Chapitre 1
Matrices

1. <u>Définitions</u>

On appelle matrice de type (n,p) à coefficients dans K, un tableau de n.p éléments de K rangés sur n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

En abrégé, on note $A = (a_{ij})_{1\le i\le n \text{ et } 1\le j\le p}$

On désigne par $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K, à n lignes et p colonnes.

Cas particuliers :

- Si n = p, on dit que la matrice est carrée
- Si n = 1, $M_{1,p}$ est l'ensemble des matrices lignes
- Si p = 1, $M_{n,1}$ est l'ensemble des matrices colonnes
- Si les coefficients sont tq $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que la matrice est triangulaire supérieure

2. <u>Matrice associée à une application linéaire</u>

Soit E et F deux ev de dimensions finies p et n respectivement

Soit $B = \{e_1,...,e_p\}$ une base de E et $B' = \{e'_1,...,e'_n\}$ une base de F

Soit $f \in$ £(E,F) et on pose $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e'_i$ (donc $f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + ... + a_{nj}e'_n$)

On définit une matrice $M = (a_{ij})_{1\le i\le n \text{ et } 1\le j\le p}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{array} \end{array}$$

M est appelée la matrice associée à f dans les bases B et B'. On la note $M_{BB'}(f)$.

Remarque : la matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies (B et B')

Exercice 1 :

Soit $f : R^3 \to R^3$

$(x_1, x_2, x_3) \to (2x_1 + x_2 + x_3\ ,\ x_1 + 2x_2 + x_3\ ,\ x_1 + x_2)$

$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3\ ,\ x_1 + 2x_2 + x_3\ ,\ x_1 + x_2)$

1) Montrer que f est un endomorphisme de R^3 (c'est-à-dire $f \in \mathcal{L}(R^3)$)
2) Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique de R^3

Exercice 2 :

Soit f une application linéaire de R^3 dans R^2

Soit B et B' les bases canoniques de R^3 et R^2

La matrice associée à f dans les bases B et B' est : $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(R)$

Déterminer l'expression analytique de f

Théorème :

L'application qui à $f \in \mathcal{L}(E,F)$ fait correspondre $M_{BB'}(f)$ est bijective.

3. Opérations sur les matrices

3.1. Addition interne et multiplication externe

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(R)$ et $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(R)$

Alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{n,p}(R)$

Et, $\forall \lambda \in R$, $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{n,p}(R)$

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 11 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 13 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2. Produit de deux matrices

Soit E, F, G trois K-ev de bases respectives $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_m\}$ et $B'' = \{e''_1, ..., e''_p\}$

$f : E \to F$ de matrice associée $M_{BB'}(f) \in M_{m,n}$

$g : F \rightarrow G$ de matrice associée $M_{B'B''}(g) \in \mathcal{M}_{p,m}$

$(g \circ f) \in \mathcal{L}(E,G)$, on détermine la matrice associée de cette application linéaire :

$$(g \circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} g(e'_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj} e''_k\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} b_{kj} a_{ji} e''_k$$

On pose $c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji}$

Donc $(g \circ f)(e_i) = \sum_{k=1}^{p} c_{ki} e''_k$

La matrice associée à $(g \circ f)$ est $M_{BB''}(g \circ f) \in \mathcal{M}_{p,n}$

Remarque :

Pour que le produit existe, il faut que l'on ait $\mathcal{M}_{p,m} \times \mathcal{M}_{m,n} = \mathcal{M}_{p,n}$

En pratique : $M_{BB''}(g \circ f) = M_{B'B''}(g) \times M_{BB'}(f)$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \dots & a_{1i} & \dots \\ \dots & a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{mi} & \dots \end{pmatrix}_{(m\times n)}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{(p\times m)} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ki} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{(p\times n)} = M_3$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(2\times 3)} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{(3\times 2)}$$

Calcul de $A \times B$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{(2\times 2)}$$

Remarque : $A \times B \neq B \times A$

Dans le cas précédent $A \times B \in \mathcal{M}_{2,2}$ et $B \times A \in \mathcal{M}_{3,3}$

Donc $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

3.3. Propriétés

Si les produits sont définis :

- $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$
- $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$
- $(B+C)\times A=(B\times A)+(C\times A)$
- $\forall\lambda\in K,\ \lambda(A\times B)=(\lambda A)\times B$

Cas des matrices carrées :

- L'ensemble des matrices carrées est $M_n(K)$
- $M_n(K)$ est un K-ev de dimension n^2
- Les 4 propriétés précédentes sont valables
- $\exists(A,B)\in(M_n(K))^2$ tq $A\neq 0, B\neq 0$ et $AB=0$

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$A\neq 0, B\neq 0$ et $A\times B=0$

Définition :

$A\in M_n(K)$ est <u>inversible</u> ssi $\exists B\in M_n(K)$ tq $A\times B=B\times A=I_n$

B est dite <u>inverse</u> de A et se note $\mathbf{A^{-1}}$

Remarque : I_n est la matrice identité de $M_n(K)$:

$$I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

Propriétés de la matrice identité :

- $A\times I_n=I_n\times A=A$
- I_n est inversible : $I_n^{-1}=I_n$

Méthode pour trouver l'inverse d'une matrice :

Exemple : trouver l'inverse de $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Or, $A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a - c & 2b - d \end{pmatrix}$

Donc, par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2a - c = 0 \\ 2b - d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = -1 \end{cases}$

Théorème :

Soit f une application linéaire de E dans F et A = $M_{BB'}(f)$ avec B une base de E et B' une base de F. A est inversible ssi f est un isomorphisme de E dans F et $A^{-1} = M_{B'B}(f^{-1})$

Théorème :

Soit $A \in M_n(K)$. A est inversible ssi la famille des vecteurs colonnes de A est une base de E.

Exercice 3 :

Montrer que la matrice $A \in M_n(K)$ suivante est inversible.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_{ii} \neq 0, \forall i$$

Théorème :

Si A et B sont des matrices inversibles de $M_n(K)$, alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

4. Changement de base

4.1. Formule matricielle de Y = AX

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec dimE = n et dimF = p

$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n}$ matrice associée à f

Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ avec $B = \{e_1, ..., e_n\}$ base de E et $y = f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i$ avec $B' = \{e'_1, ..., e'_p\}$ base de F

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} (x_j a_{ij}) e'_i$$

Donc $y_i = \sum_{j=1}^{n}(x_j a_{ij})$

A x et y, on fait correspondre deux vecteurs colonnes X et Y et on a la matrice A suivante :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix} \ \text{et} \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ Y = AX$$

Exercice 4 :

Soit $f : R^4 \to R^3$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (y_1, y_2, y_3)$ tq

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = 3x_2 - x_3 + x_4 \\ y_3 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

1) Déterminer la matrice A associée à f
2) Déterminer Ker(f)

4.2. Matrice de passage

Définition :

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ des bases de E

B s'appelle ancienne base de E et B' nouvelle base de E. On a $e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \quad \forall j \text{ pour } 1 \le j \le n$

On appelle matrice de passage de B à B' la matrice $P = (\alpha_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées des nouveaux vecteurs e'_j écrites dans l'ancienne base.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Proposition :

Soit E un K-ev de dimension p, alors :

- Toute matrice de passage est inversible
- Si $P_{BB'}$ est la matrice de passage de B à B' alors $(P_{BB'})^{-1}$ est la matrice de passage de B' à B et $(P_{BB'})^{-1} = P_{B'B}$

4.2. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition :

Soit P la matrice de passage de B à B'.

$\forall x \in E$, soit X le vecteur colonne des coordonnées de x dans l'ancienne base B et X' le vecteur colonne de x dans la nouvelle base B'. Alors $X' = P^{-1}X$

4.2. Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Proposition :

Soit E et F deux K-ev ayant pour anciennes bases respectivement B_E et B_F.

Soit B'_E et B'_F deux nouvelles bases de E et F.

Soit P la matrice de passage de B_E à B'_E et Q la matrice de passage de B_F à B'_F

Pour toute application linéaire de E dans F, soit M sa matrice associée dans les anciennes bases (B_E et B_F).

Alors, la nouvelle matrice N dans les nouvelles bases (B'_E et B'_F) est donnée par la formule suivante : $N = Q^{-1}MP$ (= formule de changement de base)

Corollaire :

Soit f un endomorphisme de E, M sa matrice associée dans l'ancienne base B et N sa matrice associée dans la nouvelle base B'.

Soit P la matrice de passage de B à B'.

Alors $N = P^{-1}MP$

Remarque : dans la matrice de passage, on écrit les éléments de la nouvelle base en fonction des éléments de l'ancienne base.

Remarques :

- $N = P^{-1}MP$

  $PN = PP^{-1}MP = IMP \Rightarrow PNP^{-1} = M$

- Si N est une matrice diagonale :

  $$M^n = (PNP^{-1})^n = \underbrace{PNP^{-1} \times PNP^{-1} \times \ldots \times PNP^{-1}}_{\text{n fois}}$$

  $M^n = PN^nP^{-1}$

  Comme N est diagonale : $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } N^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{calcul de } M^n$$

5. **Rang d'une matrice**

Définition :

Soit $A \in M_{n,p}(K)$, on appelle rang de A le rang du système composé par ses vecteurs colonnes.

Théorème :

Le rang de A est le rang de toute application linéaire représentée par A.

6. **Matrices particulières**

Définition :

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$, la transposée de A, notée ${}^t\mathbf{A}$ est la matrice ${}^tA = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p \text{ et } 1 \leq i \leq n}$

Propriétés :

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$
- ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$
- $rg({}^tA) = rg(A)$

On dit que A est symétrique ssi ${}^tA = A$

On dit que A est antisymétrique ssi ${}^tA = - A$