2\pi R/h) \cdot u \\ d\varphi = (2\pi R/h) \cdot du \end{cases}$$

D'où

$$B_\varphi = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} du$$

On fait encore le changement de variable

$$u = \tan \theta \quad ; \quad 1 + u^2 = 1/\cos^2 \theta \quad \text{et} \quad du = (1/\cos^2 \theta) \cdot d\theta$$

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} du = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1/\cos^2 \theta}{(1/\cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta = [\sin \theta]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 2$$

Finalement

$$\boxed{B_\varphi = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot R}}$$

La dernière composante

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(R^2 + h^2 \cdot \varphi^2 / 4\pi^2)^{3/2}} d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + h^2 \cdot \varphi^2 / 4\pi^2 R^2)^{3/2}} d\varphi$$

Changement de variable

$$\begin{cases} u = h \cdot \varphi / 2\pi R \\ du = (h/2\pi R) \cdot d\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = (2\pi R/h) \cdot u \\ d\varphi = (2\pi R/h) \cdot du \end{cases}$$

D'où

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} du$$

Comme l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^{3/2}} du = 2$$

Nous avons

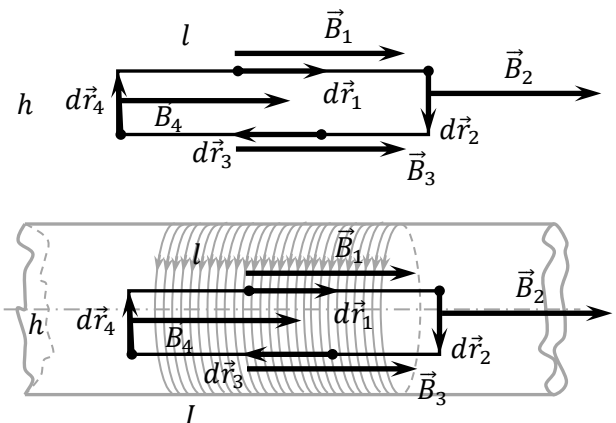
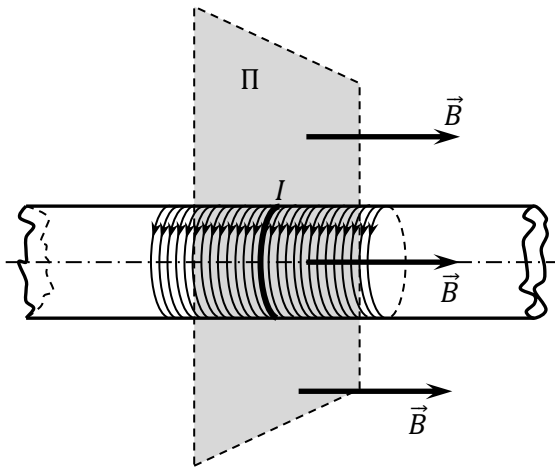
$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{h}}$$

2. Pour  $h \ll R$  l'hélice devient un solénoïde infini tel que le nombre de spires par unité de longueur

$$n = 1/h \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_z \cdot \vec{e}_z = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{e}_z$$

**EXERCICE 08 : Théorème d’Ampère. Distribution linéaire.**

**Solénoïde de longueur infinie.**



Théorème d’Ampère (forme intégrale) :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}}$$

Tout d’abord nous devons choisir la boucle qui respecte la symétrie du champ magnétique pour simplifier le calcul de la circulation dans le théorème d’Ampère. Pour cela, cherchons les plans de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie.

Tous les plans perpendiculaires à l’axe du solénoïde (cylindre) sont des plans de symétrie (voir la figure ci-dessus à gauche), le champ magnétique est perpendiculaire en tout point à ces plan, donc  $\vec{B}$  est parallèle à l’axe du solénoïde.

La boucle que nous choisissons pour calculer la circulation est une boucle rectangulaire dont deux côtés sont parallèles à l’axe du solénoïde ( $l_1 = l_3 = l$ ) et deux côtés qui sont perpendiculaires ( $l_2 = l_4 = h$ ), comme le montre la figure en haut à droite.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{l_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{l_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_{l_3} \vec{B}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \int_{l_4} \vec{B}_4 \cdot d\vec{r}_4$$

Comme

$$\vec{B}_2 \perp d\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{B}_4 \perp d\vec{r}_4 \quad \Rightarrow \quad \int_{l_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \int_{l_4} \vec{B}_4 \cdot d\vec{r}_4 = 0$$

Et

$$\vec{B}_1 \parallel d\vec{r}_1 \text{ (même sens)} \quad \Rightarrow \quad \int_{l_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \int_{l_1} B_1 \cdot dr_1$$

$$\vec{B}_3 \parallel d\vec{r}_3 \text{ (sens opposés)} \quad \Rightarrow \quad \int_{l_3} \vec{B}_3 \cdot d\vec{r}_3 = - \int_{l_3} B_3 \cdot dr_3$$

D’où

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{l_1} B_1 \cdot dr_1 - \int_{l_3} B_3 \cdot dr_3$$

En plus, si nous utilisons la symétrie de translation le long de l’axe du solénoïde :

$\vec{B}_1$  est constant sur  $l_1$  ( $B_1 = \text{constante}$ ) et  $\vec{B}_3$  est constant sur  $l_3$  ( $B_3 = \text{constante}$ ).

Donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B_1 \int_{l_1} dr_1 - B_3 \int_{l_3} dr_3 = (B_1 - B_3) \cdot l$$

D'où le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = (B_1 - B_3) \cdot l = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}}$$

Champ magnétique à l'extérieur du solénoïde : (nous plaçons la boucle à l'extérieur du solénoïde)

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \Rightarrow (B_1 - B_3) \cdot l = 0 \quad \text{donc} \quad B_1 = B_3 \quad \text{et} \quad B_{\text{ext}} = \text{constante}$$

Si nous prenons  $B_{\text{ext}}(\infty) = 0$ , alors

$$\boxed{B_{\text{ext}} = 0}$$

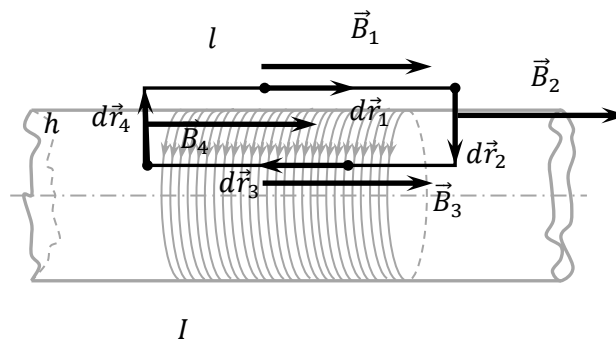
Champ magnétique à l'intérieur du solénoïde : (nous plaçons la boucle à l'intérieur du solénoïde)

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \Rightarrow (B_1 - B_3) \cdot l = 0 \quad \text{donc} \quad B_1 = B_3 \quad \text{et} \quad B_{\text{int}} = \text{constante}$$

Pour calculer la valeur de  $B_{\text{int}}$  nous plaçons la boucle à cheval entre la zone intérieure et la zone extérieure du solénoïde.

$$\sum I_{\text{int}} = -NI \Rightarrow (B_{\text{ext}} - B_{\text{int}}) \cdot l = -\mu_0 \cdot NI \quad \text{donc} \quad B_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$N$  est le nombre de spires qui traverse la boucle  $C$ . Le signe  $(-)$  est dû au fait que le courant de chaque spire traverse la boucle dans le sens opposé au sens donné par la règle de la main droite (voir la figure) comme énoncé dans le théorème d'Ampère.



On pose  $N/l = n$  est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde.  $n$  doit être constant pour utiliser la symétrie dans le théorème d'Ampère.

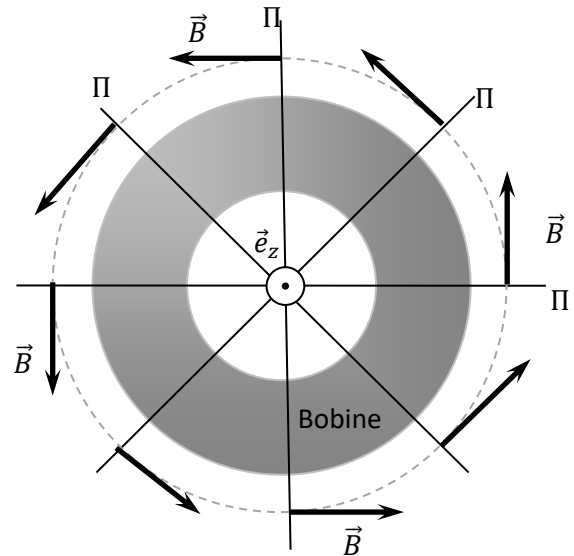
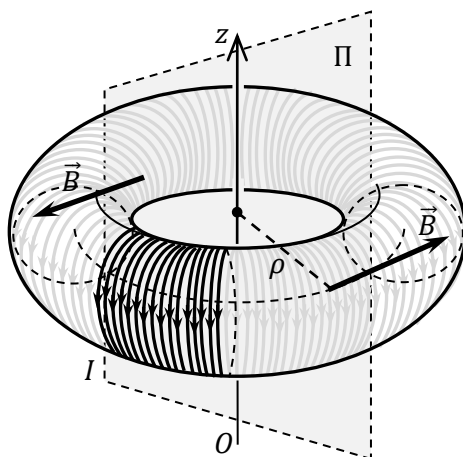
Donc au final nous avons

$$\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 \cdot nI \cdot \vec{e}_z}$$

En accord avec la limite de l'exercice précédent.

$\vec{e}_z$  étant le vecteur unitaire dans la direction de l'axe du solénoïde, son sens est donné par le pouce de la main droite en suivant la courant avec les autres doigts de la main (règle de la main droite).

**Bobine torique.**



Théorème d'Ampère (forme intégrale) :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}}$$

Tout d'abord nous devons choisir la boucle qui respecte la symétrie du champ magnétique pour simplifier le calcul de la circulation dans le théorème d'Ampère. Pour cela, cherchons les plans de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie.

Tous les plans perpendiculaires contenant l'axe (Oz) (axe de la bobine) sont des plans de symétrie (voir la figure ci-dessus), le champ magnétique est perpendiculaire en tout point à ces plan, donc  $\vec{B}$  est parallèle à la direction transversale  $\vec{e}_\varphi$  en coordonnées cylindriques.

La boucle que nous choisissons pour calculer la circulation est une boucle circulaire de rayon  $\rho$  placée dans un plan parallèle au plan (OXY) et centrée sur l'axe de la bobine. Dans ce cas

$$d\vec{r} = \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{B} = B \cdot \vec{e}_\varphi \quad (\vec{B} \parallel d\vec{r})$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_C B \cdot \rho \cdot d\varphi \quad \text{avec} \quad \rho = \text{constante}$$

En plus, si nous utilisons la symétrie de rotation autour de l'axe de la bobine,  $B$  est constant en module sur  $C$  ( $B = \text{constante}$ ). D'où le théorème d'Ampère s'écrit

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi\rho \cdot B = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}}$$

*Champ magnétique à l'extérieur de la bobine :* (nous plaçons la boucle à l'extérieur de la bobine)

$$\sum I_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho \cdot B = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{B_{\text{ext}} = 0}$$

*Champ magnétique à l'intérieur de la bobine :* (nous plaçons la boucle à l'intérieur de la bobine)

$$\sum I_{\text{int}} = \mu_0 \cdot NI \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho \cdot B = \mu_0 \cdot NI \quad \text{donc} \quad \boxed{B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi \rho}}$$

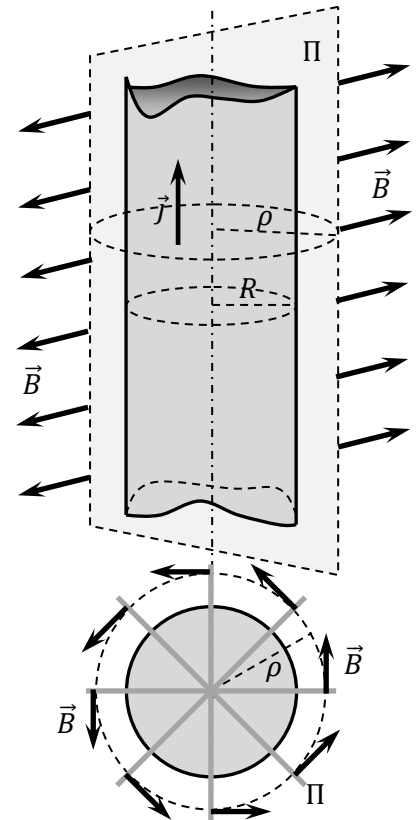
$N$  est le nombre de spires dans la bobine (les spires doivent être jointives et de densité uniforme pour garder la symétrie).

**EXERCICE 09 : Théorème d'Ampère. Distribution volumique.**

**1. Conducteur cylindrique droit de longueur infinie.**

Tous les plans contenant l'axe de symétrie du cylindre sont des plans de symétrie.

Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie, alors, le champ magnétique créé par cette distribution de courant tangent au cercle de rayon  $\rho$  centré sur le fil droit (symétrie cylindrique).



$$\vec{B} = B_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

En utilisant le théorème d'ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}}$$

Nous devons choisir la boucle qui respecte la symétrie du champ magnétique. ( $\vec{B} = B_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ )

Dans notre cas cette boucle est un cercle de rayon ( $\rho = \text{constante}$ ) centrée sur l'axe des cylindres et contenue dans un plan perpendiculaire à cet axe. Le sens de parcours (intégrale) sur la boucle est le sens trigonométrique (suivant  $\vec{e}_\varphi$ ).

Nous utilisons donc les coordonnées cylindriques

$$d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$$

Et

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_C (B_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot (d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z) = \rho \int_0^{2\pi} B_\varphi \cdot d\varphi$$

$\rho$  étant le rayon constant du cercle.

En plus, si nous utilisons la symétrie de rotation autour de l'axe du courant :  $B_\varphi$  est constant sur  $C$ .  
Donc

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \rho \cdot B_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho \cdot B_\varphi}$$

Calcul des courants à l'intérieur de la boucle fermée d'Ampère.

Zone 01 : A l'intérieur du conducteur  $0 \leq \rho \leq R$

Comme  $\vec{j} \parallel d\vec{s}$  et  $j = \text{constante}$ .

$$\begin{aligned} \sum I_{\text{int}} &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iint j \cdot ds \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = j \cdot S_{\text{int}} = j \cdot \pi\rho^2 \\ 2\pi\rho \cdot B_\varphi &= j \cdot \pi\rho^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \frac{\mu_0 j}{2} \rho \cdot \vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

Zone 01 : A l'extérieur du conducteur  $R \leq \rho < +\infty$

$$\begin{aligned} \sum I_{\text{int}} &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iint j \cdot ds \quad \Rightarrow \quad \sum I_{\text{int}} = j \cdot S_{\text{int}} = j \cdot \pi R^2 \\ 2\pi\rho \cdot B_\varphi &= j \cdot \pi R^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 j \cdot R^2}{2\rho} \cdot \vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

Ou

$$\sum I_{\text{int}} = I \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho \cdot B_\varphi = \mu_0 I \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi}$$

**Câble coaxial.**

2. Tous les plans contenant l'axe de symétrie du cylindre sont des plans de symétrie.

Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie étant toujours perpendiculaire au plan de symétrie, alors, le champ magnétique créée par cette distribution de courant tangent au cercle de rayon  $\rho$  centré sur le fil droit (symétrie cylindrique).

$$\vec{B} = B_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

3. En utilisant le théorème d'ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{int}}$$

La symétrie cylindrique implique (voir la question 1.)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi\rho \cdot B_\varphi$$

La boucle  $C$  est un cercle de rayon ( $\rho = \text{constante}$ ) centrée sur l'axe des cylindres et contenue dans un plan perpendiculaire à cet axe. Le sens de parcours (intégrale) sur la boucle est le sens trigonométrique (suivant  $\vec{e}_\varphi$ ).

Calcul des courants à l'intérieur de la boucle fermée d'Ampère.

Calculons d'abord  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$  (constants).

$$I = \iint \vec{j}_1 \cdot d\vec{s} = \iint (j_1 \cdot \vec{e}_z) \cdot (ds \cdot \vec{e}_z) \Rightarrow I = j_1 \iint ds = j_1 \cdot S_1$$

$S_1$  est la section du cylindre de rayon  $R_1$ . Donc

$$j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{I}{\pi \cdot R_1^2}$$

De la même manière

$$-I = \iint \vec{j}_2 \cdot d\vec{s} = \iint (j_2 \cdot \vec{e}_z) \cdot (ds \cdot \vec{e}_z) \Rightarrow -I = j_2 \iint ds = j_2 \cdot S_2$$

$S_2$  est la section de la couche cylindrique de rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ . Donc

$$j_2 = -\frac{I}{S_2} = -\frac{I}{\pi \cdot (R_3^2 - R_2^2)}$$

Zone 01 :  $0 \leq \rho \leq R_1$

$$\sum I_{\text{int}} = \iint \vec{j}_1 \cdot d\vec{s} = \iint j_1 \cdot ds \Rightarrow \sum I_{\text{int}} = j_1 \cdot S_{\text{int}} = \frac{I}{\pi \cdot R_1^2} \pi \cdot \rho^2$$

$$2\pi\rho \cdot B_\varphi = \mu_0 I \frac{\rho^2}{R_1^2} \quad \text{donc} \quad \vec{B}_{\varphi 1} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R_1^2} \vec{e}_\varphi$$

Zone 02 :  $R_1 \leq \rho \leq R_2$

$$\sum I_{\text{int}} = I \Rightarrow 2\pi\rho \cdot B_\varphi = \mu_0 I \quad \text{donc} \quad \vec{B}_{\varphi 2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

Zone 03 :  $R_2 \leq \rho \leq R_3$

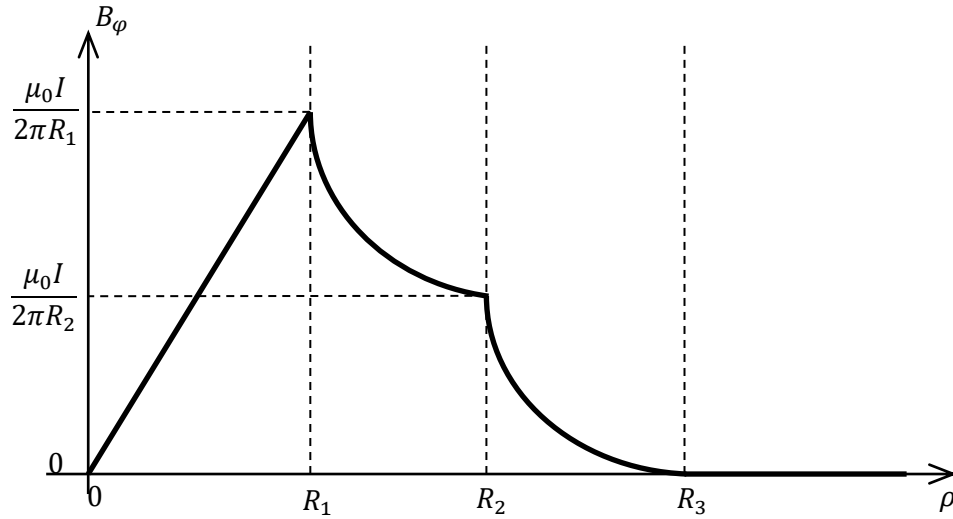
$$\sum I_{\text{int}} = I + \iint \vec{j}_2 \cdot d\vec{s} = I + \iint j_2 \cdot ds \Rightarrow \sum I_{\text{int}} = I - \frac{I}{\pi \cdot (R_3^2 - R_2^2)} \pi \cdot (\rho^2 - R_2^2)$$

$$2\pi\rho \cdot B_\varphi = \mu_0 I \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad \text{donc} \quad \vec{B}_{\varphi 3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \left( \frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \vec{e}_\varphi$$

Zone 04 :  $R_3 \leq \rho < +\infty$

$$\sum I_{\text{int}} = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\rho \cdot B_\varphi = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}_{\varphi 4} = 0 \cdot \vec{e}_\varphi}$$

#### 4. Représentation



La composante  $B_\varphi$  est continue en tout point de l'espace.