

IV – Propagation dans les milieux anisotropes

1 Milieux anisotropes

Du point de vue de la propagation d'une onde électromagnétique, un milieu anisotrope, appelé aussi milieu biréfringent, est un milieu dans lequel la polarisation induite dépend de la direction du champ électrique appliqué, ce qui entraîne que la polarisation et le champ appliqué ne sont pas forcément parallèles.

1.1 Exemples

Milieu cristallin

Considérons par exemple un cristal constitué d'un réseau d'ions négatifs, en position fixe dans la maille élémentaire et d'ions positifs pouvant occuper deux sites différents A et B , de part et d'autre du barycentre des charges négatives. En l'absence de champ, les deux positions étant équiprobables, la polarisation du cristal est nulle. Lorsqu'on applique un champ électrique dans la direction Ox , l'un des sites devient privilégié et une polarisation apparaît dans la même direction. Si le champ appliqué est perpendiculaire à Ox , cet effet n'apparaît plus, la polarisation induite dans le cristal est seulement due à la polarisabilité électronique des ions.

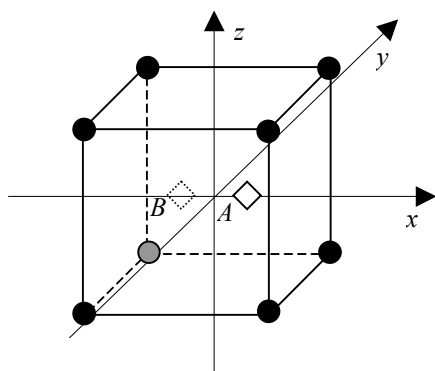


Figure [IV-1]

Modèle de cristal anisotrope. Représentation d'une maille. Les ronds noirs symbolisent des ions négatifs, le carré blanc un ion positif qui peut occuper l'un ou l'autre des sites A ou B .

On comprend sur cet exemple que la susceptibilité du milieu dépend de la direction du champ appliqué et que la polarisation créée n'est en général pas parallèle au champ. De façon plus générale, la maille d'un cristal étant anisotrope, la réponse du milieu dépendra de la direction du champ appliqué.

Polarisabilité moléculaire

Une molécule étant un assemblage d'atomes, elle n'est en général pas isotrope du point de vue de sa réponse à un champ électrique. Pour une molécule diatomique par exemple, le moment dipolaire créé sera en général plus grand si le champ appliqué est dirigé le long de l'axe joignant les deux noyaux atomiques.

Cependant, lorsque les molécules sont réunies au sein d'un fluide, liquide ou gaz, leur orientation est aléatoire. La polarisation macroscopique créée par un ensemble de molécules est donc en moyenne parallèle au champ appliqué et la susceptibilité est indépendante de la direction de celui-ci. Pour que le milieu soit anisotrope, il faut que les molécules soient alignées au moins partiellement dans une direction particulière, ce qui est le cas dans les

cristaux liquides ou lorsque l'alignement est produit par une cause extérieure (biréfringence induite).

Biréfringence induite

Dans un fluide (ou un cristal ou un verre) globalement isotrope, une anisotropie peut être induite par application d'une contrainte extérieure.

L'application d'un champ électrique statique sur un fluide a tendance à aligner les molécules de façon à ce que leur axe de plus grande polarisabilité soit parallèle au champ. La susceptibilité du milieu sera alors plus grande pour un champ appliqué parallèle au champ statique que pour un champ perpendiculaire à celui-ci. Le champ statique fait apparaître une anisotropie dans le fluide, c'est l'**effet Kerr**. Remarquons que l'effet d'alignement étant indépendant du sens du champ, il peut être induit aussi par un champ appliqué alternatif, notamment par une onde électromagnétique intense. C'est l'**effet Kerr optique**. Dans le cas d'un cristal, la création ou la modification de l'anisotropie par un champ électrique est appelée **effet Pockels**.

D'autres contraintes peuvent aussi rompre l'isotropie d'un milieu. Un gradient de vitesse dans un fluide en écoulement peut aligner des molécules par un effet de cisaillement. Des contraintes mécaniques sur un solide créent aussi une anisotropie dans la susceptibilité. Cet effet peut d'ailleurs être utilisé pour localiser les contraintes dans un milieu transparent.

1.2 Tenseur de susceptibilité

Si le milieu est linéaire, sa réponse à un champ électrique sinusoïdal est décrite par le tenseur de susceptibilité :

$$[IV-1] \quad \vec{P} = \epsilon_0 \underline{\underline{\chi}} \vec{E}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Rappelons que ceci n'est vrai que pour un champ appliqué sinusoïdal ou statique. La réponse pour une dépendance en temps quelconque serait donnée par des intégrales de convolution.

La relation ci-dessus est une relation locale, entre les amplitudes complexes des champs \vec{P} et \vec{E} . Les termes de susceptibilité χ_{ij} sont dans le cas général des nombres complexes. Nous ne nous intéresserons ici qu'au cas des milieux transparents pour lesquels ces nombres sont réels. Le symbole de soulignement caractérisant les valeurs complexes sera omis. Enfin, nous considérerons le cas d'un milieu homogène pour lequel la susceptibilité est indépendante de la position.

La susceptibilité du milieu semble donc être caractérisée par neuf coefficients. On montre cependant que la matrice de ces coefficients doit être symétrique ($\chi_{ij} = \chi_{ji}$) ce qui réduit à six le nombre de coefficients indépendants.

Cette matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable. Il existe donc un repère particulier X, Y, Z dans lequel le tenseur de susceptibilité est diagonal :

$$[\text{IV-2}] \quad \begin{pmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_a & 0 & 0 \\ 0 & \chi_b & 0 \\ 0 & 0 & \chi_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}$$

Les axes X, Y, Z sont les **axes principaux**. Dans le repère des axes principaux, la susceptibilité du milieu est caractérisée par trois coefficients seulement (mais trois autres sont toujours nécessaires pour définir l'orientation du repère des axes principaux).

Un cas fréquemment rencontré est le cas du **milieu uniaxe** pour lequel deux des coefficients diagonaux sont égaux. Si par exemple $\chi_a = \chi_b$, on peut écrire, dans le plan XY :

$$\begin{pmatrix} P_X \\ P_Y \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_a & 0 \\ 0 & \chi_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \end{pmatrix}$$

soit

$$\vec{P}_\perp = \varepsilon_0 \chi_a \vec{E}_\perp$$

en notant avec l'indice \perp les composantes des vecteurs perpendiculaires à l'axe OZ . Le milieu présente donc une symétrie de révolution autour de cet axe. Ce type de réponse se rencontre par exemple dans le cas de l'alignement d'un fluide par un champ électrique (effet Kerr).

En revenant à la définition du champ \vec{D} ,

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon_r}} \vec{E}$$

on peut définir le tenseur de permittivité relative :

$$\underline{\underline{\varepsilon_r}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\chi}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base des axes principaux, on a donc :

$$[\text{IV-3}] \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_b & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \chi_a & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \chi_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_c \end{pmatrix}$$

Par analogie avec les résultats en milieu isotrope, on peut définir trois indices de réfraction $n_a = \sqrt{\varepsilon_a}$, $n_b = \sqrt{\varepsilon_b}$ et $n_c = \sqrt{\varepsilon_c}$.

2 Propagation d'une onde plane sinusoïdale

2.1 Equation d'onde

Selon la méthode habituelle, nous cherchons des solutions des équations de Maxwell dans le milieu sous la forme d'ondes planes :

$$\vec{\mathcal{E}}(t, \vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

On obtient l'équation d'onde par élimination du champ magnétique entre les deux équations au rotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge (-i\omega\vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 (-\omega^2 \underline{\underline{\varepsilon}}_r \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\underline{\varepsilon}}_r \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}.$$

Le champ étant le champ d'une onde plane de vecteur d'onde \vec{k} la deuxième équation s'écrit :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -i\vec{k} (-i\vec{k} \cdot \vec{E}) - (-k^2) \vec{E} = -\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) + k^2 \vec{E}$$

Remarquons qu'ici la divergence de \vec{E} n'est pas nulle comme dans le cas d'un milieu isotrope. En effet, comme on peut le voir facilement en utilisant la base des axes principaux

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}_r \vec{E}) = 0 \text{ n'implique pas } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

En regroupant les deux expressions on obtient l'équation d'onde :

$$[\text{IV-4}] \quad \boxed{\frac{\omega^2}{c^2} \underline{\underline{\varepsilon}}_r \vec{E} - k^2 \vec{E} + \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0}$$

La direction du vecteur d'onde est caractérisée par le vecteur unitaire \vec{u}_k :

$$\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}_k$$

d'où :

$$[\text{IV-5}] \quad \frac{1}{n^2} \underline{\underline{\varepsilon}}_r \vec{E} - \vec{E} + \vec{u}_k (\vec{u}_k \cdot \vec{E}) = 0$$

Plaçons nous dans le repère des axes principaux du milieu. Le vecteur unitaire \vec{u}_k est défini par ses cosinus directeurs :

$$\vec{u}_k = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y + \gamma \vec{u}_z, \text{ avec } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

En développant l'équation d'onde sur les trois axes principaux, on obtient un système de trois équations :

$$\left(\frac{n_a^2}{n^2} - 1 \right) E_x + u_{kx} (\vec{u}_k \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\left(\frac{n_b^2}{n^2} - 1 \right) E_y + u_{ky} (\vec{u}_k \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\left(\frac{n_c^2}{n^2} - 1 \right) E_z + u_{kz} (\vec{u}_k \cdot \vec{E}) = 0$$

Bien qu'on ait utilisé les axes principaux, les trois composantes du champ électrique ne peuvent pas être traitées séparément à cause du terme en $\vec{u}_k \cdot \vec{E}$. Il faut donc traiter le système complet :

$$[\text{IV-6}] \quad \begin{cases} \left(\frac{n_a^2}{n^2} - 1 + \alpha^2 \right) E_x + \alpha\beta E_y + \alpha\gamma E_z = 0 \\ \beta\alpha E_x + \left(\frac{n_b^2}{n^2} - 1 + \beta^2 \right) E_y + \beta\gamma E_z = 0 \\ \gamma\alpha E_x + \gamma\beta E_y + \left(\frac{n_c^2}{n^2} - 1 + \gamma^2 \right) E_z = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc un système de trois équations homogènes en E_x , E_y , E_z de la forme

$$(M) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Ce système n'a de solution non triviale ($E_x, E_y, E_z \neq 0$) que si le déterminant de la matrice (M) est nul.

Pour une direction de propagation donnée (α, β, γ fixés) cette condition se traduit par une équation du troisième degré en n^2 . La solution $1/n^2 = 0$ étant écartée, il reste deux valeurs possibles n_1 et n_2 de l'indice de réfraction. Selon la convention habituelle, en gardant les solutions correspondant à n_1 et n_2 positifs, on trouve donc quatre solutions pour le vecteur d'onde :

$$\vec{k}_1 = \pm n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_k \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \pm n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u}_k$$

A chaque valeur de l'indice correspond un vecteur propre définissant la polarisation du champ électrique de l'onde. Il y a donc deux **modes propres de polarisation** susceptibles de se propager sans déformation dans le milieu.

Pour simplifier l'étude, nous poursuivons la description de la propagation dans le cas plus simple d'un milieu uniaxe.

2.2 Cas d'un milieu uniaxe

Pour un milieu uniaxe, deux des indices sont égaux. Selon la dénomination usuelle, nous poserons $n_a = n_b = n_o$, l'indice o signifiant **ordinaire** et $n_c = n_e$, avec l'indice e pour **extraordinaire**.

Nous avons remarqué qu'un tel milieu présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe Z, que nous appellerons **axe optique**. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, choisir la direction de propagation dans le plan yOz , c'est à dire choisir $\alpha = 0$. En tenant compte de la relation $\beta^2 + \gamma^2 = 1$, le système d'équation se réduit alors à :

$$[\text{IV-7}] \quad \begin{pmatrix} \frac{n_o^2}{n^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_o^2}{n^2} - \gamma^2 & \beta\gamma \\ 0 & \beta\gamma & \frac{n_e^2}{n^2} - \beta^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

Les solutions pour l'indice de réfraction n sont celles qui annulent le déterminant de la matrice :

$$\left(\frac{n_o^2}{n^2} - 1\right) \left[\left(\frac{n_o^2}{n^2} - \gamma^2\right) \left(\frac{n_e^2}{n^2} - \beta^2\right) - \beta^2 \gamma^2 \right] = 0$$

soit

$$[\text{IV-8}] \quad \frac{n_o^2 n_o^2 n_e^2}{n^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\gamma^2}{n_o^2} - \frac{\beta^2}{n_e^2} \right) = 0$$

La solution $1/n^2 = 0$ qui correspondrait à un vecteur d'onde infini étant écartée, nous avons donc deux solutions pour l'indice de réfraction :

$$- n = n_o .$$

Solution indépendante de la direction de propagation, comme si le milieu était isotrope, d'où la qualification d'**ordinaire** pour l'onde associée à cette solution et pour l'indice de réfraction correspondant.

$$- n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{n_o^2} + \frac{\beta^2}{n_e^2}}} .$$

Pour cette solution, l'indice dépend de la direction de propagation par l'intermédiaire des coefficients directeurs α et β , c'est pourquoi l'onde associée est appelée **extraordinaire**.

2.3 Surface des indices

Une représentation spatiale de la variation de l'indice de réfraction avec la direction de propagation peut être obtenue en traçant la surface balayée par un vecteur de norme n et de direction \vec{u}_k . Cette surface est appelée **surface des indices**. Elle comporte deux nappes correspondant aux deux solutions de l'équation de dispersion. Nous allons l'étudier, en nous limitant au cas d'un milieu uniaxe.

La nappe correspondant à l'onde ordinaire est simplement une sphère de rayon n_o .

Pour l'onde extraordinaire, en appelant θ l'angle entre \vec{u}_k et l'axe optique \vec{OZ} , les coefficients directeurs sont $\beta = \sin \theta$, $\gamma = \cos \theta$. L'équation donnant l'indice n peut être mise sous la forme :

$$[\text{IV-9}] \quad \frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

Soit, en notant $n_y = n \sin \theta$ et $n_z = n \cos \theta$ les composantes du vecteur $n\vec{u}_k$ sur les axes \vec{OY} et \vec{OZ} :

$$[\text{IV-10}] \quad \frac{n_y^2}{n_e^2} + \frac{n_z^2}{n_o^2} = 1$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de demi axe n_o dans la direction de l'axe optique et n_e dans la direction perpendiculaire. Par rotation autour l'axe optique, on trouve donc que la nappe correspondant à l'onde extraordinaire est un ellipsoïde d'axe \vec{OZ} .

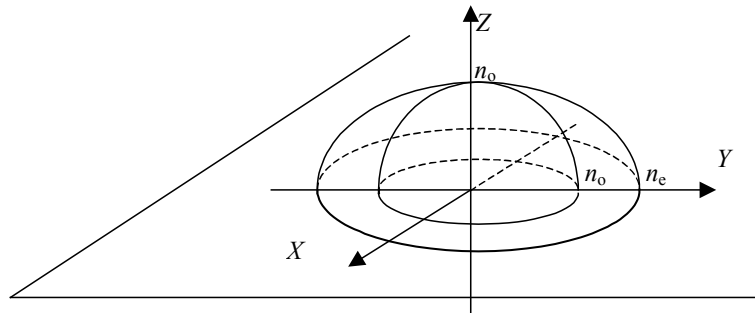


Figure [IV-2] Surface des indices dans un matériau uniaxe.
Seule la partie $z>0$ est représentée, dans le cas $n_o < n_e$.

Les deux nappes de la surface d'onde sont représentées sur la figure ci-dessus. Pour simplifier, seule la partie située au dessus du plan XOY a été tracée. Selon les milieux, l'indice ordinaire peut être supérieur ou inférieur à l'indice extraordinaire, la figure est tracée dans le cas $n_o < n_e$.

Remarque : Au facteur ω/c près, la surface des indices est aussi la surface décrite par l'extrémité du vecteur d'onde \vec{k} lorsque sa direction varie. On peut donc définir une **surface des vecteurs d'onde** qui a les mêmes caractéristiques que la surface des indices.

2.4 Structure de l'onde

Il s'agit maintenant de trouver la position du champ électrique et du champ magnétique de l'onde par rapport à la direction de propagation.

En ce qui concerne le champ magnétique, la solution est simple. L'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

étant indépendante du milieu, elle reste valable ici. Elle conduit donc à la relation

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

pour une onde plane progressive. On en déduit que le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation, ce que l'on aurait pu obtenir aussi à partir de l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, indépendante du milieu elle aussi. De plus le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique.

Pour le champ électrique, la direction dépend de la nature de l'onde. Pour l'obtenir, il faut rechercher les vecteurs propres de la matrice de l'équation [VI-7] correspondant à l'onde ordinaire et à l'onde extraordinaire.

- Pour l'onde ordinaire, les éléments de la première colonne de la matrice sont tous nuls. la composantes E_X est donc quelconque. Par contre, le déterminant de la sous-matrice (M_{YZ}) constituée par les deux dernières lignes et colonnes n'étant pas nul les composantes E_Y et E_Z doivent être nulles. Le champ est donc perpendiculaire au plan contenant l'axe optique et la direction de propagation. On retrouve un trièdre orthogonal direct $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ comme dans un milieu isotrope.

- Pour l'onde extraordinaire, si l'angle θ est différent de zéro, le premier élément de la première ligne de la matrice n'est pas nul, ce qui impose $E_X = 0$. Le champ est donc dans le

plan contenant l'axe optique et la direction de propagation. Sa direction dans ce plan est celle du vecteur propre de la sous matrice (M_{YZ}), d'où, en prenant la dernière ligne par exemple :

$$\gamma\beta E_Y + \left(\frac{n_e^2}{n^2} - \beta^2 \right) E_Z = 0$$

En tenant compte de la valeur de n (équation [IV-9]), cette équation devient :

$$\frac{\sin\theta}{n_e^2} E_Y + \frac{\cos\theta}{n_o^2} E_Z = 0$$

soit, avec les notations de l'équation [IV-10],

$$\frac{n_Y}{n_e^2} E_Y + \frac{n_Z}{n_o^2} E_Z = 0$$

Remarquons par ailleurs que, pour un point se déplaçant de dn_Y , dn_Z en suivant l'ellipse on a :

$$2 \frac{n_Y}{n_e^2} dn_Y + 2 \frac{n_Z}{n_o^2} dn_Z = 0$$

ce qui montre que le vecteur de composantes $\frac{n_Y}{n_e^2}$, $\frac{n_Z}{n_o^2}$ est normal à l'ellipse.

Le champ électrique, orthogonal à ce vecteur, est donc porté par la tangente à l'ellipse.

Enfin, le vecteur de Poynting moyen $\langle \vec{J} \rangle = \langle \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}} / \mu_0 \rangle$ étant orthogonal à \vec{E} et à \vec{B} , il est porté par la normale à l'ellipse. La disposition des quatre vecteurs est reportée sur la figure [IV-3] pour l'onde ordinaire (a) et pour l'onde extraordinaire (b).

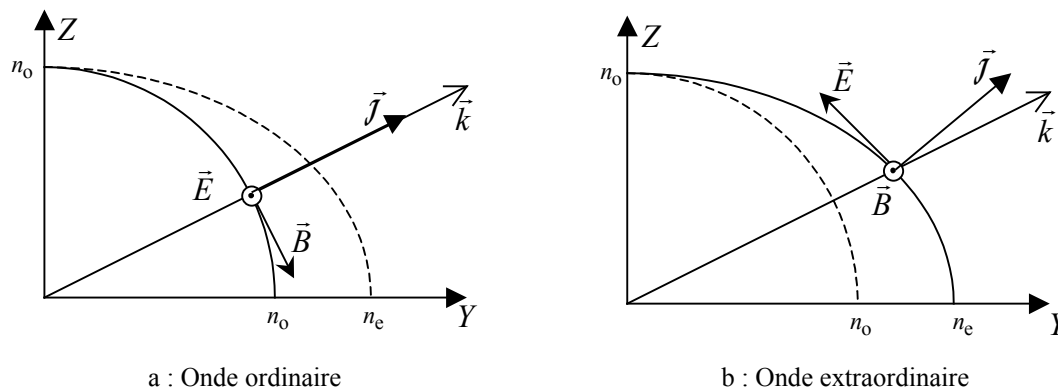


Figure [IV-3] Disposition des champs électrique et magnétique et du vecteur intensité pour les deux modes propres de propagation

Remarques :

- Dans le cas de l'onde extraordinaire, le vecteur intensité ne suit pas le vecteur d'onde, or celui-ci est toujours orthogonal aux plans d'onde. On en déduit donc que le rayon lumineux n'est pas orthogonal aux surfaces d'onde.

- Pour une onde se propageant le long de l'axe optique ($\theta = 0$), les deux indices de réfraction sont égaux. Une telle onde se propage avec l'indice n_o quelle que soit sa direction de polarisation.

2.5 Double réfraction

Considérons le cas d'un faisceau lumineux arrivant en incidence normale sur un milieu diélectrique uniaxe dont l'axe optique fait un angle α avec la face d'entrée. Si la polarisation de ce faisceau est quelconque, il se divisera au sein du milieu en deux faisceaux réfractés, correspondants aux deux modes propres de polarisation. Le faisceau ordinaire, dont le champ électrique est perpendiculaire à l'axe optique, se propage orthogonalement à la face d'entrée. Le faisceau extraordinaire, dont le champ est dans le plan contenant l'axe optique et la normale à la surface, se propage selon un petit angle β par rapport à cette normale. Si l'étendue spatiale des faisceaux est assez faible, ils seront complètement séparés à la sortie de la lame. Il ne faut pas oublier cependant que pour les deux ondes les plans d'onde (plans d'égale phase) restent parallèle à la surface.

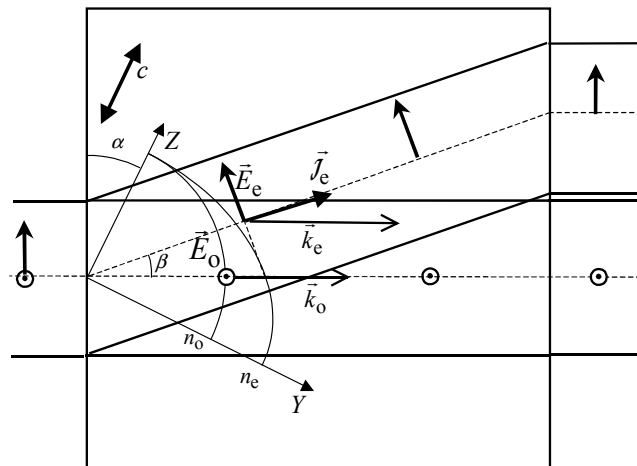


Figure [IV-4] Double réfraction à la traversée d'un milieu biréfringent uniaxe.
L'axe optique, noté c , est parallèle à OZ .

C'est cette propriété de double réfraction qui est à l'origine de la dénomination **milieu biréfringent**.

Remarquons qu'il n'y a pas de double réfraction si l'axe optique est parallèle à la surface ou perpendiculaire à celle-ci.

2.6 Cas général, milieux biaxes

Nous avons vu que, dans le cas général, le milieu est caractérisé par trois indices n_a , n_b et n_c , correspondants aux trois axes principaux X , Y et Z . La figure [IV-5] représente une partie de la surface des indices dans le cas $n_a < n_b < n_c$.

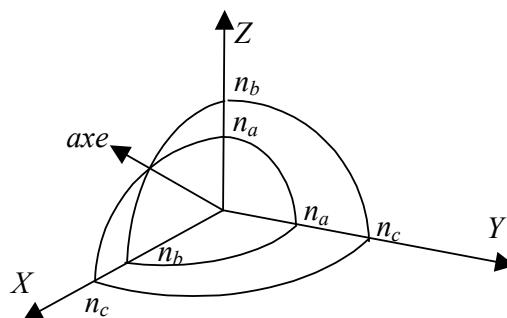


Figure [IV-5] Surface des indices dans un matériau biaxe.
Un huitième de la surface est représenté, dans le cas $n_a < n_b < n_c$.

Pour tracer cette surface, on peut remarquer que, lorsque le vecteur d'onde est dans le plan YOZ ($\alpha \neq 0$), l'une des solutions du système [IV-6] est une onde dont le champ électrique est dirigé selon l'axe OX , avec un indice de réfraction $n=n_a$. L'intersection de la surface avec le plan YOZ est donc un cercle de rayon n_a . Pour l'autre solution, de champ électrique perpendiculaire à OX , l'intersection est une ellipse de demi-axes n_b et n_c . L'allure de la surface est donc donnée par ses intersections avec les trois plans du repère XYZ .

On constate sur la figure que, pour presque toutes les directions, il y a deux modes propres de polarisation caractérisés par deux indices différents.

Dans deux directions particulières cependant, les deux indices sont égaux, ce sont les deux **axes optiques**, d'où l'appellation de **milieu biaxe**. L'un de ces axes est apparent sur la figure l'autre est symétrique de celui-ci par rapport à l'axe OZ (ou OX).

Remarque :

- De nombreux ouvrages définissent aussi une surface, appelée **ellipsoïde des indices**. C'est la surface obtenue en portant un segment de longueur n dans la direction du champ \vec{D} . Contrairement à la **surface des indices** que nous avons utilisé ici, c'est un ellipsoïde ne comportant qu'une seule nappe. Cette surface permet aussi de retrouver géométriquement les modes propres de polarisation mais nous n'aborderons pas ce point ici pour éviter les confusions. Il faut surtout retenir que, malgré des dénominations voisines, ces deux surfaces sont totalement différentes.

3 Etude de quelques dispositifs

3.1 Séparateurs de polarisation

Un séparateur de polarisation est un dispositif qui partage un faisceau lumineux incident en deux faisceaux distincts, de polarisation définie. Si l'un des deux faisceaux est arrêté, le dispositif devient un polariseur (ou un analyseur).

Nous avons vu qu'une simple lame biréfringente épaisse pouvait agir comme séparateur si l'axe optique n'est pas parallèle ou perpendiculaire à la face d'entrée. Un cristal de calcite clivé selon ses faces naturelles permet de mettre en évidence ce phénomène. Pour une épaisseur de 1 cm, la séparation des faisceaux est d'environ 1 mm et on voit clairement deux images à travers le cristal.

Pour une utilisation pratique cependant, comme les faisceaux ressortent parallèles, ils ne sont pas facile à séparer si leur diamètre est grand. Dans les dispositifs séparateurs usuels, on essaie d'obtenir des faisceaux émergeant selon des angles différents. Nous présentons ici quelques exemples.

Les séparateurs de **Rochon** et de **Wollaston** utilisent deux prismes accolés et jouent sur le fait que l'angle de réfraction sur la surface intermédiaire dépend de l'écart d'indice entre les deux. Ces deux dispositifs sont représentés ci dessous dans le cas de la calcite, le matériau généralement utilisé, pour lequel $n_o > n_e$.

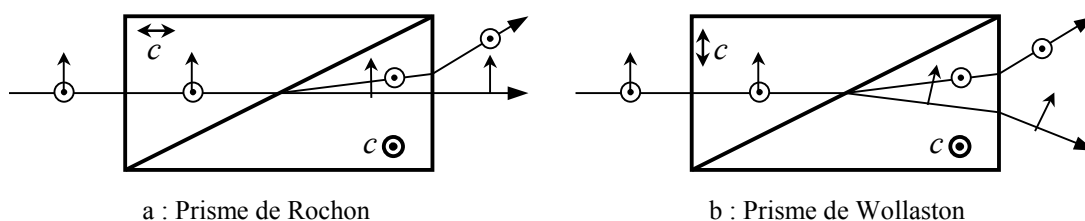


Figure [IV-6] Prismes séparateurs de Rochon et de Wollaston.

Le séparateur de **Glan** joue sur la différence des angles limites de réflexion totale entre les ondes ordinaire et extraordinaire. Pour la calcite, l'indice $n_o = 1.658$ donne un angle limite de $37^\circ 06'$, l'indice $n_e = 1.486$, un angle de $42^\circ 18'$. Dans le dispositif représenté, pour un angle au sommet de 40° , l'onde ordinaire subit la réflexion totale alors que l'onde extraordinaire continue sa route et est reprise dans le deuxième prisme.

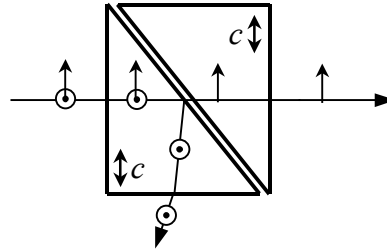


Figure [IV-7] Prisme séparateur de Glan.

Pour compléter la description des séparateurs de polarisation, il faut encore citer les polariseurs en plaque, constitués de matériaux dans lesquels l'absorption dépend de la direction du vecteur champ électrique. Si la différence d'absorption est assez grande, une des polarisations est presque totalement éteinte alors que l'autre n'est que partiellement atténuée. Ces matériaux sont encore des milieux anisotropes mais, contrairement à ce que nous avons étudié ici, les coefficients du tenseur de susceptibilité sont complexes et l'anisotropie se manifeste surtout sur la partie imaginaire.

3.2 Lames biréfringentes

3.2.1 Cas général

Les lames biréfringentes sont des lames de faible épaisseur taillées dans un matériau anisotrope, généralement du quartz cristallin, dont l'axe est parallèle aux faces.

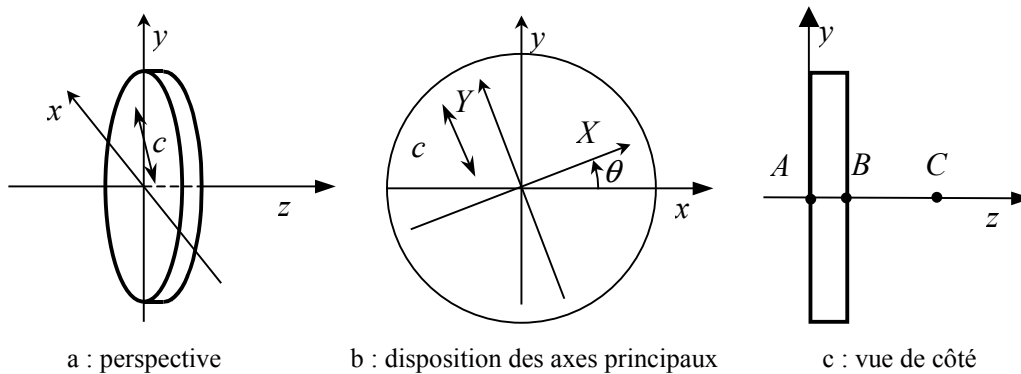


Figure [IV-8] lame biréfringente.

Une onde plane arrive en incidence normale sur la lame avec une polarisation quelconque. Dans le système d'axes représenté sur la figure [IV-8.a], elle peut être décrite par sa représentation complexe :

$$\vec{\mathcal{E}}_{xy}(t, z) = (E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$$

$k = \omega/c$ est le vecteur d'onde dans l'air (indice $n = 1$). Les composantes E_x et E_y peuvent être complexes. Les pertes par réflexion étant faibles et dépendant peu de la polarisation, on considérera que les amplitudes ne sont pas modifiées par la traversée de la lame.

Pour étudier l'évolution de l'onde pendant la traversée de la lame, il est nécessaire de la décomposer selon les modes propres de polarisation ordinaire et extraordinaire. Il faut pour cela projeter le vecteur champ électrique sur le systèmes d'axes principaux X et Y , l'axe Y étant parallèle à l'axe optique (figure [IV-8.b]).

Le champ avant la lame est alors :

$$\vec{\mathcal{E}}_{XY}(t, z) = (E_X \vec{u}_X + E_Y \vec{u}_Y) e^{i(\omega t - kz)} = (R) \vec{\mathcal{E}}_{xy}(t, z)$$

(R) étant la matrice de rotation du changement d'axes : $(R) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Après traversée de la lame d'épaisseur e , au point C d'abscisse z (figure [IV-8.c]), la composante en X devient :

$$\mathcal{E}_X'(t, z) = E_X \exp(-ik[ABC]) e^{i\omega t} = E_X \exp(-i[kn_o e + k(z-e)]) e^{i\omega t} = E_X e^{-i\varphi_o} e^{i(\omega t - kz)}$$

avec $\varphi_o = k(n_o - 1)e$

De la même façon, la composante en Y devient :

$$\mathcal{E}_Y'(t, z) = E_Y e^{-i\varphi_e} e^{i(\omega t - kz)}$$

avec $\varphi_e = k(n_e - 1)e$

Dans le système d'axes principaux, l'effet de la traversée de la lame est donc décrit par une matrice diagonale :

$$\vec{\mathcal{E}}'_{XY}(t, z) = (L) \vec{\mathcal{E}}_{XY}(t, z), \text{ avec } (L) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_o} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_e} \end{pmatrix}$$

On revient enfin au système d'axes xy par la rotation inverse, $(R^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Dans ce système d'axes, le champ après traversée de la lame est donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}'_{xy}(t, z) = (R^{-1})(L)(R)\vec{\mathcal{E}}_{xy}(t, z)}$$

Cette expression traduit la succession des opérations : décomposition sur les modes propres de propagation, propagation selon ces modes propres, recombinaison à la sortie de la lame. Il faut procéder ainsi pour chaque élément lorsque plusieurs polariseurs et lames biréfringentes sont disposés successivement dans le faisceau, avec des orientations variables.

3.2.2 Différents types de lames

Pour étudier l'effet d'une seule lame, on peut plus simplement se placer dans le repère des axes principaux et définir le champ incident par ses composantes selon ces axes.

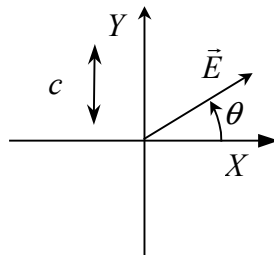


Figure [IV-9] lame biréfringente, projection du champ selon les axes principaux.

Prenons une onde incidente polarisée rectilignement selon une direction faisant l'angle θ avec l'axe Ox :

$$\vec{\mathcal{E}}(t, z) = \vec{E} e^{i(\omega t - kz)} = E_i (\cos \theta \vec{u}_X + \sin \theta \vec{u}_Y) e^{i(\omega t - kz)}$$

L'onde à la sortie est :

$$\vec{\mathcal{E}}'(t, z) = \vec{E}' e^{i(\omega t - kz)} = E_i (e^{-i\varphi_0} \cos \theta \vec{u}_X + e^{-i\varphi_e} \sin \theta \vec{u}_Y) e^{i(\omega t - kz)}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{\mathcal{E}}'(t, z) = E'_i (\cos \theta \vec{u}_X + e^{-i\Delta\varphi} \sin \theta \vec{u}_Y) e^{i(\omega t - kz)}$$

avec $E'_i = E_i e^{-i\varphi_0}$ et $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_0 = k(n_e - n_o)e$

On fait ainsi apparaître le déphasage entre les deux composantes de l'onde, que l'on peut écrire

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)e$$

λ étant la longueur d'onde dans le vide de l'onde incidente.

Dans le cas général, les composantes en X et Y sont déphasées et d'amplitude différentes, la vibration à la sortie sera donc elliptique. Envisageons maintenant quelques cas particuliers :

- $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$: **lignes neutres**

Si la vibration incidente est selon l'un des axes principaux, X ou Y , l'onde est entièrement ordinaire ou extraordinaire et sa polarisation n'est donc pas modifiée à la sortie. Ces deux directions sont les lignes neutres de la lame.

- $\Delta\varphi = 2p\pi$ ou $(n_e - n_o)e = p\lambda$: **lame λ**

Dans ce cas, le déphasage à la sortie étant un multiple entier de 2π , les composantes X et Y sont à nouveau en phase, la lame se comporte comme une lame non biréfringente pour cette longueur d'onde.

- $\Delta\varphi = 2p\pi + \pi$ ou $(n_e - n_o)e = p\lambda + \lambda/2$: **lame $\lambda/2$**

Avec un déphasage de π , la composante selon Y est changée de signe. La polarisation à la sortie est donc à nouveau rectiligne mais fait un angle $-\theta$ avec l'axe OX . Elle est donc symétrique de la polarisation incidente par rapport à l'un des axes. Une telle lame permet de faire tourner de façon continue le plan de polarisation d'une onde. En effet, en partant d'une polarisation définie, alignée avec une des lignes neutres de la lame, une rotation de la lame d'un angle α fera tourner le plan de polarisation de 2α .

- $\Delta\varphi = 2p\pi \pm \pi/2$ ou $(n_e - n_o)e = p\lambda \pm \lambda/4$: **lame $\lambda/4$**

Les deux composantes en X et Y étant en quadrature, on obtient une vibration elliptique d'axes OX et OY . Si de plus l'angle θ est de $\pi/4$, les deux composantes sont d'égale amplitude et la vibration est circulaire. Le sens de rotation est gauche si $\Delta\varphi = \pi/2$ à $2p\pi$ près, droite pour le signe contraire. On peut cependant remarquer que, pour une même lame, on peut obtenir indifféremment une vibration droite ou gauche selon que la vibration incidente est polarisée selon la première ou selon la deuxième diagonale ($\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/4$).

3.2.3 Non achromaticité

Pour le quartz, la différence entre les indices est $n_e - n_o \approx 9 \cdot 10^{-3}$. Pour une longueur d'onde de $0.45 \mu\text{m}$, il faudrait donc une épaisseur de $12.5 \mu\text{m}$ pour avoir une lame $\lambda/4$. Pour avoir une bonne tenue mécanique, on n'utilise cependant pas d'épaisseur inférieure à la centaine de microns. On prendra donc $e = 112.5 \mu\text{m}$, donnant une épaisseur effective $(n_e - n_o)e = 2\lambda + \lambda/4$, qui, à la longueur d'onde considérée aura le même effet. Par contre, l'effet d'une telle lame peut être complètement différent pour une longueur d'onde voisine. Pour une longueur d'onde de $0.51 \mu\text{m}$ par exemple, l'épaisseur effective de la même lame est de 2λ , ce sera donc une lame λ . La caractérisation d'une lame biréfringente dépend donc de la longueur d'onde, le changement de polarisation n'est pas achromatique.

Remarque : Si l'axe optique n'est pas parallèle aux faces, tout en n'étant pas orthogonal à celles-ci, la lame présente quand même deux indices différents. Les lignes neutres sont la projection de l'axe sur la face et l'axe perpendiculaire. L'épaisseur de la lame étant faible, les effets de double réfraction sont négligeable. Il n'y a donc pas de différence notable avec les cas étudiés ci-dessus. L'indice de l'onde extraordinaire n'a cependant plus la valeur n_e mais une valeur intermédiaire entre n_e et n_o .

4 Pouvoir rotatoire

Certains milieux possèdent la propriété de présenter une vitesse de phase et donc un indice de réfraction différents pour les ondes polarisées circulaire droite et circulaire gauche. Cette propriété peut se manifester même dans des fluides isotropes, si les constituants élémentaires (molécules) diffèrent de leur image dans un miroir. Un tel milieu est appelé **chiral**. Les modes propres de polarisation se propageant sans déformation sont alors les polarisations circulaires droite et gauche. Pour certains cristaux comme le quartz, cette propriété se manifeste aussi pour des ondes se propageant dans une direction particulière, celle de l'axe optique. Enfin, dans certains milieux, un champ magnétique peut induire cette propriété pour des ondes se propageant parallèlement au champ, c'est l'**effet Faraday**.

L'effet d'une lame d'épaisseur e d'un tel matériau sur une onde arrivant en incidence normale se calcule de la même façon que dans le cas d'une lame biréfringente. Les modes propres de propagation dans le milieu sont les ondes circulaire droite et circulaire gauche, qui peuvent être caractérisées par les vecteurs complexes :

$$\vec{u}_d = \vec{u}_x + i \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{u}_g = \vec{u}_x - i \vec{u}_y$$

Considérons par exemple une onde incidente polarisée rectilignement suivant Ox :

$$\vec{\mathcal{E}}(t, z) = E_i e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$$

Cette onde doit être décomposée sur les modes circulaires droite et gauche :

$$\vec{\mathcal{E}}(t, z) = \vec{\mathcal{E}}_d(t, z) + \vec{\mathcal{E}}_g(t, z) = \frac{1}{2} E_i (\vec{u}_d + \vec{u}_g) e^{i(\omega t - kz)}$$

A la sortie de la lame, comme dans le cas des lames anisotropes, les deux ondes sont affectées des facteurs de phase correspondant à leurs différences de marche respectives, d'où :

$$\vec{\mathcal{E}}'(t, z) = \vec{\mathcal{E}}_g(t, z) e^{-i\varphi_g} + \vec{\mathcal{E}}_d(t, z) e^{-i\varphi_d} = \frac{1}{2} E_i e^{-i\varphi_d} (\vec{u}_d + \vec{u}_g e^{-i\Delta\varphi}) e^{i(\omega t - kz)}$$

avec $\varphi_d = k(n_d - 1)e$, $\varphi_g = k(n_g - 1)e$ et $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_g - n_d)e$, n_d et n_g étant les indices de réfraction pour les modes droit et gauche.

Il suffit maintenant de revenir dans le système d'axes \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\vec{u}_d + \vec{u}_g e^{-i\Delta\varphi} = (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) + (\vec{u}_x - i\vec{u}_y)e^{-i\Delta\varphi} = e^{-i\Delta\varphi/2} \left[\vec{u}_x (e^{+i\Delta\varphi/2} + e^{-i\Delta\varphi/2}) + i\vec{u}_y (e^{+i\Delta\varphi/2} - e^{-i\Delta\varphi/2}) \right]$$

d'où

$$\vec{\mathcal{E}}'(t, z) = E_i e^{-i\varphi_g} e^{-i\Delta\varphi/2} \left[\vec{u}_x \cos(\Delta\varphi/2) + \vec{u}_y \sin(\Delta\varphi/2) \right] e^{i(\omega t - kz)}$$

On reconnaît l'expression d'une onde polarisée rectilignement selon une direction faisant un angle $\Delta\varphi/2$ avec l'axe \vec{Ox} .

L'effet d'un tel milieu est donc de faire tourner le plan de polarisation d'un angle $\Delta\varphi/2$, proportionnel au trajet dans le milieu et inversement proportionnel à la longueur d'onde.

Remarquons que dans le calcul précédent l'axe \vec{Ox} est quelconque. L'angle de rotation est donc indépendant de la polarisation initiale. Contrairement aux lames biréfringentes, un milieu à pouvoir rotatoire n'a pas de lignes neutres. Par ailleurs, le pouvoir rotatoire peut se manifester même dans un milieu isotrope comme un fluide, il suffit que les molécules qui le composent soient *chirales*, c'est à dire qu'elles ne puissent pas être superposées à leur image dans une symétrie miroir.