SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 02
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

EXERCICE 01 : ***Densités de courant $\vec{j}_D$ et $\vec{j}$ dans le vide, autours d'une sphère radioactive*.**

Une source radioactive de forme sphérique de centre O et de rayon a très petit, émet de *façon isotrope*, dans l'espace vide, des noyaux d'hélium (particules de charges positive $+2e$). On donne la loi d'évolution $q(r,t)$ de la charge électrique totale à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon r $(r \gg a)$.

1. Exprimez les champs électrique $\vec{E}(r,t)$ et magnétique $\vec{B}(r,t)$ aux points M du vide $(OM = r)$ à l'instant t.
2. Exprimez en M, à l'instant t, le vecteur densité de courant de déplacement $\vec{j}_D(r,t)$ et le vecteur densité de courant de conduction $\vec{j}(r,t)$ lié au mouvement des particules α radioactives.
3. Comparez $\vec{j}_D(r,t)$ et $\vec{j}(r,t)$ et décrire l'équation de Maxwell–Ampère en tout point M autour de la source radioactive.

EXERCICE 02 (*) : ***Propagation des potentiels scalaire et vecteur de l'onde plane.***

1. Justifiez, à partir des équations de Maxwell, que le champ électromagnétique dérive des potentiels vecteur $\vec{A}$ et scalaire V par les relations :
$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
2. Montrez que le choix des potentiels $\vec{A}$ et V n'est pas unique.
3. Déterminez la condition de jauge de Lorentz (relation entre $\vec{A}$ et V) qui permet d'écrire dans le vide *dépourvu de charges et de courants*, les équations de propagation des potentiels sous les formes :
$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$
c désignant la célérité de la lumière dans le vide.
4. Vérifiez que ces « équations de propagation » restent vraies si on adopte la condition de jauge Coulomb.
$$div(\vec{A}) = 0 \quad \text{et} \quad V = 0$$
On considère une onde plane progressive électromagnétique qui se propage dans le vide suivant la direction (Oz), de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, dans le sens des z croissants.
Les composantes de $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ ne dépendent que de z et du temps t.
5. Avec la condition de jauge de Lorentz, déterminez les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction de c et des dérivées des composantes A_x et A_y par rapport à la variable $(u = z - ct)$.
6. Retrouvez ainsi que l'onde plane progressive est transversale et que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.

EXERCICE 03 (*) : *Analyse en série de Fourier du champ E d'une onde électromagnétique*.

On admettra le théorème de Fourier : toute fonction périodique $f(t)$ de période $T = 2\pi/\omega$ peut être décomposée en une somme de fonctions harmoniques de périodes $T, T/2, T/3$, ...

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.\cos(n.\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.\sin(n.\omega t)$$

$$\text{Avec} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t).\cos(n.\omega t)\,.dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t).\sin(n.\omega t)\,.dt \end{cases} \quad \text{et} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Déterminez le développement en série de Fourier :

1. Du champ électrique $E(t)$d'une onde électromagnétique de période T, définie en $z = 0$ à l'instant t , en tout point du plan d'onde par :
$$\begin{cases} E = E_0 \\ E = -E_0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} m.T < t < (m+1/2).T \\ (m+1/2).T < t < (m+1).T \end{matrix}$$
Où E_0 est une constante et m un entier naturel.

2. Du champ magnétique $B(x)$ d'une onde électromagnétique, de longueur d'onde λ $(k = 2\pi/\lambda)$, dont le profil est :
$$\begin{cases} B = B_0.\sin(k.x) \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} m.\lambda < x < (m+1/2).\lambda \\ (m+1/2).\lambda < x < (m+1).\lambda \end{matrix}$$

EXERCICE 04 : *Onde plane progressive monochromatique électromagnétique.*

Une onde plane progressive monochromatique électromagnétique se propage dans le vide en abscence de charge et de courants. Le champ électrique (en notation complexe) $\underline{\vec{E}}$ de cette onde plane est donné par la relation :

$$\underline{\vec{E}} = E_0.\exp\left[i\left(\vec{k}\bullet\vec{r} - \omega t\right)\right].\vec{e}_x$$

1. Montrer, qu'en notation complexe, on peut écrire $\vec{\nabla} \equiv i\vec{k}$ et $\partial/\partial t \equiv -i\omega$.
2. En utilisant les équations de Maxwell dans le vide (en absence de charges et de courants), montrer que le vecteur d'onde $\vec{k}$ est perpendiculaire au champ électrique.
3. Quel est dans ce cas le plan de propagation de cette onde ?
4. Si la longueur d'onde $\lambda = 4\pi\, m$, calculer la fréquence et la pulsation de l'onde électromagnétique.
5. Quelle est l'état de polarisation de l'onde ?
6. On sait que la direction de propagation fait un angle $\theta = 30°$ avec l'axe (Oy). Trouver, alors, les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$ et du vecteur unitaire $\vec{n}$ donnant la direction de propagation.
7. En déduire l'expression complexe du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$.
8. En utilisant l'équation de jauge de Lorentz et les équations de Maxwell dans le vide, montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}$ obéit aussi à l'équation de propagation de D'Alembert.

EXERCICE 05 : ***Champs et énergie d'une onde plane progressive*.**

Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale de pulsation ω, se propage dans le vide dans la direction (du plan (Oxy)) faisant l'angle θ avec l'axe (Ox). Le champ électrique $\vec{E}$ de cette onde plane polarisé rectilignement suivant la direction (Oz) de vecteur unitaire $\vec{e}_z$, s'écrit en notation complexe au point $M(x, y, z)$ à l'instant t :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 . \exp[i(ax + by - \omega t)] . \vec{e}_z$$

1.
   a. Etablir l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ dans le vide.
   b. En déduire la relation qui lie a, b, ω et c.
   c. Que représentent les coefficients a et b ? Déterminez en fonction de a et b, la longueur d'onde λ et la direction θ de propagation de l'onde.
2.
   a. Exprimez le vecteur champ magnétique $\vec{B}(x, y, t)$ de l'onde étudiée. Que peut on dire des directions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en chaque point ?
   b. Calculez l'impédance caractéristique du vide Z_0 définie par le rapport des amplitudes du champ $\vec{E}$ et de l'excitation magnétique $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ de l'onde dans le vide.
3.
   a. Déterminez les composantes du vecteur de Poynting $\vec{P}(x, y, t)$ et la valeur moyenne du module de $\vec{P}$ dans le temps.
   b. Calculez la valeur moyenne $\langle \mathcal{E}_{\text{ém}} \rangle$ dans le temps de la densité volumique d'énergie électromagnétique, en fonction de E_0 , c et μ_0.
4. Déduire des résultats obtenus à la question 3. La vitesse V_e de propagation de l'énergie.
5. Caculez les amplitudes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'un faisceau laser, de section circulaire et de diamètre $d = 2\ mm$, dont la puissance transportée est $\mathcal{P} = 1{,}6\ kW$.

EXERCICE 06 (*) : ***Champs et énergie d'une onde plane progressive*.**

Une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique se propage dans le vide dépourvus de charges et de courants. Le vecteur champ électrique de cette onde est donné par :

$$\vec{E} = E_0 . \cos\alpha . \cos(ky - \omega t) . \vec{e}_x - E_0 . \sin\alpha . \sin(ky - \omega t) . \vec{e}_z$$

k est le module du vecteur d'onde et α est une constante réelle.

1. Quelle est la direction de propagation de cette onde ? (vecteur unitaire suivant cette direction).
2. Discuter suivant les valeurs de α l'état de polarisation de cette onde.
3. Ecrire l'expression du champ électrique associé à cette onde en notation complexe.
4. Calculer l'expression du champ magnétique associé à cette onde et notation réelle $\vec{B}$, en déduire le champ magnétique en notation complexe.
5. Trouver l'expression du vecteur de Poynting $\vec{P}$ associé à cette onde. En déduire sa valeur moyenne $\langle \vec{P} \rangle$.
6. On donne la puissance moyenne incidente $\langle \mathcal{P} \rangle = 25\ watt$ de cette onde sur une surface circulaire d'un diamètre $d = 5\ cm$. Quelle est l'amplitude E_0 du champ électrique et B_0 du champ magnétique associé à cette onde ?

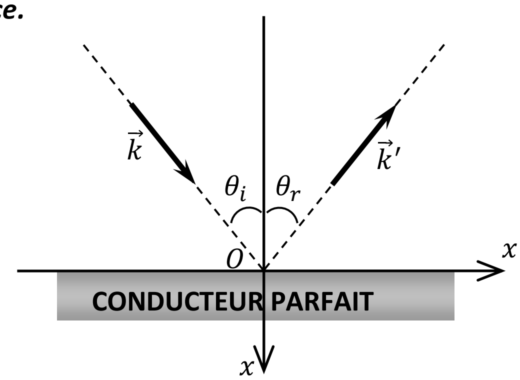
EXERCICE 07 : ***Réflexion d'une OPPM sur une surface conductrice.***

Une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ se propage dans le vide dépourvus de charges et de courants. Cette onde est polarisé circulairement dans le sens trigonométrique (gauche) elle a une amplitude E_0 et se propage suivant l'axe (Ox) dans le sens des x positifs, sa pulsation est notée ω et son vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$.

1. Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_1$ en notation réelle puis en notation complexe.
2. Calculer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ associé à cette onde en notation réelle puis en notation complexe.
3. Montrer que le vecteur de Poynting $\vec{P}_1$ de cette onde est constant.

   Cette onde ***se réfléchit*** normalement au point O $(x = 0)$ sur la surface d'un conducteur parfait.
4. En écrivant la continuité de la composante tangentielle du champ électrique au point O sous la forme $\vec{E}_1(x = 0) + \vec{E}_2(x = 0) = \vec{0}$. Trouver l'expression du champ électrique $\vec{E}_2$ associé à l'onde réfléchie, en notation réelle et en notation complexe (on admet que la longueur d'onde λ reste constante).
5. Quelle est l'état de polarisation de l'onde réfléchie ?
6. Quelle est l'expression du champ magnétique $\vec{B}_2$ associé à l'onde réfléchie, en notation réelle et en notation complexe ?
7. Déterminer le champ électrique et magnétique de l'onde ***résultante*** $(\vec{E}, \vec{B})$ en notation complexe, puis en notation réelle. Quelle est la nature de cette onde ?
8. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{P}$ de l'onde résultante. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 08 **(*)** : ***Réflexion d'une OPPM sur une surface conductrice.***



Une onde électromagnétique plane progressive et monochromatique se propage dans le vide dépourvus de charges et de courants. Le vecteur d'onde de cette onde est donné par

$$\vec{k} = k.(\cos\theta\,.\vec{e}_x + \sin\theta\,.\vec{e}_y)$$

k est le module du vecteur d'onde.

Cette onde se réfléchit sur la surface d'un conducteur plan parfait perpendiculaire à l'axe (Ox) comme le montre la figure ci-contre. L'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion $(\theta_i = \theta_r = \theta)$.

1. Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}'$ de l'onde réfléchie, en considérant que la longueur d'onde λ reste constante.
2. L'onde incidente étant polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_z$ et ayant une amplitude E_0. Ecrire l'expression du champ électrique associé à cette onde en notation complexe $\underline{\vec{E}_i}$.
3. L'onde réfléchie étant supposée polarisée rectilignement suivant $\vec{e}_z$ et ayant une amplitude E_0'. Ecrire l'expression du champ électrique associé à cette onde en notation complexe $\underline{\vec{E}_r}$.
4. En écrivant la continuité de la composante tangentielle du champ électrique au point $O(0,0)$ sous la forme $\underline{\vec{E}_i}(x = 0, y = 0) + \underline{\vec{E}_r}(x = 0, y = 0) = \vec{0}$. Trouver la relation entre E_0 et E_0'.
5. Calculer la résultante du champ électrique en un point $M(x, y)$ en notation complexe $\underline{\vec{E}}(x, y)$ et réelle $\vec{E}(x, y)$.
6. Calculer les expressions $\underline{\vec{B}_i}$ et $\underline{\vec{B}_r}$ des champs magnétiques associés aux ondes incidente et réfléchie en notation complexe.
7. En déduire la résultante du champ magnétique en un point $M(x, y)$ en notation complexe $\underline{\vec{B}}(x, y)$ et réelle $\vec{B}(x, y)$.
8. Quelle est la structure de l'onde électromagnétique résultante.

EXERCICE 09 : ***Etat de polarisation d'une onde*.**

Décrivez l'état de polarisation de chacune des ondes suivantes :

a. $\vec{E}_0 = E_0.\cos\alpha\,.\cos(\omega t - kx)\,.\vec{e}_y + E_0.\sin\alpha\,.\cos(\omega t - kx)\,.\vec{e}_z$

b. $\vec{E}_1 = E_1.\cos\omega.\left(t - \frac{z}{c}\right).\vec{e}_x + E_1.\sin\omega.\left(t - \frac{z}{c}\right).\vec{e}_y$

c. $\vec{E}_2 = E_2.\cos\omega.\left(t - \frac{z}{c}\right).\vec{e}_x - E_2.\sin\omega.\left(t - \frac{z}{c}\right).\vec{e}_y$

d. Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ si on suppose que $E_1 = E_2$.

EXERCICE 10 : ***Etat de polarisation d'une onde*.**

On considère une onde plane progressive et monochromatique, de pulsation ω, de direction de propagation $\vec{e}_x$. Elle est polarisée circulairement dans le sens direct (gauche).

1. Ecrire l'expression du champ électrique (en notation réelle et complexe).
2. Quelle est l'expression du champ magnétique.
3. Calculez le vecteur de Poynting. Montrez qu'il est indépendant du temps.

EXERCICE 11 : ***Superposition de deux ondes de direction opposées. Onde stationnaire*.**

Deux ondes planes de même fréquence, polarisées rectilignement, se propagent dans le vide en sens inverse suivant la direction (Ox); les champs électriques de ces deux ondes sont, en notation complexe, en un point $M(x,y,z)$ à l'instant t :

$$\underline{\vec{E}_1} = E_0.e^{i(kx-\omega t)}.\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}_2} = -E_0.e^{i(kx+\omega t)}.\vec{e}_y$$

E_0 est un réel positif.

1. Exprimez les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ de l'onde résultante en M, à l'instant t.
2. Exprimez en fonction de E_0, c, k et x, les amplitudes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en M.
3. Trouvez les abscisses x des plans nodaux et ventraux des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
4. En déduire le déphasage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

EXERCICE 12 (*) : ***Superposition de deux ondes de direction opposées*.**

Deux ondes planes de même fréquence, polarisées rectilignement, se propagent dans le vide en sens inverse suivant la direction (Ox) ; les champs électriques de ces deux ondes sont, en notation complexe, en un point $M(x,y,z)$ à l'instant t :

$$\underline{\vec{E}_1} = E_0.e^{i(\omega t-kx)}.\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}_2} = \alpha E_0.e^{i(\omega t+kx)}.\vec{e}_y$$

E_0 et α sont des réels positifs.

1. Exprimer les champs $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$ de l'onde résultante en M, à l'instant t.
2. Exprimer en fonction de E_0, α, k et x, l'amplitude complexe $\underline{\vec{E}_0}$ du champ $\underline{\vec{E}}$ en M.
3. En déduire que l'amplitude réelle du champ $\vec{E}$ est donnée par : $E = E_0\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha.\cos(2kx)}$
4. Déterminer les positions des plans d'ondes où l'amplitude de $\vec{E}$ est maximale et les positions des plans d'ondes où l'amplitude de $\vec{E}$ est minimale.
5. On appelle taux d'onde stationnaire le rapport $S = E_{\max}/E_{\min}$ des amplitudes maximales et minimale de $\vec{E}$. Calculer S en fonction de α.

EXERCICE 13 : ***Capteur rectangulaire d'ondes électromagnétiques planes*.**

Un cadre rectangulaire, de dimensions $a = 1{,}25\ m$ et $b = 0{,}8\ m$, formé de $N = 50$ spires conductrices, est placé dans le plan (Oxy) à la distance $d = 100\ km$ d'une source S émettrice d'ondes électromagnétiques de longueur d'onde $\lambda = 25\ m$ et de puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = 500\ W$.
Ce cadre est disposé normalement au champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde électromagnétique supposée plane (au voisinage du cadre) polarisée rectilignement, de champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 . \exp(-i\omega . t) . \vec{e}_y \qquad \text{en} \qquad O(x = 0, y = 0)$$

1. Exprimez le flux magnétique $\Phi(t)$ qui traverse le cadre, à l'instant t, sous la forme :

$$\Phi(t) = \Phi_0 . \exp\left[i\omega\left(\frac{a}{2c} - t\right)\right]$$

   Exprimez Φ_0 à l'aide des données.
2. Exprimez la valeur efficace e_{eff} de la force électromotrice qui apparait aux bornes du cadre, en fonction de a, b, c, E_0, N et ω
3. Calculez l'amplitude E_0 du champ électrique en O en utilisant le vecteur de Poynting.
4. Exprimez la f.é.m. efficace e_{eff} aux bornes du cadre en fonction de a, b, c, d, λ, μ_0, N et $\mathcal{P}$. Calculez e_{eff} en millivolts.

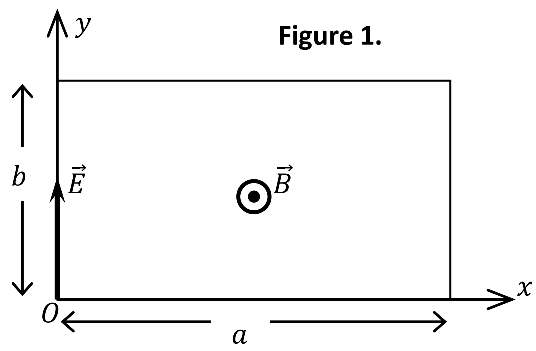


Figure 1.

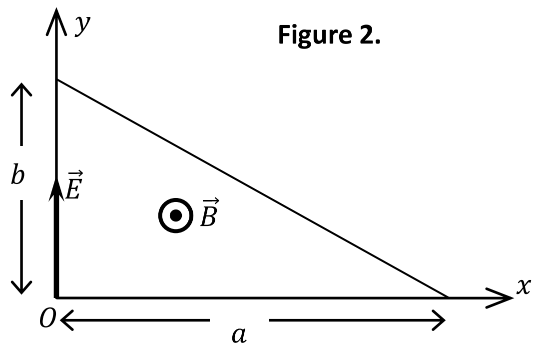


Figure 2.

EXERCICE 14 **(*) :** ***Capteur triangulaire d'ondes électromagnétiques planes*.**

Un cadre capteur de forme triangulaire rectangle (Figure 2.), de côtés a et b, est constitué de $N = 60$ spires conductrices, est placé dans le plan (Oxy) à la distance $d = 100\ km$ d'une source S émettrice d'ondes électromagnétiques sinusoïdales de longueur d'onde $\lambda = 25\ m$ et de puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle = 1000\ W$.
Ce cadre est disposé normalement au champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde électromagnétique supposée plane (au voisinage du cadre) polarisée rectilignement, de champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 . \exp(-i\omega . t) . \vec{e}_y \qquad \text{en} \qquad O(x = 0, y = 0)$$

1. Exprimez le flux magnétique $\Phi(t)$ qui traverse le cadre, en notation complexe.
2. Exprimez la valeur efficace e_{eff} de la force électromotrice qui apparait aux bornes du cadre, en fonction de a, b, c, E_0, N et ω.
3. Calculez l'amplitude E_0 du champ électrique en O en utilisant le vecteur de Poynting.
4. On donne $b = 0{,}75\ m$; calculez la f.é.m. efficace e_{eff} aux bornes du cadre dans les trois cas : $a = 1{,}25\ m$; $a = \lambda/8$; $a = \lambda/4$.

EXERCICE 15 (*) : ***Equation de propagation du champ dans le vide*. Solution en ondes planes.**

1. Etablir l'équation de propagation du champ magnétique $\vec{B}$ d'une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le vide :

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2. Propagation en ondes planes.

En $M(x, y, z)$ les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ d'une onde plane qui se propage suivant la direction (Ox) (de vecteur unitaire $\vec{e}_x$) ne dépendent que de l'abscisse x de M, à un instant t donné.

a. Montrez que la solution générale de l'équation de propagation est de la forme :

b. $B(x, t) = f_1(x - c.t) + f_2(x + c.t)$

c. Interprétez physiquement les deux équations f_1 et f_2 dérivables.

3. Onde plane progressive

Une onde plane est progressive si l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ (ou du champ électrique $\vec{E}$) ne fait apparaitre qu'une seule des deux fonctions f_1 ou f_2.

a. On pose $(u = x - ct)$. Exprimer, pour l'onde plane progressive, La dérivée $\partial\vec{E}/\partial u$ en fonction de c, $\partial\vec{B}/\partial u$ et $\vec{e}_x$ et La dérivée $\partial\vec{B}/\partial u$ en fonction de c, $\partial\vec{E}/\partial u$ et $\vec{e}_x$.

b. Quelle propriété de l'onde plane progressive peut-on en déduire ?

c. Le potentiel vecteur d'une onde plane progressive qui se propage dans le vide dans la direction (Ox) est :

$$\vec{A}(x, t) = f(x - c.t).\vec{e}_y + g(x + c.t).\vec{e}_z$$

4. Exprimer les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au point M à l'instant t donné.
5. Calculer le rapport des modules (E/B) et vérifiez l'orthogonalité des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

EXERCICE 16 : ***Equation de propagation du champ dans le vide*. Solution en ondes sphériques.**

1. Etablir l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$ d'une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le vide :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2. Propagation en ondes sphériques de centre O.

En $M(x, y, z)$ le champ $\vec{E}$ d'une onde sphérique ne dépend que de la distance $(r = OM)$ au centre O à un instant t donné.

a. Calculez le Laplacien de la fonction champ électrique en coordonnées sphériques : $\Delta E(r, t)$.

b. Montrez que la solution générale de l'équation de propagation est de la forme :

$$E(r, t) = \frac{1}{r}f_1(r - c.t) + \frac{1}{r}f_2(r + c.t)$$

Où f_1 et f_2 sont deux équations dérivables ; décrire le type d'onde associé à chacun des deux termes de la solution $E(r, t)$.

c. Interpréter physiquement, par des considérations énergétiques, l'origine du facteur $(1/r)$.

3. *Onde sphérique divergente.* Le potentiel vecteur d'une onde sphérique de centre O divergente, dans le vide, est de la forme, en notation complexe.

$$\underline{\vec{A}} = \frac{1}{r}\vec{A}_0.\exp[i(kr - \omega t)]$$

a. Calculez le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de $\vec{r}$ et t.

b. Vérifiez l'orthogonalité des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.