RÉSUMÉ DU COURS

THÉORÈME DE GAUSS

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Comment appliquer le théorème de GAUSS **?**

1. Ecrire la relation $\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$
2. Choisir la surface de GAUSS qui respecte la symétrie de la distribution
   - Soit $\vec{E}$ est parallèle à la surface $(\vec{E} \perp d\vec{s}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$
   - Soit $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface $(\vec{E} \parallel d\vec{s})$ **et** $E = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = E.S$
3. Calculer les charges q_{int} à l'intérieur de la surface de GAUSS.

Tableau récapitulatif : *Champ créé par un(e)*

	A l'intérieur	**A l'extérieur**
Droite infinie $(\lambda = \text{Cte})$		
Plan infini $(\sigma = \text{Cte})$		
Cylindre infini creux (σ, R)		
Cylindre infini plein (ρ, R)		
Sphère creuse (σ, R)		
Sphère pleine (ρ, R)		

SÉRIE DE TD N° 03

EXERCICE 01 :

En utilisant le théorème de GAUSS trouver le champ électrique crée par :

- Une distribution rectiligne infinie de densité uniforme λ,en un point situé à une distance d de la droite.
- Une distribution plane infinie de densité uniforme σ, en un point situé à une distance d du plan.

EXERCICE 02 :

Soit un cylindre creux de rayon R et de longueur infinie chargé avec une densité surfacique uniforme (σ), calculer le champ électrostatique en un point M situé à une distance d de l'axe du cylindre quand :

- M se trouve à l'intérieur du cylindre.
- M se trouve à l'extérieur du cylindre.

Mêmes questions pour un cylindre plein de rayon R et de longueur infinie chargé avec une densité volumique uniforme (ρ).

EXERCICE 03 :

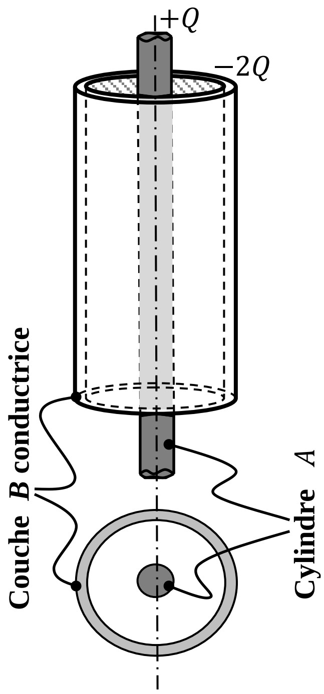
Soit une sphère creuse de rayon R chargée avec une densité surfacique ($\sigma = \text{constante}$), calculer, en fonction de la charge totale Q de la sphère, le champ électrostatique en un point M situé à une distance r de son centre quand :

- M se trouve à l'intérieur de la sphère.
- M se trouve à l'extérieur de la sphère.

Mêmes questions pour un une sphère pleine de rayon R chargée avec une densité volumique uniforme (ρ).

EXERCICE 04 (*):

La figure ci-contre montre un système composé d'un long cylindre A de longueur L et de rayon a portant une charge $+Q$ distribuée uniformément sur tout son volume, est entouré d'une couche cylindrique ***conductrice*** B (rayon intérieur $b = 2a$ et de rayon extérieur $c = 3a$) ayant la même longueur L et portant une charge totale $-2Q$.



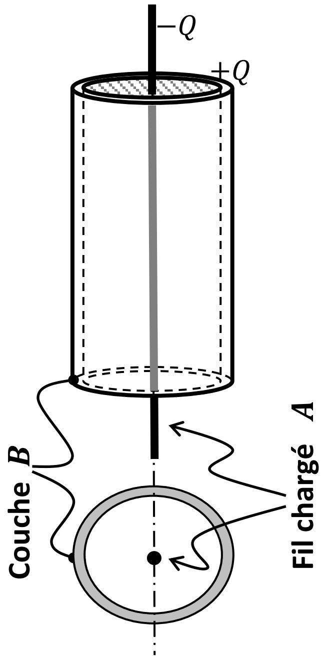
1. Calculer la densité volumique de charge ρ du cylindre A (de rayon a).
2. ***La couche conductrice cylindrique*** B ***étant en équilibre électrostatique***. Calculer les charges portées par la face intérieure (Q_{int}) et par la face extérieure (Q_{ext}) de la couche.
3. En déduire les densités σ_1 et σ_2 des surfaces interne et externe de la couche conductrice B.

Pour une longueur L assez grande par rapport à a, b et c, nous pouvons considérer le système des cylindres comme infini et utiliser le théorème de GAUSS.

4. Calculer, alors, le champ électrique $E(r)$ en tout point de l'espace, en fonction de L, Q, a et de la distance r par rapport à l'axe du cylindre.
5. En déduire la différence de potentiel entre la surface du cylindre A et le conducteur B : $\Delta V = V(r = a) - V(r = b)$.

EXERCICE 05 :

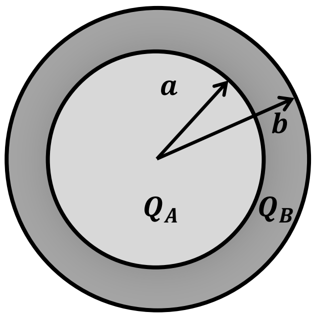
Soit le système représenté dans la figure ci-contre Il est composé d'un fil chargé A de longueur L et portant une charge $Q_A = -Q$ distribuée uniformément avec une densité linéaire λ, ce fil est entouré d'une couche cylindrique B de rayon intérieur a, de rayon extérieur b et de longueur L. La couche cylindrique porte une charge $Q_B = +Q$ distribuée avec une densité volumique uniforme ρ.



1. Calculer densité linéaire λ du fil A et la densité volumique ρ de la couche cylindrique B.
2. Pour une longueur L assez grande par rapport à a et à b, nous pouvons considérer que l'ensemble est infiniment long et utiliser le théorème de GAUSS. Déterminer alors, le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace. r est la distance par rapport à l'axe du cylindre.
3. Tracer l'allure de $E(r)$ en fonction de r.
4. Calculer la différence de potentiel $V = V(a) - V(b)$ entre la surface intérieur et la surface extérieur de la couche cylindrique B.

EXERCICE 06 :

Dans la figure ci-contre, une sphère A de rayon a portant une charge $Q_A = +Q$ distribuée uniformément sur tout son volume est entourée d'une couche sphérique B de rayon intérieur a et de rayon extérieur b. La couche sphérique porte une charge $Q_B = -Q$ distribuée avec une densité volumique uniforme.



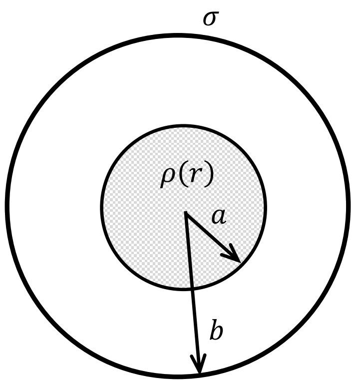
5. Calculer la densité volumique ρ_A de la sphère A et la densité volumique ρ_B de la couche sphérique B.
6. En utilisant le théorème de GAUSS, Déterminer le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace. r est la distance par rapport au centre de la sphère.
7. Tracer l'allure de $E(r)$ en fonction de r.
8. Calculer la différence de potentiel $V = V(r = a) - V(r = 0)$ entre la surface de la sphère A et son centre.

Remarque : Toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de $K, a, b,$ Q et r.

EXERCICE 07 :

La figure ci-contre montre deux sphères concentriques de rayons a et b $(a < b)$. La surface de la sphère de rayon b est chargée avec une ***densité surfacique constante*** σ.

La sphère de rayon a est chargée avec une ***densité volumique*** $\rho(r) = 2\sigma/r$ tel que r est la distance par rapport au centre de la sphère.



1. Calculer la charge Q_1 portée par la sphère pleine (de rayon a) et la charge Q_2 portée par la sphère creuse (de rayon b).
2. Déterminer le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace.
3. Déterminer le potentiel électrostatique $V(r)$ en tout point de l'espace.
4. Tracer l'allure de $E(r)$ et de $V(r)$ en fonction de r.
5. Calculer la différence de potentiel $V = V_a - V_b$ entre la surface de la sphère pleine $(r = a)$ et la surface de sphère creuse $(r = b)$.

Remarque :

- On donne : ***l'élément de volume en coordonnées sphériques*** $d\tau = r^2 . \sin\theta . dr . d\theta . d\varphi$.
- Toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de σ, a, b, r et ε_0.

EXERCICE 08 :

Soit une sphère conductrice A de rayon R_a maintenue à un potentiel V_A par rapport à la terre (le potentiel de la terre est considéré comme nul $V_T = 0$).

Dans la figure *a*. le conducteur A est isolé dans l'espace.

1. En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère A.
2. En déduire le potentiel V_A de la sphère A en fonction de sa charge Q_{0A}.

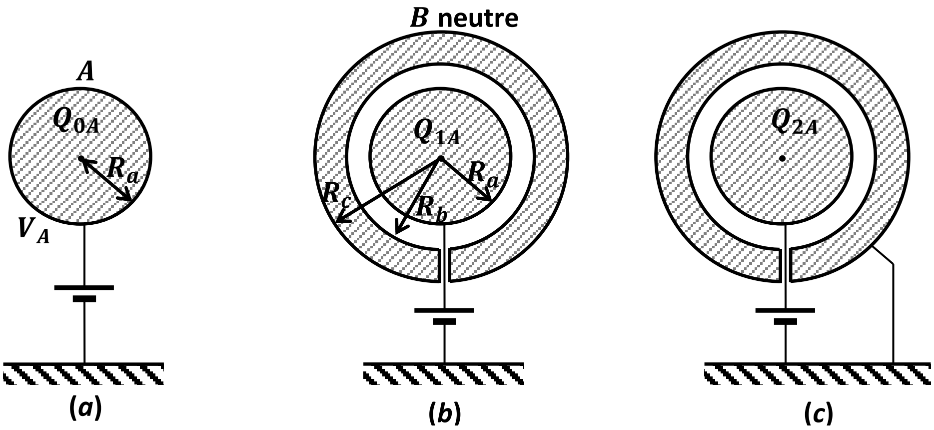
Dans la figure *b*. le conducteur A est entouré d'une couche conductrice sphérique B de rayon intérieur R_b et rayon extérieur R_c.

3. Calculer les charges Q_{Bi} et Q_{Be} respectives des surfaces intérieure et extérieure de B, en fonction de la nouvelle charge Q_{1A} du conducteur A.

Dans la figure *c*. le conducteur B est relié au sol et son potentiel $V_B = V_T = 0$. La charge du conducteur A devient Q_{2A}.

4. En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrostatique dans la région entre les deux conducteurs ($R_a \leq r \leq R_b$).
5. En déduire la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre les deux conducteurs en fonction de R_a, R_b et Q_{2A}.
6. En utilisant les questions 2. et 5. comparer Q_{0A} et Q_{2A}. Que peut-on en conclure ?

Le potentiel V_A reste inchangé durant tout l'exercice et les conducteurs sont à l'équilibre électrostatique, la distribution est donc surfacique.



EXERCICE 09 (*):

Dans le modèle quantique de l'atome d'Hydrogène, on considère le noyau constitué d'un (01) proton comme une charge ponctuelle $(q = e)$ entouré d'un nuage électronique de symétrie sphérique, réparti dans tout l'espace, ayant une densité volumique $\rho = A.\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$ tel que A est une constante et a_0 est le rayon de Bohr.

1. En utilisant la neutralité de l'atome, calculez la constante A.
2. Calculez le champ crée par cet atome.
3. Discutez les cas où $r \gg a_0$ et $r \ll a_0$.

On donne : $\int r^2.e^{\alpha.r}dr = \left(\frac{r^2}{\alpha} - \frac{2r}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right)e^{\alpha.r}$