Feuille TD 2

EXO:1

Une machine fabrique des pièces en grand nombre. On effectue un contrôle en prélevant 100 échantillons alétoires de 30 pièces chacun on obtient le tableau:

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	15	24	23	17	9	6	2

Ou x_i est le nombre de pièces défectueuses par échantillon et n_i le nombre de lots présentant x_i pièces défectueuses.

Peut-on ajuster cette répartition empirique par une loi binomiale ?

Vérifier l'ajustement à un seuil de signification $\alpha = 0.05$.

EXO:2

Note X	Nombre d'étudiants n_i
$2 \leq x < 4$	2
$4 \leq x < 6$	5
$6 \leq x < 8$	18
$8 \leq x < 10$	14
$10 \leq x < 12$	16
$12 \leq x < 14$	12
$14 \leq x < 16$	9
$16 \leq x < 18$	4

- ✓ *Par quelle loi de probabilité on peut procéder à un ajustement de la distribution empirique proposée.*
- ✓ *Vérifie l'ajustement par un test du $\chi 2$ à un seuil de signification $\alpha = 0.05$.*
- ✓ *Vérifier l'ajustement par un test de Kolmogorov à un seuil de signification $\alpha = 0.05$.*

EXO:3

Une flotte d'autobus est équipée de 4 types de pneus (A, B, C ,D). On mesure le kilométrage parcouru avant usure du pneu. On construit 3 classes de kilométrage (en milliers) <20, [20,30], >30 . On a obtenu les résultats suivants :

Observé	*A*	*B*	*C*	*D*	*Total*
< 20	*26*	*23*	*15*	*32*	*96*
[20 , 30]	*118*	*93*	*116*	*121*	*448*
> 30	*56*	*84*	*69*	*47*	*256*
Total	*200*	*200*	*200*	*200*	*800*

Les deux variables sont-elles indépendantes?

Solutions

EXO:1

On a

$\overline{X} = 2.95\ et\ s^2 = 2.59$

La proportion p de pièces défectueuses est

$$p = \frac{\overline{X}}{30} = 0.0983$$

Si l'on doit utiliser directement la table de loi binomiale , on utilise B(30 , 0.1). il reste évident qu'on devrait utiliser la loi B(30 , 0.0983) et utiliser une machine programmable. En posant $P(X=i) = C^i_n\ (0.01)^i\ (0.90)^{30-i}$

x_i	n_i	p_i	np_i
0	**4**	**0.0424**	**4.24**
1	**15**	**0.1413**	**14.13**
2	**24**	**0.2277**	**22.77**
3	**23**	**0.2361**	**23.61**
4	**17**	**0.1771**	**17.71**
5	**9**	**0.1023**	**10.23**
6	**6**	**0.0474**	**4.74**
7	**2**	**0.0181**	**1.81**

Les effectifs calculés np_i *doivent être supérieur à 5. On regroupe les classes.*

x_i	n_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
0,1	**19**	**18.37**	**0.63**	**0.0216**
2	**24**	**22.77**	**1.23**	**0.0664**
3	**23**	**23.61**	**-0.61**	**0.0158**
4	**17**	**17.71**	**-0.71**	**0.0285**
5	**9**	**10.23**	**-1.23**	**0.1479**
6,7	**8**	**6.55**	**1.45**	**0.321**
Total	**-**	**-**	**-**	**0.6012**

On a $\chi^2_c = 0.6012$ *le nombre de degrés de liberté tient compte de l'estimation p. il vaut donc 6-1-1=4 et comme* $0.6012 = \chi^2 < \chi_4^2\ (\alpha)\ ) = 9.488$*, on accepte l'hypothèse d'ajustement par une loi binomiale.*

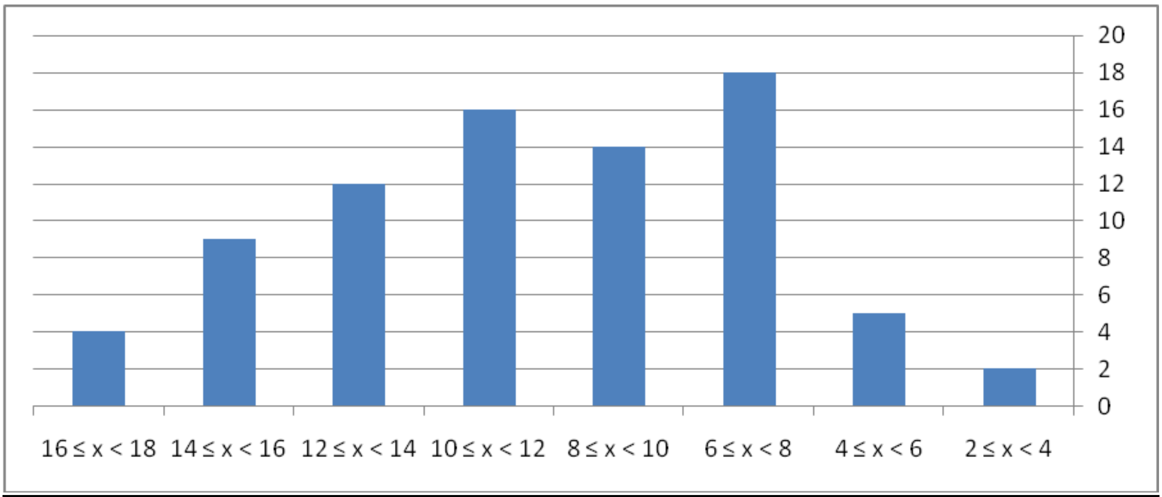
EXO:2

1- La forme de l'histogramme des fréquences permet d'affirmer qu'on peut proposer un ajustement par une loi normale.

Note X	n_i	Centre de classe x_i	f_i
2 ≤ x < 4	2	3	0.029
4 ≤ x < 6	5	5	0.071
6 ≤ x < 8	18	7	0.114
8 ≤ x < 10	14	9	0.2
10 ≤ x < 12	16	11	0.229
12 ≤ x < 14	12	13	0.171
14 ≤ x <16	9	15	0.129
16 ≤ x < 18	4	17	0.057
Total	70	-	1

Les paramètres de la loi normale m et σ sont estimés par
$\overline{\mathrm{X}} = 10.69 \; et \; \sigma = 3.45$

L'ajustement par une loi normale N(10.69 , 3.45)



2-On test la validité de l'ajustement par une variable X (suit une loi normale) de la densité de probabilité:

$$f(x) -= \frac{1}{3.45\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10.69)^2}{2(3.45)^2}}$$

Les probabilité P(a ≤ X ≤ b) = pi sont calculées au moyen de la table de la loi normale N(0 , 1):

Note X	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
$2 \leq x < 4$	2	0.0203	1.421	0.579	0.2359
$4 \leq x < 6$	5	0.607	4.249	0.751	0.1327
$6 \leq x < 8$	18	0.1337	9.359	-1.359	0.1973
$8 \leq x < 10$	14	0.2001	14.007	0.007	0.000003
$10 \leq x < 12$	16	0.2273	15.0911	0.089	0.00049
$12 \leq x < 14$	12	0.1835	12.845	-0.845	0.0556
$14 \leq x < 16$	9	0.1067	7.49	1.531	0.3129
$16 \leq x < 18$	4	0.048	3.136	0.864	0.238

Les effectifs calculés np_i doivent être supérieur à 5. On regroupe les classes.

Note X	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
$2 \leq x < 6$	7	0.081	5.67	0.3119
$6 \leq x < 8$	8	0.1337	9.359	0.1973
$8 \leq x < 10$	14	0.2001	14.007	0.000003
$10 \leq x < 12$	16	0.2273	15.0911	0.00049
$12 \leq x < 14$	12	0.1835	12.845	0.0556
$14 \leq x < 18$	13	0.1515	10.605	0.5409
Total	70	-	-	1.1062

La valeur de χ^2_c calculée est $\chi^2_c = 1.1062$. Le nombre de degrés de liberté est k= 6-1-2 =3 car on a deux paramètres estimés m et σ^2. Au seuil de signification $\alpha = 0.05$, on a : $\chi^2_3 = 7.81$, comme $1.1062 = \chi^2_c < \chi^2_3(\alpha) = 7.81$, on accepte l'ajustement par une loi normale N(10.69 , 3.45).

3-On vérifie l'ajustement par le test de Kolmogorov

Centre de classe x_i	$F_n(x)$	$F(x)=P(X \leq x)$	$\lvert F_n(x) - F(x) \rvert$
3	0.0286	0.0203	0.0083
5	0.1	0.081	0.019
7	0.2143	0.2147	0.0004
9	0.4143	0.4148	0.0005
11	0.6429	0.6421	0.0008
13	0.8143	0.8256	0.0113
15	0.9429	0.9323	0.0106
17	1	0.9771	0.0229

L'écart-type maximum est : $D_n = Max \lvert F_n(x) - F(x) \rvert = 0.0229$ et la valeur critique d_n correspondante est (pour n=70) est $d_n = 0.15975$ (d_n est donnée par la table du test de Kolmogorov-Smirnov pour $\alpha = 0.05$ et n=70). On a donc $D_n = = 0.0229 < d_n = 0.15975$ et on conclut que l'hypothèse de normalité ne doit pas être rejetée.

EXO:2

On calcule le tableau des fréquences théoriques :

Théorique	*A*	*B*	*C*	*D*	*Total*
< 20	*24*	*24*	*24*	*24*	*96*
[20 , 30]	*112*	*112*	*112*	*112*	*448*
> 30	*64*	*64*	*64*	*64*	*256*
Total	*200*	*200*	*200*	*200*	*800*

*((96/800)*200= 24 , (448/800)*200 = 112 , (256/800)*200 = 64)*

$\chi^2_c = (26-24)^2/24+(23-24)^2/24+ (15-24)^2/24+(32-24)^2/24+(118-112)^2/112+(93-112)^2/112+ (116-112)^2/112+(121-112)^2/112+(56-64)^2/64+(84-64)^2/64+(69-64)^2/64+(47-64)^2/64=22,82$

On compare à une $\chi^2_{(4-1)(3-1)}(0.05)=\chi^2_6\ (0.05)=12.59$ **(** *valeur li dans la table du* χ^2 **)**

22.82 = $\chi^2_c > \chi^2_6(0.05)=12.59$ *.* Donc *on rejette l'hypothèse que le kilométrage obtenu soit indépendant de la marque de pneus.*