RÉSUMÉ DU COURS

NOTATIONS DE DIRAC

Espace des fonctions d'ondes $\mathcal{F}$	Espace des états $\mathcal{E}$	Espace dual $\mathcal{E}^*$
Fonction d'onde $\psi(\vec{r})$	Vecteur–ket $\vert\psi\rangle$	Vecteur–bra $\langle\psi\vert$

Produit scalaire

Le produit scalaire est un nombre complexe $(\vert\varphi\rangle, \vert\psi\rangle) = \langle\varphi\vert\psi\rangle$	Propriétés	$\langle\varphi\vert\psi\rangle = \langle\psi\vert\varphi\rangle^*$ $\langle\varphi\vert\lambda_1.\psi_1 + \lambda_2.\psi_2\rangle = \lambda_1.\langle\varphi\vert\psi_1\rangle + \lambda_2.\langle\varphi\vert\psi_2\rangle$ $\langle\lambda_1.\varphi_1 + \lambda_2.\varphi_2\vert\psi\rangle = \lambda_1^*.\langle\varphi_1\vert\psi\rangle + \lambda_2^*.\langle\varphi_2\vert\psi\rangle$ $\langle\psi\vert\psi\rangle$ =réel positif ; nul seulement si $\vert\psi\rangle = 0$

Opérateur, opérateur adjoint et opérateur hermétique.

<table>
<tr><td colspan="3">Opérateur = Application qui fait correspondre à tout ket $|\psi\rangle$ un autre ket $|\psi'\rangle$.
$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle$</td></tr>
<tr><td>Opérateur linéaire
$A(\lambda_1.|\psi_1\rangle + \lambda_2.|\psi_2\rangle) = \lambda_1.A|\psi_1\rangle + \lambda_2.A|\psi_2\rangle$</td><td rowspan="2">Propriétés
$[A,B] = AB - BA$
$A = (A^+)^+$
$(\lambda.A)^+ = \lambda^*.A^+$
$(A+B)^+ = A^+ + B^+$
$(AB)^+ = B^+A^+$</td><td>Opérateur hermétique
$A = A^+$</td></tr>
<tr><td>Adjoint d'un opérateur
$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle\psi|A^+ = \langle\psi'|$
Ou
$\langle\varphi|A|\psi\rangle^* = \langle\psi|A^+|\varphi\rangle$</td><td>Opérateur unitaire
$AA^+ = A^+A = \mathbb{I}$</td></tr>
</table>

Règles de conjugaison hermétique.

Pour obtenir le conjugué hermétique ou l'adjoint d'une expression quelconque, il faut :

1. *Remplacer* :
   - Les constantes par leurs complexes conjugués.
   - Les kets par les bras associés.
   - Les bras par les kets associés.
   - Les opérateurs par leurs adjoints.
2. *Inverser l'ordre* des facteurs (la place des constantes n'a pas d'importance).

REPRÉSENTATION DANS L'ESPACE DES ÉTATS

	Représentation $\{\|u_i\rangle\} \in \mathcal{E}$	Représentation $\{\|w_\alpha\rangle\} \notin \mathcal{E}$
Relation d'orthonormalisation	$\langle u_i\|u_j\rangle = \delta_{ij}$	$\langle w_\alpha\|w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha')$
Relation de fermeture	$\sum_i\|u_i\rangle\langle u_i\| = \mathbb{I}$	$\int\|w_\alpha\rangle\langle w_\alpha\|.d\alpha = \mathbb{I}$
Développement des kets et des bras	$\|\psi\rangle = \sum_i c_i.\|u_i\rangle$	$\|\psi\rangle = \int c(\alpha).\|w_\alpha\rangle.d\alpha$
	$\langle\psi\| = \sum_i c_i^*.\langle u_i\|$	$\langle\psi\| = \int c^*(\alpha).\langle w_\alpha\|.d\alpha$
Composantes	$c_i = \langle u_i\|\psi\rangle = \langle\psi\|u_i\rangle^*$	$c(\alpha) = \langle w_\alpha\|\psi\rangle = \langle\psi\|w_\alpha\rangle^*$
Produit scalaire	$\langle\varphi\|\psi\rangle = \sum_i b_i^*.c_i$	$\langle\varphi\|\psi\rangle = \int b^*(\alpha).c(\alpha).d\alpha$
Eléments de matrice	$A_{ij} = \langle u_i\|A\|u_j\rangle$	$A(\alpha,\alpha') = \langle w_\alpha\|A\|w_{\alpha'}\rangle$
$\|\psi'\rangle = A\|\psi\rangle$	$c_i' = \sum_j A_{ij}.c_i$	$c'(\alpha) = \int A(\alpha,\alpha').c(\alpha').d\alpha'$
$\langle\varphi\|A\|\psi\rangle$	$\langle\varphi\|A\|\psi\rangle = \sum_j\sum_i b_i^*.A_{ij}.c_j$	$\langle\varphi\|A\|\psi\rangle = \int\int b^*(\alpha).A(\alpha,\alpha').c(\alpha').d\alpha'.d\alpha$
$D = AB$	$D_{ij} = \sum_k A_{ik}.B_{kj}$	$D(\alpha,\alpha') = \int A(\alpha,\alpha'').B(\alpha'',\alpha').d\alpha''$
Adjoint	$(A^+)_{ij} = A_{ji}^*$	$A^+(\alpha,\alpha') = A^*(\alpha',\alpha)$
Op. Hermétique	$A_{ij} = A_{ji}^*$	$A(\alpha,\alpha') = A^*(\alpha',\alpha)$

Changement de base

	Ancienne base $\{\|u_i\rangle\}$	Nouvelle base $\{\|t_k\rangle\}$
Relation d'orthonormalisation	$\langle u_i\|u_j\rangle = \delta_{ij}$	$\langle t_k\|t_l\rangle = \delta_{kl}$
Relation de fermeture	$\sum_i\|u_i\rangle\langle u_i\| = \mathbb{I}$	$\sum_k\|t_k\rangle\langle t_k\| = \mathbb{I}$
Développement des kets et des bras	$\|\psi\rangle = \sum_i c_i.\|u_i\rangle$	$\|\psi\rangle = \sum_k c_k'.\|t_k\rangle$
	$\langle\psi\| = \sum_i c_i^*.\langle u_i\|$	$\langle\psi\| = \sum_k c_k'^*.\langle t_k\|$

Matrice de changement de base S : $S_{ik} = \langle u_i|t_k\rangle$

Conjuguée de la matrice de changement de base S^+ : $(S^+)_{ki} = \langle t_k|u_i\rangle = (S_{ik})^*$

La matrice de changement de base est unitaire : $SS^+ = S^+S = \mathbb{I}$

	$\|u_i\rangle \to \|t_k\rangle$	$\|t_k\rangle \to \|u_i\rangle$
Transformation d'un ket	$c_k' = \sum_i S_{ki}^+.c_i$	$c_i = \sum_k S_{ik}.c_k'$
Transformation d'un bra	$c_k'^* = \sum_i c_i^*.S_{ik}$	$c_i^* = \sum_k c_k'^*.S_{ki}^+$
Transformation d'un opérateur	$A_{kl}' = \sum_{i,j} S_{ki}^+.A_{ij}.S_{jl}$	$A_{ij} = \sum_{k,l} S_{ik}.A_{kl}'.S_{lj}^+$

OBSERVABLES

Equation aux valeurs propres :

$$A|\psi\rangle = \lambda.|\psi\rangle$$

On ne prend que les vecteurs propres normés ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$).

Valeur propre non dégénérée : $A|\psi\rangle = \lambda.|\psi\rangle$ et $|\psi\rangle$ est unique.
Valeur propre dégénérée : $A|\psi^i\rangle = \lambda.|\psi^i\rangle$ avec $i = 1,2,\dots,g$ (g : degrés de dégénérescence).

Equation caractéristique :

$$Det[A - \lambda.\mathbb{I}] = 0$$

C'est une équation linéaire à coefficients complexes. λ sont les racines de cette équation.

Les vecteurs propres sont obtenus en remplaçant la valeur propre dans l'équation aux valeurs propres (en représentation matricielle) puis en normant le vecteur propre.

Opérateur hermétique :

Les valeurs propres sont réelles. Les vecteurs propres correspondants à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.

Observable :

Opérateur hermétique dont les vecteurs propres constituent une base de l'espace des états.
Orthonormalisation :

$$\left\langle\psi_n^i\middle|\psi_{n'}^j\right\rangle = \delta_{nn'}.\delta_{ij}$$

Fermeture :

$$\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i| = \mathbb{I}$$

Si deux observables A et B commutent, on peut construire une base orthonormée de l'espace des états constituée par les vecteurs propres commun à A et B.

Ensemble Complet d'Observables qui Commutent (E.C.O.C.) :

Un ensemble d'observables A, B, C ... est appelé ensemble complet d'observables qui commutent si :

- Toutes les observables A, B, C ... commutent deux à deux.
- La donnée des valeurs propres de tous les observables A, B, C ... suffit à déterminer un vecteur propre unique.

REPRÉSENTATION $|\vec{r}\rangle$ ET REPRÉSENTATION $|\vec{p}\rangle$

Dans l'espace des fonctions d'ondes.

	L'ensemble des ***fonctions delta*** forment une base continue de $\mathcal{F}$ $w_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$	L'ensemble des ***fonctions d'ondes planes*** forment une base continue de $\mathcal{F}$ $w_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi.\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\bullet\vec{r})}$
Base continue	$\{w_{\vec{r}_0}(\vec{r})\} \notin \mathcal{F}$	$\{w_{\vec{p}_0}(\vec{r})\} \notin \mathcal{F}$
Ortho-normalisation	$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0).\delta(\vec{r}-\vec{r}_0').d^3r = \delta(\vec{r}_0-\vec{r}_0')$	$\frac{1}{(2\pi.\hbar)^{3/2}}\int e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0-\vec{p}_0')\bullet\vec{r}}d^3r = \delta(\vec{p}_0-\vec{p}_0')$
Fermeture	$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0).\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0).d^3r_0 = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$	$\frac{1}{(2\pi.\hbar)^{3/2}}\int e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0\bullet(\vec{r}-\vec{r}')}d^3p_0 = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$
Développement d'une fonction d'onde	$\psi(\vec{r}) = \int \psi(\vec{r}_0).\delta(\vec{r}-\vec{r}_0).d^3r_0$	$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi.\hbar)^{3/2}}\int \bar{\psi}(\vec{p}_0).e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0\bullet\vec{r}}d^3p_0$
Composantes d'une fonction d'onde	$\psi(\vec{r}_0) = \int \psi(\vec{r}).\delta(\vec{r}-\vec{r}_0).d^3r$ Les composantes de $\psi(\vec{r})$ sur la base $\{w_{\vec{r}_0}(\vec{r})\}$ sont les valeurs de $\psi(\vec{r})$ aux points $\vec{r}_0$.	$\bar{\psi}(\vec{p}_0) = \frac{1}{(2\pi.\hbar)^{3/2}}\int \psi(\vec{r}).e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0\bullet\vec{r}}d^3r$ Les composantes de $\psi(\vec{r})$ sur la base $\{w_{\vec{p}_0}(\vec{r})\}$ sont les valeurs de la <u>transformée de Fourrier de</u> $\psi(\vec{r})$ aux points $\vec{p}_0$.

En notation de Dirac (espace des états)

Base continue	$\{\lvert\vec{r}\rangle\} \notin \mathcal{E}$	$\{\lvert\vec{p}\rangle\} \notin \mathcal{E}$
Relation d'orthonormalisation	$\langle\vec{r}_0\lvert\vec{r}_0'\rangle = \delta(\vec{r}_0-\vec{r}_0')$	$\langle\vec{p}_0\lvert\vec{p}_0'\rangle = \delta(\vec{p}_0-\vec{p}_0')$
Relation de fermeture	$\int \lvert\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0\rvert.d^3r_0 = \mathbb{I}$	$\int \lvert\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0\rvert.d^3p_0 = \mathbb{I}$
Développement d'une fonction d'onde	$\lvert\psi\rangle = \int \langle\vec{r}_0\lvert\psi\rangle.\lvert\vec{r}_0\rangle.d^3r_0$	$\lvert\psi\rangle = \int \langle\vec{p}_0\lvert\psi\rangle.\lvert\vec{p}_0\rangle.d^3p_0$
Composantes d'une fonction d'onde	$\psi(\vec{r}_0) = \langle\vec{r}_0\lvert\psi\rangle$ Les composantes de $\psi(\vec{r})$ sur la base $\{\lvert\vec{r}\rangle\}$ sont les valeurs de $\psi(\vec{r})$ aux points $\vec{r}_0$.	$\bar{\psi}(\vec{p}_0) = \langle\vec{p}_0\lvert\psi\rangle$ Les composantes de $\psi(\vec{r})$ sur la base $\{\lvert\vec{p}_0\rangle\}$ sont les valeurs de la <u>transformée de Fourrier de</u> $\psi(\vec{r})$ aux points $\vec{p}_0$.

Onde plane : Projection d'un vecteur de la base $\{|\vec{p}\rangle\}$ dans la base $\{|\vec{r}\rangle\}$.

$$\langle\vec{r}_0|\vec{p}_0\rangle = \frac{1}{(2\pi.\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\bullet\vec{r}_0)}$$

Produit scalaire :

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \langle\varphi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle.d^3r = \int \varphi^*(\vec{r}).\psi(\vec{r}).d^3r \qquad \text{Fermeture dans la base } \{|\vec{r}\rangle\}$$

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \langle\varphi|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\psi\rangle.d^3p = \int \bar{\varphi}^*(\vec{p}).\bar{\psi}(\vec{p}).d^3p \qquad \text{Fermeture dans la base } \{|\vec{p}\rangle\}$$

Identité de Bessel–Parseval : $\int \varphi^*(\vec{r}).\psi(\vec{r}).d^3r = \int \bar{\varphi}^*(\vec{p}).\bar{\psi}(\vec{p}).d^3p$

Opérateurs R ***et*** P **:**

Base continue	$\{\|\vec{r}\rangle\} \notin \mathcal{E}$	$\{\|\vec{p}\rangle\} \notin \mathcal{E}$
Opérateurs R_i	$\begin{cases} \langle\vec{r}\|X\|\psi\rangle = x.\langle\vec{r}\|\psi\rangle = x.\psi(\vec{r}) \\ \langle\vec{r}\|Y\|\psi\rangle = y.\langle\vec{r}\|\psi\rangle = y.\psi(\vec{r}) \\ \langle\vec{r}\|Z\|\psi\rangle = z.\langle\vec{r}\|\psi\rangle = z.\psi(\vec{r}) \end{cases}$ $\langle\vec{r}\|\vec{R}\|\psi\rangle = \vec{r}.\langle\vec{r}\|\psi\rangle = \vec{r}.\psi(\vec{r})$	
Opérateurs P_i	$\begin{cases} \langle\vec{r}\|P_x\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{r}\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial x} \\ \langle\vec{r}\|P_y\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\langle\vec{r}\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial y} \\ \langle\vec{r}\|P_z\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\langle\vec{r}\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial z} \end{cases}$ $\langle\vec{r}\|\vec{P}\|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}(\langle\vec{r}\|\psi\rangle) = \frac{\hbar}{i}\overrightarrow{grad}(\psi(\vec{r}))$	$\begin{cases} \langle\vec{p}\|P_x\|\psi\rangle = p_x.\langle\vec{p}\|\psi\rangle = p_x.\bar{\psi}(\vec{p}) \\ \langle\vec{p}\|P_y\|\psi\rangle = p_y.\langle\vec{p}\|\psi\rangle = p_y.\bar{\psi}(\vec{p}) \\ \langle\vec{p}\|P_z\|\psi\rangle = p_z.\langle\vec{p}\|\psi\rangle = p_z.\bar{\psi}(\vec{p}) \end{cases}$ $\langle\vec{p}\|\vec{P}\|\psi\rangle = \vec{p}.\langle\vec{p}\|\psi\rangle = \vec{p}.\bar{\psi}(\vec{p})$

Relations de commutation canoniques

$$[R_i, R_j] = 0 \quad ; \quad [P_i, P_j] = 0 \quad ; \quad [R_i, P_j] = i\hbar.\delta_{ij} \quad \text{avec} \quad i; j = x; y; z$$

Valeurs propres et vecteurs propres

$$\begin{cases} X|\vec{r}\rangle = x.|\vec{r}\rangle \\ Y|\vec{r}\rangle = y.|\vec{r}\rangle \\ Z|\vec{r}\rangle = y.|\vec{r}\rangle \end{cases} \qquad \begin{cases} P_x|\vec{p}\rangle = p_x.|\vec{p}\rangle \\ P_y|\vec{p}\rangle = p_y.|\vec{p}\rangle \\ P_z|\vec{p}\rangle = p_z.|\vec{p}\rangle \end{cases}$$

- Les opérateurs X, Y et Z ainsi que les opérateurs P_x , P_y et P_z sont des observables.
- L'ensemble $\{X, Y, Z\}$ est un E.C.O.C.
- L'ensemble $\{P_x, P_y, P_z\}$ est un E.C.O.C.

SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 04
ESPACE DES ÉTATS – NOTATION DE DIRAC

EXERCICE 01 :

L'espace des états d'un certain système physique est à trois dimensions ; soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ une base orthonormée de cet espace. On définit les kets $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ par :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle \quad \text{et} \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

1. Ces kets sont-ils normés ?
2. Calculer les matrices P_0 et P_1 représentant, dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, les opérateurs projecteurs sur ces états. Vérifier que ces matrices sont hermétiques.

EXERCICE 02 :

Soit K l'opérateur définit par $K = |\varphi\rangle\langle\psi|$, où $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$ sont deux vecteurs de l'espace des états.

1. A quelle condition K est-il hermétique ?
2. Calculer K^2. A quelle condition K est-il un opérateur projecteur ?
3. Montrer que K peut toujours s'écrire sous la forme $K = \lambda.P_1P_2$, où P_1 et P_2 sont des projecteurs et λ une constante que l'on calculera.

EXERCICE 03 :

1. Définir un opérateur unitaire.
2. Si l'opérateur U est unitaire, dans quel cas l'opérateur $U' = \lambda.U$ est aussi un opérateur unitaire ? (λ est une constante complexe).

   Dans un espace vectoriel à deux dimensions la matrice représentant l'opérateur A est donnée par :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3. Montrer que cet opérateur est unitaire.
4. Démontrer que $A_\theta^2 = A_{2\theta}$.
5. Quelle est l'interprétation géométrique de cet opérateur et de son adjoint ?

EXERCICE 04 :

Soit $|\varphi_n\rangle$ les états propres d'un opérateur hermétique H. On suppose que les états $|\varphi_n\rangle$ forment une base orthonormée discrète. L'opérateur $U(m,n)$ est définit par :

$$U(m,n) = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|$$

1. Calculer l'adjoint $U^+(m,n)$ de $U(m,n)$.
2. Calculer le commutateur $[H, U(m,n)]$.
3. Démonter que : $U(m,n)U^+(p,q) = \delta_{nq}U(m,p)$.
4. Calculer la trace de l'opérateur $U(m,n)$, notée $Tr\{U(m,n)\}$.
5. Soit A un opérateur, ayant pour éléments de matrice $A_{mn} = \langle\varphi_m|A|\varphi_n\rangle$.
   Démonter la relation : $A = \sum_{m,n} A_{mn}.U(m,n)$.
6. Montrer que : $A_{pq} = Tr\{AU^+(p,q)\}$.

EXERCICE 05 :

Dans un espace vectoriel à deux dimensions, on considère l'opérateur dont la matrice, dans une base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, s'écrit :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. σ_y est-il hermétique ? Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres (on donnera leur développement normalisé sur la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$).
2. Calculer les matrices représentant les projecteurs sur ces vecteurs propres. Vérifier alors que ceux-ci satisfont à des relations d'orthogonalité et de fermeture.

EXERCICE 06 :

Même exercice précédent pour les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dans les espaces à deux et à trois dimensions.

EXERCICE 07 :

Soit P_1 le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\mathcal{E}_1$, P_2 le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\mathcal{E}_2$ .Montrer que, pour que produit P_1P_2 soit encore un projecteur orthogonal, il faut et il suffit que P_1 et P_2 commutent ; dans ce cas, que est le sous-espace sur lequel projette P_1P_2 ?

EXERCICE 08 :

Dans un problème à une dimension, l'Hamiltonien H (observable) d'une particule est définit par :

$$H = \frac{P^2}{2m_0} + V(X)$$

Tel que X et P sont les opérateurs définis précédemment (voir résumé) et qui vérifient la relation :

$$[X, P] = i\hbar$$

Les vecteurs propres de H sont désignés par $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ où n est un indice discret.

1. Montrer que : $\langle\varphi_n|P|\varphi_m\rangle = \alpha\langle\varphi_n|X|\varphi_m\rangle$.
   Où α est un coefficient qui ne dépend de E_n et E_m que par l'intermédiaire de leur différence ; calculer α (utiliser le commutateur $[X, H]$).
2. En déduire (en utilisant la relation de fermeture) l'égalité :

$$\sum\nolimits_m (E_n - E_m)^2 |\langle\varphi_n|X|\varphi_m\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle\varphi_n|P^2|\varphi_n\rangle$$

EXERCICE 09 :

En utilisant la relation $\langle x|p\rangle = (2\pi.\hbar)^{-1/2}e^{ip.x/\hbar}$, calculer, en fonction de $\psi(x)$, les expressions $\langle x|XP|\psi\rangle$ et $\langle x|PX|\psi\rangle$. Peut-on retrouver directement ces résultats en utilisant le fait qu'en représentation $|x\rangle$, P agit comme $\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$?

EXERCICE 10 :

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Dans cette base, les deux opérateurs H et B sont définis par :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Où ω_0 et b sont des constantes réelles.

1. H et B sont-ils hermétiques ?
2. Montrer que H et B commutent. Donner une base de vecteurs propres communs à H et B .
3. Parmi les ensembles d'opérateurs : $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$, lesquels forment un E.C.O.C. ?

EXERCICE 11 :

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. On considère deux opérateurs L_z et S définis par :

$$L_z|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad ; \quad L_z|u_2\rangle = 0 \quad ; \quad L_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$

$$S|u_1\rangle = |u_3\rangle \quad ; \quad S|u_2\rangle = |u_2\rangle \quad ; \quad S|u_3\rangle = |u_1\rangle$$

1. Ecrire dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ les matrices représentant les opérateurs L_z, L_z^2, S, S^2. Ces opérateurs sont-ils des observables ?
2. Donner la forme de la matrice la plus générale représentant un opérateur qui commute avec L_z. Même question pour L_z^2 et pour S^2.
3. L_z^2 et S forment-ils un E.C.O.C. ? Donner une base de vecteurs propres communs.