

SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 02 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

EXERCICE 01 : Densités de courant \vec{j}_D et \vec{j} dans le vide, autour d'une sphère radioactive.

1. Calcul du champ électrique : théorème de GAUSS

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : Sphérique (figure en bas à gauche).

Surface de Gauss : Sphère concentrique à la distribution de rayon r .

Comme $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_G} E \cdot ds$$

En plus, en utilisant la symétrie de rotation par rapport au centre de la sphère chargée, nous trouvons que $E = \text{constante}$ (en module) sur la surface de Gauss S_G . Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_{S_G} ds = E \cdot S_G = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss (sphère de rayon r) : $q(r, t)$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{q(r, t)}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r, t)}{r^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E}(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r, t)}{r^2} \vec{e}_r}$$

Calcul du champ magnétique :

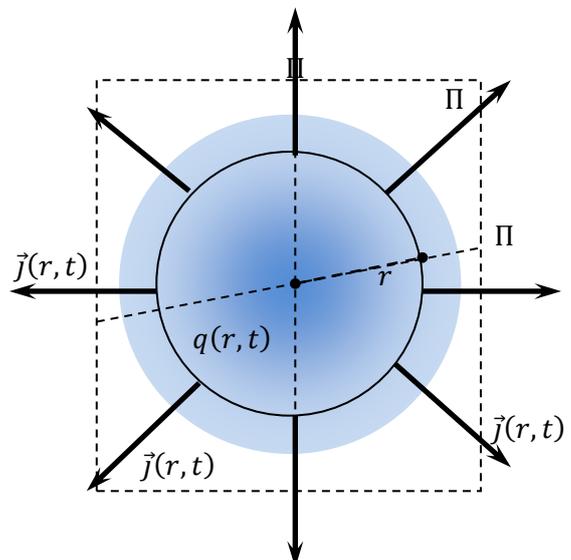
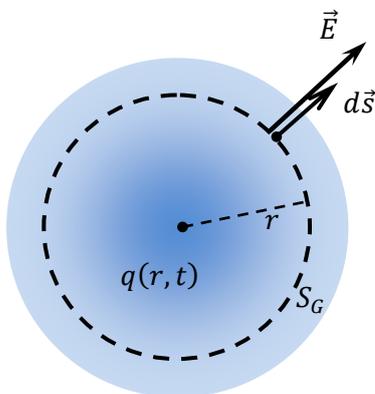
Le champ magnétique en un point situé sur un plan de symétrie est toujours perpendiculaire au plan de symétrie.

Les plans de symétrie de la distribution de courants sont tous les plans passant par le centre de la sphère radioactive.

En chaque point de l'espace il y a une infinité de plans de symétrie qui se coupent (figure en bas à droite).

Dans ce cas le champ magnétique est nul en tout point de l'espace.

$$\boxed{\vec{B}(r, t) = \vec{0}}$$



2. Le courant de conduction

La symétrie étant sphérique

$$I = \frac{dQ}{dt} = \oiint \vec{j} \cdot d\vec{s} = j \cdot 4\pi \cdot r^2$$

Comme la charge à l'intérieur diminue quand le courant est positif

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{dQ_{\text{intérieur}}}{dt} = -\frac{\partial q(r, t)}{\partial t}$$

D'où

$$j = -\frac{1}{4\pi \cdot r^2} \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{j}(r, t) = -\frac{1}{4\pi \cdot r^2} \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \vec{e}_r}$$

Le courant de déplacement

$$\vec{j}_D(r, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j}_D(r, t) = \frac{1}{4\pi \cdot r^2} \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \vec{e}_r}$$

3. En utilisant la forme locale du théorème de Maxwell-Ampère

$$\overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}(r, t) + \mu_0 \cdot \vec{j}_D(r, t) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc

$$\boxed{\overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{0}}$$

EXERCICE 04 : Onde plane progressive monochromatique électromagnétique.

1. Pour une fonction d'onde en notation complexe de la forme

$$f(\vec{r}, t) = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A \cdot e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)}$$

Avec $\vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z$ et $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$

Le gradient s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla}f(\vec{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

D'où

$$\vec{\nabla}f(\vec{r}, t) = A \left\{ \frac{\partial e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)}}{\partial z} \vec{e}_z \right\}$$

$$\vec{\nabla}f(\vec{r}, t) = ik_x \cdot f \cdot \vec{e}_x + ik_y \cdot f \cdot \vec{e}_y + ik_z \cdot f \cdot \vec{e}_z = i\vec{k} \cdot f(\vec{r}, t)$$

Donc

$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv i\vec{k}}$$

Et la dérivée partielle par rapport au temps s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) = A \frac{\partial e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega t)}}{\partial t} = -i\omega \cdot f(\vec{r}, t)$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \equiv -i\omega}$$

2. Equations de Maxwell dans le vide (en absence de charges et de courants).

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 ; \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \text{div}(\vec{B}) = 0 ; \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Comme

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Donc \vec{k} est perpendiculaire au champ électrique \vec{E} .

3. Comme \vec{E} est suivant la direction de l'axe (Ox), et puisque \vec{k} est perpendiculaire à \vec{E} et suivant la direction de propagation, donc, la direction de propagation de l'onde est parallèle au plan (Oyz).

4. Fréquence

$$\lambda = 4\pi \Rightarrow \boxed{v = \frac{c}{\lambda}} \quad \text{Application Numérique : } \boxed{v = 2,39 \times 10^7 \text{ Hz}}$$

Pulsation

$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot v = 2\pi \frac{c}{\lambda}} \quad \text{Application Numérique : } \boxed{\omega = 1,5 \times 10^8 \text{ rad/s}}$$

5. Le champ électrique est toujours dirigé suivant la même direction (Ox)

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \cdot \vec{e}_x$$

La polarisation est rectiligne.

6. Comme le vecteur \vec{k} est parallèle au plan (Oyz) alors $(k_x = 0)$ et :

$$\vec{k} = k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z$$

Son module est donné par la longueur d'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Application Numérique :

$$k = 0,5 \text{ m}^{-1}$$

D'où

$$\begin{cases} k_y = k \cdot \cos \theta \\ k_z = k \cdot \sin \theta \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} k_y = \sqrt{3}/4 = 0,43 \\ k_z = 1/4 = 0,25 \end{cases}$$

et

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} n_y = \sqrt{3}/2 \\ n_z = 1/2 \end{cases}$$

7. Champ magnétique : équation de structure du champ électromagnétique dans le vide.

$$\vec{n} \times \vec{E} = c \cdot \vec{B}$$

D'où

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y + \frac{1}{2} \vec{e}_z \right) \times \vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{e}_y - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z \right)$$

8. Equations de Maxwell dans le vide (en absence de charges et de courants).

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Jauge de Lorentz.

$$\text{div}(\vec{A}) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Comme

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}}(V)}{\partial t} - \Delta \vec{A}$$

D'autre part

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}}(V)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

En comparant ces deux équations, il vient que

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

EXERCICE 05 : Champs et énergie d'une onde plane progressive.

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cdot \exp[i(ax + by - \omega t)] \cdot \vec{e}_z$$

1.a. Equation de propagation dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 ; \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 ; \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Calculons $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}))$ les dérivées partielles par rapport au temps et par rapport aux variables d'espace étant indépendantes :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B})}{\partial t}$$

Comme

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Donc

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'autre part

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

En comparant ces deux dernières équations, nous trouvons l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

1.b. En écrivant le laplacien en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

En dérivant l'équation d'onde du champ électrique

$$-\left(a^2 + b^2 + 0 - \frac{1}{c^2} \omega^2\right) \vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = c^2(a^2 + b^2) \quad \text{et} \quad \boxed{\omega = \pm c \sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.c. a et b représentent les composantes du vecteur d'onde \vec{k} suivant les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y .

$$\boxed{\vec{k} = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y}$$

La longueur d'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Et l'angle θ est donné par

$$\boxed{\tan \theta = \frac{k_y}{k_x} = \frac{b}{a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

2.a. Le vecteur champ magnétique $\vec{B}(x, y, t)$ est obtenu à partir de la relation de structure

$$\vec{n} \times \vec{E} = c \cdot \vec{B}$$

En multipliant par le module du vecteur d'onde k

$$k \cdot \vec{n} \times \vec{E} = kc \cdot \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B}$$

D'où

$$(a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y) \times (E_0 \cdot \exp[i(ax + by - \omega t)]) \cdot \vec{e}_z = c\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \vec{B}$$

Et

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \exp[i(ax + by - \omega t)] \cdot (b \cdot \vec{e}_x - a \cdot \vec{e}_y)$$

Et les champs électrique et magnétiques sont perpendiculaires en chaque point ($\vec{E} \perp \vec{B}$).

2.b. Impédance caractéristique du vide

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0}{\mu_0 c \sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \exp[i(ax + by - \omega t)] \cdot (b \cdot \vec{e}_x - a \cdot \vec{e}_y)$$

Dont l'amplitude

$$H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad Z_0 = \frac{E_0}{H_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \quad \text{et} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

3.a. Vecteur de Poynting pour une onde plane ($B = E/c$)

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{E_0^2 \cdot \cos^2(ax + by - \omega t)}{\mu_0 c \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} (a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y)$$

On n'utilisant que la partie réelle des champs. Son module est alors

$$P = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cdot \cos^2(ax + by - \omega t)$$

Puisque la valeur moyenne $\langle \cos^2(ax + by - \omega t) \rangle = 1/2$, donc

$$\langle P \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

3.b. La densité volumique de l'énergie électromagnétique dans le cas d'une onde plane

$$\mathcal{E}_{\text{ém}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{\text{ém}} = \epsilon_0 E_0^2 \cdot \cos^2(ax + by - \omega t)$$

Et sa valeur moyenne

$$\langle \mathcal{E}_{\text{ém}} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \cdot \langle \cos^2(ax + by - \omega t) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{E}_{\text{ém}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2$$

4. Vitesse de propagation de l'énergie. Le vecteur de Poynting est lié à la densité d'énergie par

$$\oiint \vec{P} \cdot d\vec{s} = -\frac{dU_{\text{ém}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left\{ \iiint \mathcal{E}_{\text{ém}} \cdot d\tau \right\}$$

En prenant comme surface fermée un cylindre, de longueur égale à la distance de propagation de l'onde $l = V_e \cdot t$, dont la base S est perpendiculaire à la direction de propagation, l'onde étant plane, \vec{P} et \vec{E} sont constant sur cette surface.

$$\oiint \vec{P} \cdot d\vec{s} = -P \cdot S$$

Et sa valeur moyenne

$$\langle \oiint \vec{P} \cdot d\vec{s} \rangle = -\langle P \rangle \cdot S$$

D'autre part la valeur moyenne de l'énergie à l'intérieur du cylindre

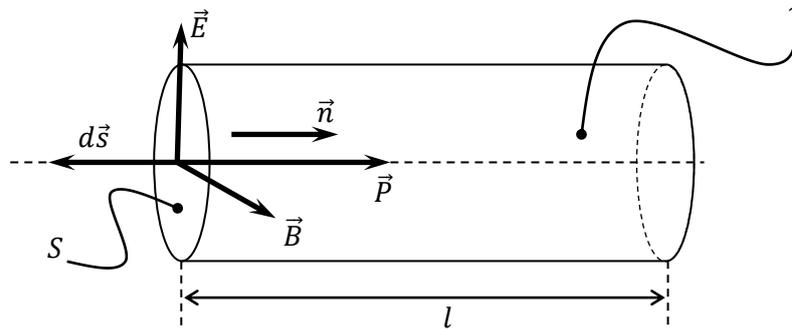
$$\langle U_{\text{ém}} \rangle = \iiint \langle \mathcal{E}_{\text{ém}} \rangle \cdot d\tau = \iiint \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cdot d\tau = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cdot S \cdot l$$

D'où

$$\langle P \rangle \cdot S = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cdot S \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cdot S \cdot V_e$$

Et en remplaçant $\langle P \rangle$, il vient que

$$\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cdot V_e \Rightarrow \boxed{V_e = c}$$



5. La puissance moyenne

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle P \rangle \cdot S = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S$$

Pour une sections circulaire de diamètre d : $S = \pi R^2 = \pi d^2 / 4$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi d^2 \cdot E_0^2}{8\mu_0 c} \Rightarrow \boxed{E_0 = c \cdot B_0 = \sqrt{\frac{8\mu_0 c \cdot \langle \mathcal{P} \rangle}{\pi d^2}}}$$

Application numérique

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 1,6 \text{ KWatts} \text{ et } d = 4 \text{ mm} ; \boxed{E_0 = 3,1 \times 10^5 \text{ V/m}} \text{ et } \boxed{B_0 = 1,03 \times 10^{-3} \text{ Tesla}}$$

EXERCICE 06 (*) : Champs et énergie d'une onde plane progressive.

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(ky - \omega t) \cdot \vec{e}_x - E_0 \cdot \sin \alpha \cdot \sin(ky - \omega t) \cdot \vec{e}_z$$

1. Direction de propagation : Axe (Oy) vers le sens positif (y croissants), donc $\vec{n} = \vec{e}_y$.

2. $\vec{E} = E_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(ky - \omega t) \cdot \vec{e}_x + E_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(ky - \omega t + \pi/2) \cdot \vec{e}_z$

$\varphi = \varphi_x - \varphi_z = -\pi/2$ avec $E_{0x} = E_0 \cdot \cos \alpha$ et $E_{0z} = E_0 \cdot \sin \alpha$

- $\alpha = \pi/4 + n\pi \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha$ et $E_{0x} = E_{0z}$: Polarisation circulaire droite.
- $\alpha = 3\pi/4 + n\pi \Rightarrow \cos \alpha = -\sin \alpha$ et $E_{0x} = -E_{0z}$: Polarisation circulaire gauche.
- $\alpha = \pi/2 + n\pi \Rightarrow \cos \alpha = 0$ et $E_{0x} = 0$: Polarisation rectiligne suivant \vec{e}_z .
- $\alpha = n\pi \Rightarrow \sin \alpha = 0$ et $E_{0z} = 0$: Polarisation rectiligne suivant \vec{e}_x .
- $n\pi < \alpha < \pi/2 + n\pi$ et $\alpha \neq \pi/4 + n\pi \Rightarrow E_{0x} \neq E_{0z}$: Polarisation elliptique droite.
- $\pi/2 + n\pi < \alpha < (n+1)\pi$ et $\alpha \neq 3\pi/4 + n\pi \Rightarrow E_{0x} \neq E_{0z}$: Polarisation elliptique gauche.

3. En notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(y, t) = E_0 \cdot e^{i(ky - \omega t)} (\cos \alpha \cdot \vec{e}_x + \sin \alpha \cdot e^{i\pi/2} \cdot \vec{e}_z)$$

Ou

$$\underline{\vec{E}}(y, t) = E_0 \cdot e^{i(ky - \omega t)} (\cos \alpha \cdot \vec{e}_x + i \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_z)$$

4. Champ magnétique : Onde plane suivant $\vec{e}_y \Rightarrow \vec{e}_y \times \vec{E} = c \cdot \vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos \alpha \cdot \cos(ky - \omega t) \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + \frac{E_0}{c} \sin \alpha \cdot \cos(ky - \omega t + \pi/2) \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z)$$

D'où

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \{ \sin \alpha \cdot \cos(ky - \omega t + \pi/2) \cdot \vec{e}_x - \cos \alpha \cdot \cos(ky - \omega t) \cdot \vec{e}_z \}$$

Et en notation complexe

$$\underline{\vec{B}}(y, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(ky - \omega t)} (\sin \alpha \cdot e^{i\pi/2} \cdot \vec{e}_x - \cos \alpha \cdot \vec{e}_z)$$

Ou

$$\underline{\vec{B}}(y, t) = \frac{E_0}{c} e^{i(ky - \omega t)} (i \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_x - \cos \alpha \cdot \vec{e}_z)$$

5. Vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Pour une onde plane suivant \vec{e}_y

$$\vec{P} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_y$$

$$\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \{ \cos^2 \alpha \cdot \cos^2(ky - \omega t) + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2(ky - \omega t + \pi/2) \} \vec{e}_y$$

Comme

$$\langle \cos^2(ky - \omega t) \rangle = \langle \cos^2(ky - \omega t + \pi/2) \rangle = 1/2$$

Alors

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \vec{e}_y = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_y$$

6. La puissance moyenne rayonnée

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \vec{P} \rangle \cdot \vec{S} = \langle P \rangle \cdot S = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \pi r^2$$

Donc

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_0^2}{8\mu_0 c} \pi d^2$$

\Rightarrow

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\mu_0 c \cdot \langle \mathcal{P} \rangle}{\pi d^2}}$$

Application Numérique

$$E_0 = 3,1 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

EXERCICE 07 : Réflexion d'une OPPM sur une surface conductrice.

1. Notation réelle : polarisation circulaire ($E_{0y} = E_{0z} = E_0$) gauche $\varphi_z - \varphi_y = \pi/2$

$$\vec{E}_1 = E_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y + E_0 \cdot \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_z$$

Ou

$$\vec{E}_1 = E_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y - E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_z$$

Notation complexe

$$\vec{E}_1 = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} (\vec{e}_y + e^{i\pi/2} \cdot \vec{e}_z) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} (\vec{e}_y + i \cdot \vec{e}_z)$$

2. Champ magnétique : Direction de propagation $\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{e}_x \times \vec{E}_1 / c$

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_z - \frac{E_0}{c} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_y$$

Notation réelle

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_z$$

Notation complexe

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} (\vec{e}_z - i \cdot \vec{e}_y)$$

3. $\vec{P}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{B}_1 / \mu_0$ pour une onde plane $\vec{P}_1 = (E_1^2 / \mu_0 c) \cdot \vec{e}_x$ ($B_1 = E_1 / c$). Donc :

$$\vec{P}_1 = \frac{E_0^2 \cdot (\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t))}{\mu_0 c} \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x = \text{Constante}$$

4. $\vec{E}_1(x=0) + \vec{E}_2(x=0) = \vec{0}$ et $\vec{E}_2(x,t)$ est une OEPPM qui se propage vers les x négatifs.

Donc nous écrivons la forme générale de $\vec{E}_2(x,t)$:

$$\vec{E}_2 = E_{0y} \cdot \cos(kx + \omega t + \varphi_y) \cdot \vec{e}_y + E_{0z} \cdot \cos(kx + \omega t + \varphi_z) \cdot \vec{e}_z$$

En écrivant la continuité :

$$-E_0 \cdot \cos(-\omega t) \cdot \vec{e}_y - E_0 \cdot \cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_z = E_{0y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) \cdot \vec{e}_y + E_{0z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_z) \cdot \vec{e}_z$$

En comparant les deux membres :

$$\begin{cases} E_{0y} \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) = -E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_{0z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_z) = -E_0 \cdot \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0y} = -E_0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \varphi_y = 0 \\ \varphi_z = -\pi/2 \end{cases}$$

Finalement :

$$\vec{E}_2 = -E_0 \cdot \cos(kx + \omega t) \cdot \vec{e}_y - E_0 \cdot \cos(kx + \omega t - \pi/2) \cdot \vec{e}_z$$

Et en notation complexe :

$$\vec{E}_2 = -E_0 \cdot e^{i(kx + \omega t)} (\vec{e}_y - i \cdot \vec{e}_z)$$

5. Polarisation : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \varphi_y - \varphi_z = \pi/2$ et $E_{0y} = E_{0z}$
polarisation circulaire gauche.

6. Champ magnétique : Direction de propagation $-\vec{e}_x \Rightarrow \vec{B}_2 = -\vec{e}_x \times \vec{E}_2/c$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} \cos(kx + \omega t) \cdot \vec{e}_z - \frac{E_0}{c} \cos\left(kx + \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_y$$

Notation réelle

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \sin(kx + \omega t) \cdot \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} \cos(kx + \omega t) \cdot \vec{e}_z$$

Notation complexe

$$\underline{\vec{B}}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i(kx + \omega t)} (\vec{e}_z + i \cdot \vec{e}_y)$$

7. Champ total en notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2 = E_0 \cdot e^{ikx} [(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}) \cdot \vec{e}_y + i \cdot (e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}) \cdot \vec{e}_z]$$

Donc

$$\underline{\vec{E}} = 2i \cdot E_0 \cdot e^{ikx} [-\sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y + \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z]$$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{E} = 2 \cdot E_0 \cdot \sin(kx) [\sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y - \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z]$$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_1 + \underline{\vec{B}}_2 = \frac{E_0}{c} e^{ikx} [(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}) \cdot \vec{e}_z - i \cdot (e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}) \cdot \vec{e}_y]$$

Donc

$$\underline{\vec{B}} = 2 \frac{E_0}{c} e^{ikx} [\sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y + \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z]$$

En prenant la partie réelle :

$$\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) [\sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y + \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z]$$

Nature de l'onde : **Onde stationnaire.**

8. Vecteur de Poynting : $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{B} / \mu_0$

$$\vec{E} \times \vec{B} = 4 \frac{E_0^2}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \sin(kx) \cdot \sin(\omega t) & -\sin(kx) \cos(\omega t) \\ 0 & \cos(kx) \cdot \sin(\omega t) & \cos(kx) \cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

D'où

$$\vec{P} = 2 \frac{E_0^2}{\mu_0 \cdot c} \sin(2kx) \cdot \sin(2\omega t) \vec{e}_x$$

Conclusion : $\langle P \rangle_T = 0$ **Une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie.**

EXERCICE 08 (*) : Réflexion d'une OPPM sur une surface conductrice.

1. Vecteur d'onde de l'onde réfléchi : $\lambda = \text{constante} \Rightarrow \lambda = \lambda'$ et le module $k = k'$.
En utilisant la projection

$$\vec{k}' = k'(-\cos \theta \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \vec{e}_y) \quad \text{avec} \quad (\theta_i = \theta_r = \theta)$$

2. L'onde incidente

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{\vec{E}}_{0i} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\vec{E}}_{0i} = E_0 \cdot e^{i\varphi} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{k} \cdot \vec{r} = k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y \end{cases}$$

D'où

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \cdot e^{i(k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t + \varphi)} \cdot \vec{e}_z$$

3. L'onde réfléchi

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0r} \cdot e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\vec{E}}_{0r} = E'_0 \cdot e^{i\varphi'} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{k}' \cdot \vec{r} = -k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y \\ \omega' = k' \cdot c = k \cdot c = \omega \end{cases}$$

D'où

$$\underline{\vec{E}}_r = E'_0 \cdot e^{i(-k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t + \varphi')} \cdot \vec{e}_z$$

4. La continuité au point $O(x = 0, y = 0)$

$$\underline{\vec{E}}_i(x = 0, y = 0) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \varphi)} \cdot \vec{e}_z \quad ; \quad \underline{\vec{E}}_r(x = 0, y = 0) = E'_0 \cdot e^{i(-\omega t + \varphi')} \cdot \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}}_i(x = 0, y = 0) + \underline{\vec{E}}_r(x = 0, y = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E}}_i(x = 0, y = 0) = -\underline{\vec{E}}_r(x = 0, y = 0)$$

Donc

$$E_0 \cdot e^{i\varphi} = -E'_0 \cdot e^{i\varphi'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = -E'_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \varphi'} \quad (\text{on prendra } \varphi = \varphi' = 0)$$

5. Le champ résultant

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = E_0 \cdot \{e^{i(k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t)} - e^{i(-k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t)}\} \cdot \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{i(k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t)} \cdot \{e^{i(k \cdot \cos \theta \cdot x)} - e^{i(-k \cdot \cos \theta \cdot x)}\} \cdot \vec{e}_z$$

Donc

$$\underline{\vec{E}} = 2i \cdot E_0 \cdot \sin(k \cdot \cos \theta \cdot x) \cdot e^{i(k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t)} \cdot \vec{e}_z$$

Et en prenant la partie réelle

$$\vec{E}(x, y, t) = -2E_0 \cdot \sin(k \cdot \cos \theta \cdot x) \cdot \sin(k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t) \cdot \vec{e}_z$$

6. L'équation de structure de l'OEPPM

$$\vec{n} \times \vec{E} = c \cdot \vec{B}$$

En multipliant par k

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \cdot \vec{B}$$

En utilisant la notation complexe

$$\vec{k} \times \underline{\vec{E}}_i = \omega \cdot \underline{\vec{B}}_i \quad \text{et} \quad \vec{k}' \times \underline{\vec{E}}_r = \omega \cdot \underline{\vec{B}}_r$$

D'où

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{k} \times \underline{\vec{E}}_i}{\omega} = \frac{kE_0}{\omega} e^{i(k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t)} \cdot (\cos \theta \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \vec{e}_y) \times \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{B}}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(k \cdot \cos \theta \cdot x + k \cdot \sin \theta \cdot y - \omega t)} \cdot (\sin \theta \cdot \vec{e}_x - \cos \theta \cdot \vec{e}_y)$$

Et pour l'onde réfléchie

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}' \times \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{kE_0}{\omega} e^{i(-k.\cos\theta.x+k.\sin\theta.y-\omega t)}. (-\cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y) \times \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} e^{i(-k.\cos\theta.x+k.\sin\theta.y-\omega t)}. (\sin\theta.\vec{e}_x + \cos\theta.\vec{e}_y)}$$

7. Le champ magnétique résultant

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{i(k.\sin\theta.y-\omega t)} \left\{ \sin\theta (e^{i(k.\cos\theta.x)} - e^{i(-k.\cos\theta.x)}) . \vec{e}_x - \cos\theta (e^{i(k.\cos\theta.x)} + e^{i(-k.\cos\theta.x)}) . \vec{e}_y \right\}$$

Soit

$$\boxed{\vec{B}(x, y, t) = 2 \frac{E_0}{c} e^{i(k.\sin\theta.y-\omega t)} \{ i . \sin\theta . \sin(k.\cos\theta.x) . \vec{e}_x - \cos\theta . \cos(k.\cos\theta.x) . \vec{e}_y \}}$$

Et en prenant la partie réelle

$$\boxed{\vec{B}(x, y, t) = -2 \frac{E_0}{c} \{ \sin\theta . \sin(k.\cos\theta.x) . \sin(k.\sin\theta.y - \omega t) . \vec{e}_x + \cos\theta . \cos(k.\cos\theta.x) . \cos(k.\sin\theta.y - \omega t) \vec{e}_y \}}$$

8. Structure de l'onde :

- Onde stationnaire suivant l'axe (Ox).
- Onde progressive suivant l'axe (Oy) vers les y croissants (positifs).

EXERCICE 09 : Etat de polarisation d'une onde.**a.**

$$\vec{E}_0 = E_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_y + E_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_z$$

- Direction de propagation : $\vec{n} = \vec{e}_x$.
- Différence de phase : $\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y = 0$.
- Amplitudes : $E_{0y} = E_0 \cdot \cos \alpha$; $E_{0z} = E_0 \cdot \sin \alpha$.

Polarisation rectiligne.**b.**

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \cos \omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right) \cdot \vec{e}_x + E_1 \cdot \sin \omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_x - E_1 \cdot \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_x + E_1 \cdot \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_y$$

- Direction de propagation : $\vec{n} = \vec{e}_z$.
- Différence de phase : $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \pi/2$.
- Amplitudes : $E_{0x} = E_{0y} = E_1$.

Polarisation circulaire gauche.**c.**

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \cos \omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right) \cdot \vec{e}_x - E_2 \cdot \sin \omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_x + E_2 \cdot \sin(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_x + E_2 \cdot \cos\left(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_y$$

- Direction de propagation : $\vec{n} = \vec{e}_z$.
- Différence de phase : $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$.
- Amplitudes : $E_{0x} = E_{0y} = E_2$.

Polarisation circulaire droite.**d.**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_1 \cdot \cos \omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right) \cdot \vec{e}_x = 2E_1 \cdot \cos(kz - \omega t) \cdot \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad (E_1 = E_2)$$

- Direction de propagation : $\vec{n} = \vec{e}_z$.

Polarisation rectiligne suivant la direction \vec{e}_x .

EXERCICE 10 : Etat de polarisation d'une onde.

1. Champ électrique en notation réelle

Polarisation circulaire ($E_{0y} = E_{0z} = E_0$) gauche ($\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_y = \pi/2$), donc

$$\vec{E} = E_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y + E_0 \cdot \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_z$$

Notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot \vec{e}_y + E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})} \cdot \vec{e}_z$$

Ou

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot (\vec{e}_y + e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \vec{e}_z) = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot (\vec{e}_y + i \cdot \vec{e}_z)$$

2. La relation de structure

$$\vec{e}_x \times \vec{E} = c \cdot \vec{B}$$

D'où

$$c \cdot \vec{B} = \vec{e}_x \times \left(E_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y + E_0 \cdot \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_z \right)$$

$$c \cdot \vec{B} = E_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + E_0 \cdot \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_z)$$

Et

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{e}_y + \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_z$$

En notation complexe

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} \cdot (-e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} \cdot (-i \cdot \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

3. Vecteur de Poynting

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Pour une onde plane se propageant dans la direction \vec{e}_x

$$\vec{P} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$$

$$\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left\{ \cos^2(kx - \omega t) + \cos^2\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \left\{ \cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t) \right\} \vec{e}_x$$

$$\vec{P} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$$

Ce vecteur est constant en module et en direction.

EXERCICE 11 : Superposition de deux ondes de direction opposées. Onde stationnaire.

1. Champ électrique total

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \cdot e^{i.kx} (e^{-i.\omega t} - e^{+i.\omega t}) \cdot \vec{e}_y$$

Donc

$$\vec{E}(x, t) = -2i \cdot E_0 \cdot e^{i.kx} \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y$$

Ou

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \cdot e^{i.(kx-\pi/2)} \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y$$

dont la partie réelle

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_y$$

Champ magnétique incident

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}_1}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(kx-\omega t)} \cdot \vec{e}_z$$

Champ magnétique réfléchi

$$\vec{B}_2 = \frac{-\vec{e}_x \times \vec{E}_2}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(kx+\omega t)} \cdot \vec{e}_z$$

Champ magnétique total

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i.kx} (e^{-i.\omega t} + e^{+i.\omega t}) \cdot \vec{e}_z$$

Donc

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} e^{i.kx} \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z$$

dont la partie réelle

$$\vec{B}(x, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_z$$

2. Amplitude du champ électrique

$$E_m = 2E_0 \cdot \sin(kx)$$

Amplitude du champ magnétique

$$B_m = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx)$$

3. Plans nodaux du champ électrique

$$E_m = 0 \Rightarrow \sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = n \cdot \pi \quad \text{et} \quad x = 2n \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Plans ventraux du champ électrique

$$E_m = \pm 2E_0 \Rightarrow \sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Plans nodaux du champ magnétique

$$B_m = 0 \Rightarrow \cos(kx) = 0 \Rightarrow kx = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$$

Plans ventraux du champ magnétique

$$B_m = \pm 2 \frac{E_0}{c} \Rightarrow \cos(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx = n \cdot \pi \quad \text{et} \quad x = 2n \cdot \frac{\lambda}{4}$$

4. Décalage entre le champ électrique et magnétique est d'un quart de longueur d'onde

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \Delta \phi = k \cdot \Delta x = \frac{\pi}{2}$$

EXERCICE 12 (*) : Superposition de deux ondes de direction opposées.

$$\vec{E}_1 = E_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \cdot \vec{e}_y \quad ; \quad \vec{E}_2 = \alpha E_0 \cdot e^{i(\omega t + kx)} \cdot \vec{e}_y$$

1. Champ électrique résultant

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \cdot e^{i\omega t} (e^{-ikx} + \alpha \cdot e^{+ikx}) \cdot \vec{e}_y$$

L'équation de structure pour chaque onde est donnée par

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}_1}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{propagation suivant les } x \text{ croissants})$$

$$\vec{B}_2 = \frac{-\vec{e}_x \times \vec{E}_2}{c} = -\alpha \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kx)} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{propagation suivant les } x \text{ décroissants})$$

Et le champ magnétique résultant

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} (e^{-ikx} - \alpha \cdot e^{+ikx}) \cdot \vec{e}_z$$

2. L'amplitude complexe du champ électrique

$$\vec{E}_0 = E_0 (e^{-ikx} + \alpha \cdot e^{+ikx}) \cdot \vec{e}_y$$

Ou bien

$$\vec{E}_0 = E_0 \{ \cos(kx) - i \cdot \sin(kx) + \alpha \cdot \cos(kx) + i\alpha \cdot \sin(kx) \} \cdot \vec{e}_y$$

Donc

$$\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{e}_y = E_0 \{ (\alpha + 1) \cdot \cos(kx) + i(\alpha - 1) \cdot \sin(kx) \} \cdot \vec{e}_y$$

3. L'amplitude réelle

$$E = |\underline{E}_0| = E_0 \sqrt{(\alpha + 1)^2 \cdot \cos^2(kx) + (\alpha - 1)^2 \cdot \sin^2(kx)}$$

$$E = E_0 \sqrt{\alpha^2 + 1 + 2\alpha \cdot \cos^2(kx) - 2\alpha \cdot \sin^2(kx)}$$

$$E = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \cos(2kx)}$$

4.

$$E = E_{\max} \Rightarrow \cos(2kx) = 1 \Rightarrow 2kx = 2n\pi$$

Donc

$$x = 2n \frac{\lambda}{4} \quad \text{et} \quad E_{\max} = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha} = 1 + \alpha \quad \text{avec } (\alpha > 0)$$

$$E = E_{\min} \Rightarrow \cos(2kx) = -1 \Rightarrow 2kx = (2n + 1)\pi$$

Donc

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{et} \quad E_{\min} = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha} = |1 - \alpha| \quad \text{avec } (\alpha > 0)$$

Pour $(\alpha < 0)$ les positions des plans et les valeurs des amplitudes sont inversées.

Pour $(\alpha = 0)$ les plans sont confondus et $E_{\max} = E_{\min} = E_0$.

5. Le taux d'onde stationnaire

$$S = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1 + \alpha}{|1 - \alpha|} \quad \text{avec } (\alpha > 0)$$

EXERCICE 13 : Capteur rectangulaire d'ondes électromagnétiques planes.

$$\vec{E} = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot \vec{e}_y$$

1. Puisque la direction de propagation est suivant les x croissants

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \times \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} \cdot \vec{e}_z$$

Et le flux du champ magnétique

$$\Phi(t) = N \cdot \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{avec} \quad d\vec{s} = ds \cdot \vec{e}_z = dx dy \cdot \vec{e}_z$$

Donc

$$\Phi(t) = N \cdot \iint_S \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} \cdot dx dy = \frac{N \cdot E_0}{c} e^{-i\omega t} \int_0^a \int_0^b e^{ikx} \cdot dx dy$$

En intégrant

$$\Phi(t) = \frac{N \cdot E_0}{c} e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{ikx}}{ik} \right]_0^a [y]_0^b = \frac{N \cdot E_0 \cdot b}{c} e^{-i\omega t} \left(\frac{e^{ika} - 1}{ik} \right)$$

Que nous pouvons réécrire

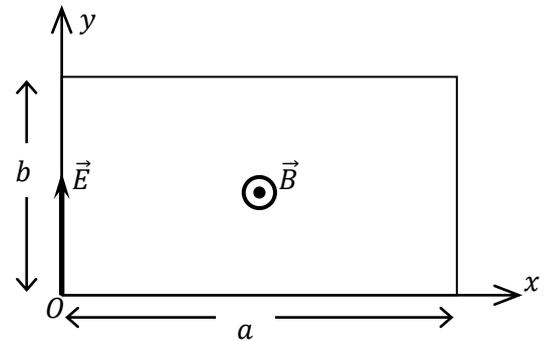
$$\Phi(t) = \frac{Nb \cdot E_0}{c} e^{-i\omega t} \cdot e^{i\frac{k}{2}a} \left(\frac{e^{i\frac{k}{2}a} - e^{-i\frac{k}{2}a}}{ik} \right)$$

Finalement

$$\Phi(t) = \frac{2Nb \cdot E_0}{ck} \sin\left(\frac{k}{2}a\right) \cdot e^{i\left(\frac{k}{2}a - \omega t\right)}$$

D'où en remplaçant $k = 2\pi/\lambda$.

$$\Phi_0 = \frac{Nb \cdot E_0 \cdot \lambda}{\pi c} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\right)$$



2. D'après le théorème de Faraday, la force électromotrice générée par le flux du champ magnétique est donnée par

$$e = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Donc

$$e = i\omega \frac{2Nb \cdot E_0}{ck} \sin\left(\frac{k}{2}a\right) \cdot e^{i\left(\frac{k}{2}a - \omega t\right)}$$

Comme $\omega = ck$

$$e = i2Nb \cdot E_0 \cdot \sin\left(\frac{k}{2}a\right) \cdot e^{i\left(\frac{k}{2}a - \omega t\right)}$$

Et sa valeur efficace

$$e_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{e \cdot e^*}{2}} \Rightarrow e_{\text{eff}} = \sqrt{2} Nb \cdot E_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\right)$$

3. Le vecteur de Poynting pour une onde plane se propageant dans la direction \vec{e}_x

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x$$

En utilisant l'expression réelle du champ

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x$$

Et la valeur moyenne de son module

$$\langle P \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

Où nous avons utilisé $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$, et donc

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \cdot \langle P \rangle}$$

4. La puissance moyenne irradiée à travers une surface S .

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle P \rangle \cdot S = \frac{E_0^2 \cdot S}{2\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{S} \quad \text{et} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c \cdot \langle \mathcal{P} \rangle}{S}}$$

Comme la source se trouve à une distance d du récepteur et que l'onde est sphérique, au point O la surface irradiée est une sphère de rayon d , donc $S = 4\pi \cdot d^2$

En remplaçant toutes les grandeurs trouvées, la valeur efficace de force électromotrice générée dans le récepteur est

$$e_{\text{eff}} = 2Nb \cdot \sqrt{\frac{\mu_0 c \cdot \langle \mathcal{P} \rangle}{4\pi \cdot d^2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a\right)$$

application numérique $e_{\text{eff}} = 0,015327 \text{ V} = 15,327 \text{ mV}$

EXERCICE 16 : Equation de propagation du champ dans le vide. Solution en ondes sphériques.

1. Les équations de Maxwell dans le vide et en absence de charges et de courants ($\rho = 0 ; \vec{j} = \vec{0}$).

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ; \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

Calculons

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})}{\partial t}$$

Car on peut inverser les dérivées. D'autre part :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (\text{div}(\vec{E}) = 0)$$

Et

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où l'équation suivante :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2.a. Dans le cas d'une symétrie sphérique

$$\Delta E(r, t) = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \tan \theta} \frac{\partial E}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2}$$

$E(r, t)$ étant une fonction uniquement du module r et de t .

$$\Delta E(r, t) = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot E)}{\partial r^2}$$

2.b. L'équation de propagation devient

$$\Delta E(r, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot E)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

En multipliant l'équation de propagation par r

$$\frac{\partial^2 (r \cdot E)}{\partial r^2} - \frac{r}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Comme r est indépendante de t , nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 (r \cdot E)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r \cdot E)}{\partial t^2} = 0$$

En faisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = r - c \cdot t \\ v = r + c \cdot t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \frac{1}{2}(v + u) \\ t = \frac{1}{2c}(v - u) \end{cases}$$

Cherchons les dérivées partielles de F par rapport à u et v .

$$dF(r, t) = \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Or

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u} du + \frac{\partial r}{\partial v} dv = \frac{1}{2}(dv + du) \quad \text{et} \quad dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv = \frac{1}{2c}(dv - du)$$

En remplaçant dans l'expression de la différentielle totale, on trouve.

$$dF(u, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right) du + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right) dv$$

D'où

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

D'autre part l'équation de propagation s'écrit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

Et elle peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) F = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad F(r, t) = r \cdot E(r, t)$$

Qui s'intègre facilement

$$\frac{\partial F}{\partial v} = f(v) \quad (\text{indépendante de } u)$$

En intégrant par rapport à v .

$$F = \int f(v) \cdot dv + f_1(u) = f_2(v) + f_1(u)$$

En remplaçant

$$r \cdot E(r, t) = f_1(r - ct) + f_2(r + ct)$$

Finalement

$$E(r, t) = \frac{1}{r} f_1(r - ct) + \frac{1}{r} f_2(r + ct)$$

- $f_1(r - ct)$ est une onde qui se propage vers le sens des r croissants (divergente).
- $f_2(r + ct)$ est une onde qui se propage vers le sens des r décroissants (convergente).

2.c.

D'un point de vue énergétique, le front d'onde est une sphère de rayon r donc sa surface est $S = 4\pi \cdot r^2$ plus l'onde se propage plus cette surface augmente et pour une amplitude du champ constante la puissance électromagnétique rayonnée augmente d'un facteur (r^2), ce qui est physiquement impossible.

Dans la solution que nous avons trouvé, l'amplitude du champ est divisée par un facteur ($1/r$) et donc le vecteur de Poynting est divisé par un facteur ($1/r^2$), ainsi la puissance rayonnée $\mathcal{P} = P \cdot S$ reste constante.