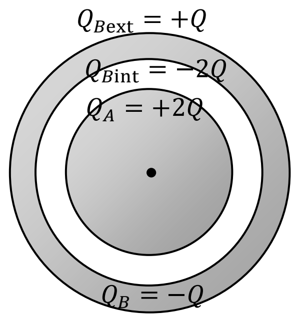
CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 04

EXERCICE 03 (*):



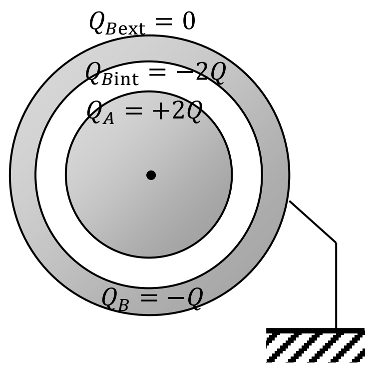
1. A l'équilibre électrostatique

$$Q_A = +2Q \quad \text{et} \quad \boxed{Q_{Bint} = -2Q}$$

Comme le conducteur B est isolé alors sa charge est constante

$$Q_B = Q_{Bint} + Q_{Bext} = -Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{Bext} = +Q}$$

2. Quand nous relions le conducteur B la terre la charge sur sa surface extérieure se vide dans le sol $\boxed{Q_{Bext} = 0}$ et la charge de la surface intérieure est maintenue par l'attraction des charges se trouvant sur la surface de A, donc $\boxed{Q_{Bint} = -2Q}$. En plus le potentiel du conducteur B est considéré comme nul ($V_B = 0$) (potentiel de référence de la terre)



3. Champ électrostatique

Théorème de Gauss

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet \overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

La symétrie du champ est une ***symétrie sphérique***, donc la surface de GAUSS est une sphère de rayon r concentrique à la distribution de charge.

Puisque $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS}$ donc $\vec{E} \bullet \overrightarrow{dS} = E.dS$ et :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet \overrightarrow{dS} = \oiint_{S_G} E.dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Par symétrie de rotation E est constant sur la surface de GAUSS S_G.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet \overrightarrow{dS} = E.S_G = E.4\pi.r^2$$

Finalement

$$\boxed{E.4\pi.r^2 = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

$Zone\ 1$: $(0 \le r \le a)$ $\quad \sum q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_1 = 0}$

$Zone\ 2$: $(a \le r \le b)$ $\quad \sum q_{int} = +2Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_2 = K\frac{2Q}{r^2}}$

$Zone\ 3$: $(b \le r \le c)$ $\quad \sum q_{int} = +2Q - 2Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_3 = 0}$

$Zone\ 4$: $(c \le r < +\infty)$ $\quad \sum q_{int} = +2Q - 2Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_4 = 0}$

4. Potentiel : Symétrie sphérique.

$$dV = -E.dr \quad \text{et} \quad V = -\int E.dr$$

$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = K\dfrac{2Q}{r^2} \\ E_3 = 0 \\ E_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = C_1 = \text{Constante} \\ V_2 = K\dfrac{2Q}{r} + C_2 \\ V_3 = C_3 = \text{Constante} \\ V_4 = C_4 = \text{Constante} \end{cases}$$

Potentiel à l'infini est nul : $V_4(r \to +\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$ donc $V_4 = 0$

Continuité en $(r = c)$: $V_4(r = c) = V_3(r = c) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$ donc $V_3 = 0$

Continuité en $(r = b)$: $V_3(r = b) = V_2(r = b) = 0 \quad \Rightarrow \quad K\frac{2Q}{b} + C_2 = 0$ donc $C_2 = -K\frac{2Q}{b}$

Continuité en $(r = a)$: $V_2(r = a) = V_1(r = a) \quad \Rightarrow \quad K\frac{2Q}{a} - K\frac{2Q}{b} = C_1$

D'où le potentiel

$$\boxed{V_1 = 2KQ\frac{b-a}{ab}} \quad ; \quad \boxed{V_2 = K\frac{2Q}{r}V_2 - K\frac{2Q}{b}} \quad ; \quad \boxed{V_3 = 0} \quad ; \quad \boxed{V_4 = 0}$$

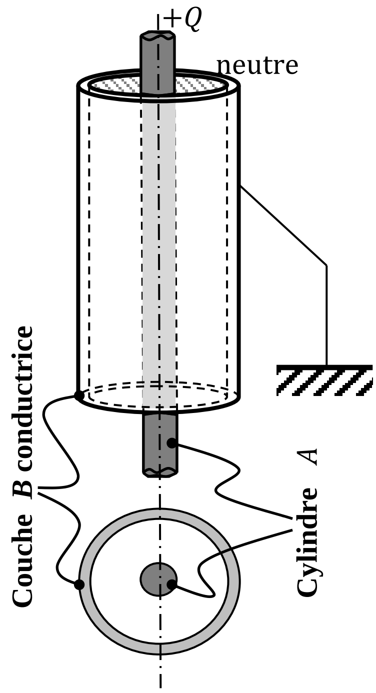
5. Différence de potentiel entre les deux conducteurs

$$V = V_1 - V_3 = 2KQ\frac{b-a}{ab}$$

La capacité du condensateur (charge $2Q$)

$$C = \frac{2Q}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}}$$

EXERCICE 04 :



Charges à la surface de chaque conducteur à l'équilibre électrostatique.

Le conducteur A est isolé : $\boxed{Q_A = +Q}$ (en surface).

Influence totale de A sur B : $\boxed{Q_{B\text{int}} = -Q}$

Conducteur B relié au sol : $\boxed{Q_{B\text{ext}} = 0}$

Remarque :

La charge du conducteur B à changé (la conducteur B était initialement neutre) car il n'est pas isolé (relié à la terre) et son potentiel est nul.

Nous avons donc les densités surfaciques

$$\boxed{\sigma_A = \frac{Q_A}{S_A} = +\frac{Q}{2\pi a.L}} \quad ; \quad \boxed{\sigma_{B\text{int}} = \frac{Q_{B\text{int}}}{S_{B\text{int}}} = -\frac{Q}{2\pi b.L}} \quad ; \quad \boxed{\sigma_{B\text{ext}} = \frac{Q_{B\text{ext}}}{S_{B\text{ext}}} = 0}$$

1. Calcul du champ : *Théorème de GAUSS* :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : cylindrique (ou axiale)
Surface de GAUSS : Cylindre S_1 coaxial à la distribution fermé par deux disques S_2 et S_3.
La hauteur du cylindreS_1 est notée h et son rayon r (coordonnées cylindriques), r est aussi le rayon des deux disques S_2 et S_3.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3$$

Comme $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$ et $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$ alors

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 = \iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3 = 0$$

Et comme $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E_1 . ds_1$$

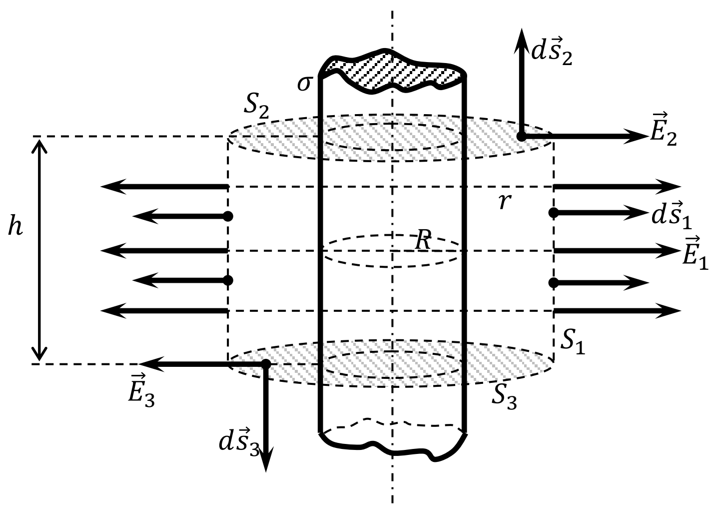
En plus, en utilisant la symétrie de translation le long de l'axe de la distribution et la symétrie de rotation avec comme axe de rotation l'axe de la distribution, nous trouvons que $E_1 =$ Constante sur la surface S_1. Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E_1 \iint_{S_1} ds_1 = E_1 . S_1$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E_1 . 2\pi r . h}$$

Ce résultat est toujours valable pour toute distribution à symétrie cylindrique et pour ce choix de la surface de GAUSS.



Calcul de la charge à l'intérieur de la surface de GAUSS :

$Zone\ 1$: $(0 \leq r \leq a)$ $\sum q_{int} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_1 = 0}$

$Zone\ 2$: $(a \leq r \leq b)$ $\sum q_{int} = \sigma_A . 2\pi a . h \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_2 = \frac{\sigma_A . a}{\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$ ou $\boxed{E_2 = \frac{2KQ}{L} \frac{1}{r}}$

$Zone\ 3$: $(b \leq r \leq c)$ $\sum q_{int} = \sigma_A . 2\pi a . h + \sigma_{Bint} . 2\pi b . h = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_3 = 0}$

$Zone\ 4$: $(c \leq r < +\infty)$ $\sum q_{int} = \sigma_A . 2\pi a . h + \sigma_{Bint} . 2\pi b . h + \sigma_{Bext} . 2\pi c . h = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_4 = 0}$

2. Différence de potentiel : symétrie cylindrique (la coordonnée cylindrique ρ à été remplacée par r).

$$dV = -E . d\rho = -E . dr \qquad \text{et} \qquad \int_{r=a}^{r=b} dV = -\int_{r=a}^{r=b} E_2 . dr$$

D'où

$$V_b - V_a = -\frac{2KQ}{L} [\ln r]_{r=a}^{r=b} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V = V_a - V_a = \frac{2KQ}{L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

3. Capacité du condensateur cylindrique (charge Q).

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{L}{2K} \frac{1}{\ln(b/a)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}}$$

Et la capacité par unité de longueur du cylindre.

$$C_L = 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln(b/a)}$$

EXERCICE 05 :

1. Champ électrostatique crées à une distance $r \quad (r > a)$ de l'axe d'un cylindre de longueur infinie chargée avec une densité surfacique uniforme σ.

Théorème de GAUSS

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Symétrie du champ électrostatique : cylindrique (ou axiale)

Surface de GAUSS : Cylindre S_1 coaxial à la distribution fermé par deux disques S_2 et S_3.

La hauteur du cylindreS_1 est notée h et son rayon r (coordonnées cylindriques), r est aussi le rayon des deux disques S_2 et S_3.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3$$

Comme $\vec{E}_2 \perp d\vec{s}_2$ et $\vec{E}_3 \perp d\vec{s}_3$ alors $\vec{E}_2 \bullet d\vec{s}_2 = \vec{E}_3 \bullet d\vec{s}_3 = 0$

Et comme $\vec{E}_1 \parallel d\vec{s}_1$ et dans le même sens, alors :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s}_1 = \iint_{S_1} E_1 . ds_1$$

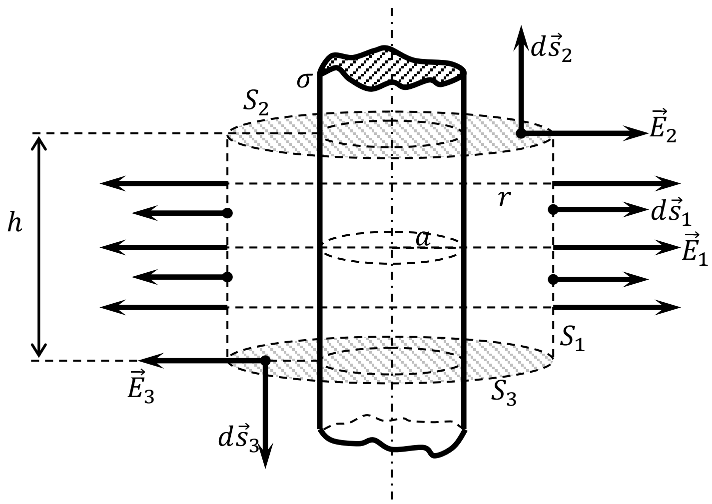
En plus, en utilisant la symétrie de translation le long de l'axe de la distribution et la symétrie de rotation avec comme axe de rotation l'axe de la distribution, nous trouvons que $E_1 = \text{Constante}$ sur la surface S_1. Donc :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E_1 \iint_{S_1} ds_1 = E_1 . S_1$$

Nous obtenons donc :

$$\boxed{\oiint_{S_G} \vec{E} \bullet d\vec{s} = E_1 . 2\pi r . h}$$

Ce résultat est toujours valable pour toute distribution à symétrie cylindrique et pour ce choix de la surface de GAUSS.



Calcul de la charge à l'intérieur de la surface de GAUSS :

Champ à l'extérieur du cylindre chargé $a \leq r < +\infty$:

Distribution surfacique uniforme

$$dq = \sigma . ds$$

Donc

$$\sum q_{\text{int}} = \int dq = \sigma \int_{\text{int}} ds$$

Et

$$\sum q_{\text{int}} = \sigma . 2\pi a . h$$

En remplaçant, nous trouvons

$$E . 2\pi r . h = \frac{\sigma . 2\pi a . h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{ext}}(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_\rho$$

En utilisant la charge par unité de longueur

$$\lambda = \frac{\sum q_{\text{int}}}{h} = \sigma . 2\pi a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{2K . \lambda}{r} \vec{e}_\rho}$$

$\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques.

<u>Calcul du potentiel :</u> *Symétrie cylindrique.*

$$dV = -\vec{E} \bullet d\vec{r} = -(E.\vec{e}_\rho) \bullet (d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}_z)$$

Donc

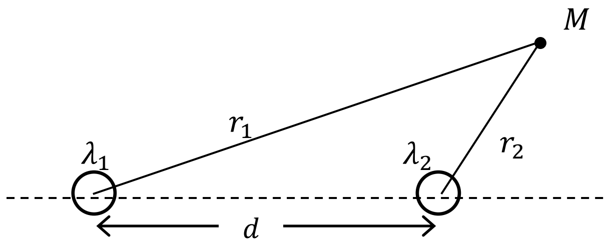
$$V = \int dV = -\int \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\int E.d\rho$$

Dans notre cas nous avons remplacé la distance ρ par rapport à l'axe du cylindre par r (pour éviter la confusion avec une distribution volumique).

$$V = -\int \frac{2K.\lambda}{r}.dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = -2K.\lambda.\ln(r) + C}$$

C est une constante d'intégration que nous déterminons à partir des conditions limites.

2. Potentiel électrostatique au point M.



$$V = -2K.\lambda_1.\ln(r_1) + C_1 - 2K.\lambda_2.\ln(r_2) + C_2$$

Comme $\lambda_1 = +\lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$.

$$V = 2K.\lambda.\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + C$$

La constante $C = C_1 + C_2$ est calculée en considérant que le potentiel total sur la droite se trouvant au milieu entre les des deux fils $(r_1 = r_2 = d/2)$ est nul par symétrie.

$$0 = 2K.\lambda.\ln(1) + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Et finalement

$$\boxed{V = 2K.\lambda.\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

3. Potentiels V_1 et V_2.

A la surface du conducteur 1 : $r_1 = a$; $r_2 = d - a \approx d$ car $(d \gg a)$

$$\boxed{V_1 = 2K.\lambda.\ln\left(\frac{d}{a}\right)}$$

A la surface du conducteur 2 : $r_2 = a$; $r_1 = d - a \approx d$ car $(d \gg a)$

$$\boxed{V_2 = 2K.\lambda.\ln\left(\frac{a}{d}\right)}$$

4. Capacité linéaire C_l.

La différence de potentiel entre les deux conducteurs :

$$V = V_1 - V_2 = 4K.\lambda.\ln\left(\frac{d}{a}\right)$$

La charge d'une portion de longueur l sur les deux fils : $Q = \pm\lambda.l$.

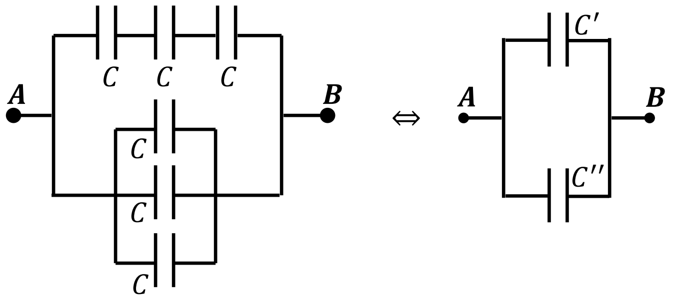
D'où la charge par unité de longueur du condensateur (en valeur absolue) : $Q_l = \lambda$

Et la capacité par unité de longueur ou Capacité linéaire.

$$C_l = \frac{Q_l}{V} = \frac{1}{4K.\ln(d/a)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_l = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)}}$$

EXERCICE 06 :

Calculez la capacité équivalente $(C = 3\ \mu F)$



Trois condensateurs de capacité C en série :

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C} \qquad \Rightarrow \qquad C' = \frac{C}{3}$$

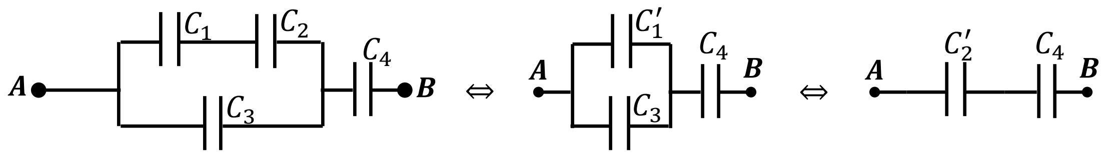
Trois condensateurs de capacité C en parallèle :

$$C'' = C + C + C = 3C$$

C' et C'' sont en parallèle :

$$C_{\text{équ}} = C' + C'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{\text{équ}} = \frac{10}{3}C} \qquad \text{Application numérique} \quad \boxed{C_{\text{équ}} = 10\ \mu F}$$

Calculez la capacité équivalente $(C_1 = 6\ \mu F \ ;\ C_2 = 8\ \mu F \ ;\ C_3 = C_4 = 5\ \mu F)$



Les condensateurs C_1 et C_2 sont en série :

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \Rightarrow \qquad C_1' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Les condensateurs C_1' et C_3 sont en parallèle :

$$C_2' = C_1' + C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$$

Les condensateurs C_2' et C_4 sont en série :

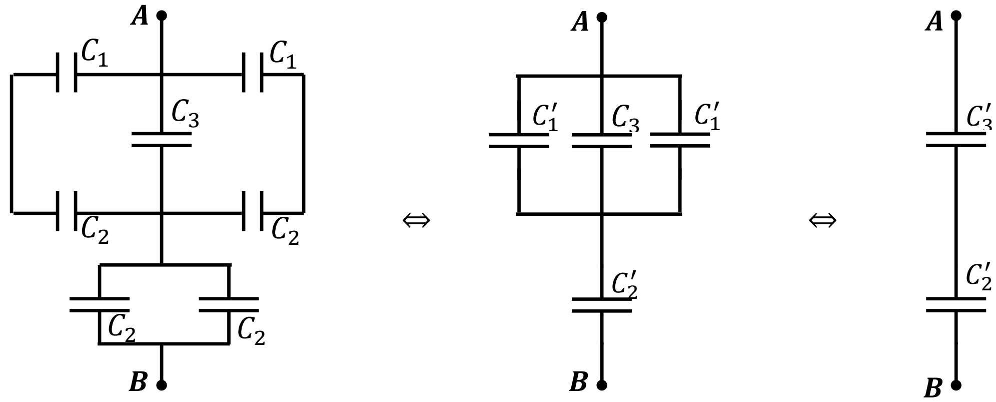
$$\frac{1}{C_{\text{équ}}} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_2'} \qquad \Rightarrow \qquad C_{\text{équ}} = \frac{C_2' C_4}{C_2' + C_4}$$

Application numérique

$$C_2' = \frac{48}{14} + 5 = \frac{59}{7}\ \mu F \qquad \text{et} \qquad \boxed{C_{\text{équ}} = \frac{295}{94}\ \mu F = 3{,}138\ \mu F}$$

EXERCICE 07 :

1. Calculez la capacité équivalente. $(C_1 = 3\ \mu F\ \ ;\ \ C_2 = 6\ \mu F\ \ ;\ \ C_3 = 2\ \mu F)$



Les condensateurs C_1 et C_2 sont en série :

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_1' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Les deux condensateurs C_2 sont en parallèle : $C_2' = C_2 + C_2 = 2C_2$

Les deux condensateurs C_1' et C_3 sont en parallèle :

$$C_3' = C_1' + C_1' + C_3 = 2\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3$$

Les condensateurs C_2' et C_3' sont en série :

$$\frac{1}{C_{\text{équ}}} = \frac{1}{C_3'} + \frac{1}{C_2'} \quad \Rightarrow \quad C_{\text{équ}} = \frac{C_2' C_3'}{C_2' + C_3'}$$

Application numérique

$$C_2' = 12\ \mu F \quad ; \quad C_3' = 6\ \mu F \qquad \text{et} \qquad \boxed{C_{\text{équ}} = 4\ \mu F}$$

2. Charges et d.d.p. $V_{AB} = 48\ Volts$

C_2' et C_3' sont montés en série :

$$\begin{cases} Q_2' = Q_3' \\ V_2' + V_3 = V_{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2'.C_2' = V_3.C_3' \\ V_2' + V_3 = V_{AB} \end{cases} \quad \text{Numériquement} \quad \begin{cases} V_2'.12 = V_3.6 \\ V_2' + V_3 = 48 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{V_2' = 16\, Volt} \quad \text{et} \quad \boxed{V_3 = 32\, Volt}$$

C_1 et C_2 montés en série :

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ V_1 + V_2 = V_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1.V_1 = C_2.V_2 \\ V_1 + V_2 = V_3 \end{cases} \quad \text{Numériquement} \quad \begin{cases} 3.V_1 = 6.V_2 \\ V_1 + V_2 = 32 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{V_1 = 21{,}34\, Volt} \quad \text{et} \quad \boxed{V_2 = 10{,}66\, Volt}$$

Les Charges :

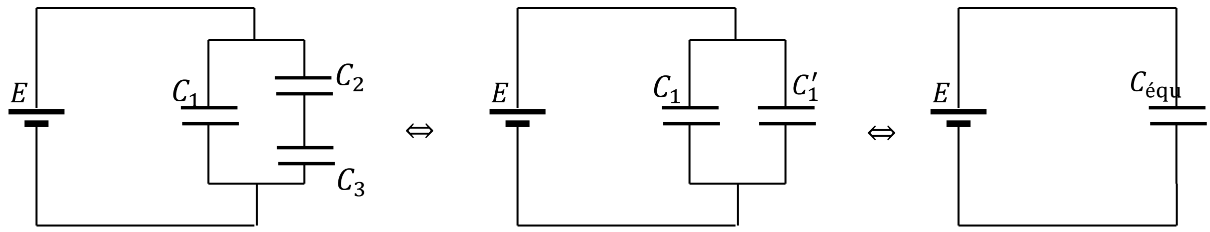
$$\boxed{\begin{cases} Q_1 = V_1.C_1 = 64\ \mu C \\ Q_2 = V_2.C_2 = 64\ \mu C \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} Q_2' = V_2'.C_2 = 96\ \mu C \\ Q_4 = V_4.C_4 = 64\ \mu C \end{cases}}$$

Energie potentielle emmagasinée :

$$U = \sum_i \frac{1}{2} Q_i.V_i \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} Q_{éq}.V_{AB} = \frac{1}{2} C_{éq}.V_{AB}^2} \quad \text{A.N :} \ \boxed{U = 4608\ \mu J = 4{,}608\ mJ}$$

EXERCICE 08 :

1. Capacité équivalente ($C_1 = 1\,\mu F$; $C_2 = 3\,\mu F$; $C_3 = 6\,\mu F$).



Les condensateurs C_2 et C_3 sont en série :

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_1' = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Les deux condensateurs C_1' et C_1 sont en parallèle :

$$C_{\text{équ}} = C_1' + C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{\text{équ}} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_1} \quad \text{Application numérique} \quad \boxed{C_{\text{équ}} = 3\,\mu F}$$

2. Charges et d.d.p. ($E = 120\,V$).

C_2 et C_3 sont montés en série :

$$\begin{cases} Q_2 = Q_3 \\ V_2 + V_3 = E \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_2.V_2 = C_3.V_3 \\ V_2 + V_3 = E \end{cases} \quad \text{Numériquement} \quad \begin{cases} 3.V_2 = 6.V_3 \\ V_2 + V_3 = 120 \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{V_2 = 80\,Volt} \quad ; \quad \boxed{V_3 = 40\,Volt} \quad \text{et} \quad \boxed{V_1 = E = 120\,Volt}$$

Les Charges :

$$\boxed{Q_1 = V_1.C_1 = 120\;\mu C} \quad ; \quad \boxed{Q_2 = V_2.C_2 = 240\,\mu C} \quad ; \quad \boxed{Q_3 = C_3.V_3 = 240\;\mu C}$$

3. Energie potentielle emmagasinée.

$$U = \sum_i \frac{1}{2} Q_i.V_i \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} Q_{éq}.V_{AB} = \frac{1}{2} C_{éq}.V_{AB}^2} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{U = 21600\,\mu J = 0{,}216\,J}$$

4. Capacité équivalente maximale $C_{\max}$.

C_1, C_2 et C_3 sont montés en parallèle.

$$\boxed{C_{\max} = C_1 + C_2 + C_3 = 10\,\mu F}$$

5. Capacité équivalente minimale $C_{\min}$.

C_1, C_2 et C_3 sont montés en série.

$$\frac{1}{C_{\min}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{\min} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2} = \frac{2}{3}\,\mu F}$$

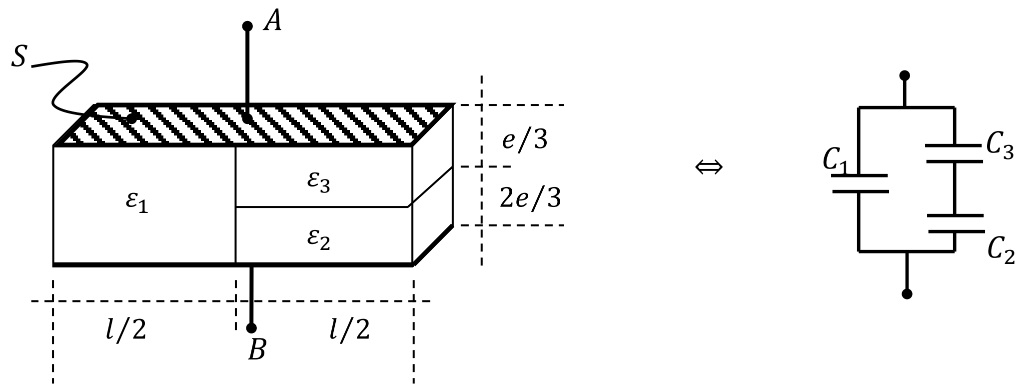
EXERCICE 09 (*):

1. Capacité d'un condensateur plan.

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon . S}{e}}$$

2. Montage équivalent.

$S = 6\ cm^2$; $e = 4\ \mu m$; $\varepsilon_1 = 1{,}5.\varepsilon_0$; $\varepsilon_2 = 2{,}4.\varepsilon_0$; $\varepsilon_3 = 2.\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8{,}84 \times 10^{-12}$[MKSA]



$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 . S_1}{e_1} = \frac{\varepsilon_1 . (S/2)}{e} \quad ; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 . S_2}{e_2} = \frac{\varepsilon_2 . (S/2)}{(2e/3)} \quad ; \quad C_3 = \frac{\varepsilon_3 . S_3}{e_3} = \frac{\varepsilon_3 . (S/2)}{(e/3)}$$

D'où

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 . S}{e} \quad ; \quad C_2 = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_2 . S}{e} \quad ; \quad C_3 = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_3 . S}{e}$$

Les condensateurs C_2 et C_3 sont en série :

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \Rightarrow \quad C_1' = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_2 . \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3}\right)\frac{S}{e}$$

Les deux condensateurs C_1' et C_1 sont en parallèle :

$$C_{\text{équ}} = C_1' + C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{\text{équ}} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3.\varepsilon_2 . \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3} + \varepsilon_1\right)\frac{S}{e}}$$

Où

$$\boxed{C_{\text{équ}} = 1{,}875\frac{\varepsilon_0 . S}{e} = 24{,}8625 \times 10^{-10}\ F = 2{,}48625\ nF}$$

3. Energie potentielle emmagasinée $(V_{AB} = 9\ V)$.

$$U = \sum_i \frac{1}{2} Q_i . V_i \quad \text{ou} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} Q_{éq} . V_{AB} = \frac{1}{2} C_{éq} . V_{AB}^2} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{U = 1{,}0069 \times 10^{-7}\ J}$$

EXERCICE 10 :

1. Capacité d'un condensateur plan. ($S = 12\ cm^2$; $h = 4\ cm$; $\varepsilon_0 = 8{,}84 \times 10^{-12}$[MKSA])

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 . S}{h}} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{C = 26{,}52 \times 10^{-14}\ F = 0{,}2652\ pF}$$

Charge ($V = 400\ Volts$)

$$\boxed{Q = C.V} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{Q = 106{,}08\ pC}$$

2.a. Capacité équivalente : les deux condensateurs sont montés en série

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 . S_1}{e_1} = \frac{\varepsilon_0 . S}{(h/2)} = 2\frac{\varepsilon_0 . S}{h} \quad ; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 . S_2}{e_2} = \frac{\varepsilon_0 . S}{(h/4)} = 4\frac{\varepsilon_0 . S}{h}$$

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_{\text{éq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0 . S}{h}} \qquad \text{App. num.} \qquad \boxed{C_{\text{éq}} = 0{,}3536\ pF}$$

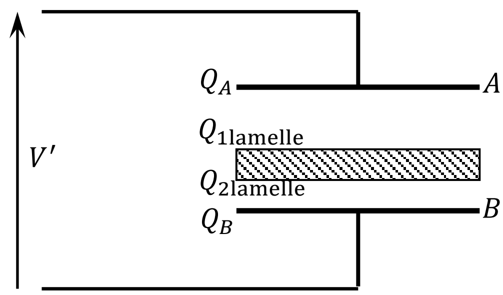
2.b. L'ensemble étant isolé la charge est donc conservée.

Répartition des charges

$Q_A = +106{,}08\ pC$; $Q_{1\text{lamelle}} = -106{,}08\ pC$

$Q_{2\text{lamelle}} = +106{,}08\ pC$; $Q_B = -106{,}08\ pC$

d.d.p. la charge reste inchangée et la capacité est modifiée.



$$C_{\text{éq}} = \frac{Q}{V'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V' = \frac{Q}{C_{\text{éq}}}} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{V' = 300\ Volts}$$

2.c. L'ensemble étant relié à un générateur de tension et maintenu à une d.d.p. $V = 400\ Volts$.

$$C_{\text{éq}} = \frac{Q'}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q' = C_{\text{éq}} . V} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{Q' = 141{,}44\ pC}$$

3. Energie emmagasinée par le montage.

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{2} Q . V} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{U_1 = 21{,}216\ nJ}$$

$$\boxed{U_2 = \frac{1}{2} Q . V'} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{U_2 = 15{,}912\ nJ}$$

$$\boxed{U_3 = \frac{1}{2} Q' . V} \qquad \text{Application numérique} \qquad \boxed{U_3 = 28{,}288\ nJ}$$