Espace vectoriels de dimension finie.

1. structure d'espace vectoriel.
2. Sous espace vectoriels.
3. Sous espace vectoriel engendré par une partie
4. Sommes de sous espaces vectoriels de E.
5. Sous espaces vectoriels supplémentaires
6. Espace vectoriel quotient
7. Espace vectoriel produit
8. Independance linéaire. Partie libre. Partie liée
9. Base et dimension d'un espace vectoriel.
10. Sous espace vectoriels et base.
11. Sommes directes et bases.

Revision.

Relations : interne (العمليات, الداخلية)

→ la ~~relation~~ loi de composition interne interne dans l'ensemble $\mathbb{K}$ est une application pour l'ensemble $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

→ Soit $*$ et Δ deux lois internes dans $\mathbb{K}$.

- $*$ est commutative si seulement si :
  $$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2 \qquad x * y = y * x$$
- $*$ est associative si seulement si.
  $$\forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$$
  $$(x * y) * z = x * (y * z).$$
- $*$ est distributive par rapport à Δ si seulement si
  $$\begin{cases} x * (y \Delta z) = (x * y) \Delta (x * z) \\ \text{et} \\ (y \Delta z) * x = (y * x) \Delta (z * x). \end{cases}$$

- a élément neutre de K pour $*$ si seulement si

$\forall x \in K$.

$$x * a = a * x = x$$

- x' élément de K élément symétrique pour $*$ si seulement si :

$$x * x' = x' * x = a$$

<u>Structures algébriques:</u>

- $(K, *)$ est un groupe si seulement si :

1) $*$ ~~commut~~ associative.
2) existence de l'élément neutre ds K pour $*$
3) à chaque $x \in K$ existe son élément symétrique ds K.

→ En plus si $*$ est commutative on dit que $(K, *)$ est groupe commutative.

- $(K, *, \Delta)$ est anneau :

1) $(K, *)$ groupe commutative.
2) Δ associative.
3) Δ distributive par rapport à $*$.

→ si en plus Δ commutative : on dit que $(K, *, \Delta)$ est un anneau commutatif.

→ si Δ admet est un élément neutre ds K on dit que $(K, *, \Delta)$ est un anneau unitaire

• $(\mathbb{K}, *, \Delta)$ corps.

1) $(\mathbb{K}, *, \Delta)$ anneau unitaire

2) $\mathbb{K} - \{a\} \neq \emptyset$ tq chaque element ~~admet~~ existe son symetrique par rapport Δ (a element neutre de $*$)

si en plus Δ est commutative ;

$(\mathbb{K}, *, \Delta)$ est 1 corps commutatif.

Exo :

① $*$ relation interne dans $\mathbb{R} - \{3\}$.

$$x * y = xy - 2(x+y) + 6.$$

1) Montrer que $(\mathbb{R} - \{3\}, *)$ groupe commutatif ?

2) Montrer $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq : $x * \alpha = \alpha$.

② $*, \Delta$ relations internes ds $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^*$.

$$(x, y) * (x', y') = (xy' + x'y, yy')$$

$$(x, y) \Delta (x', y') = (xx', yy')$$

Montrer $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, *, \Delta)$ corps commutatif

$\neq, \Delta$ deux relations interne $\mathbb{N}^2$

$(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$

$(\alpha, \beta) \Delta (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha')$

Montrer que $(\mathbb{N}^2, \neq, \Delta)$ est anneau commutatif et unitaire

Espace vectoriel

Definition : Soit A et B des ensembles. On appelle loi externe sur B une application

$\vartheta : A \times B \longrightarrow B$

$(\alpha, x) \longrightarrow \vartheta(\alpha, \beta) = \alpha . x$

Definition : Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps, Soit $(E, +)$ un groupe abelien. Soit aussi $\vartheta : \mathbb{K} \times E \to E$ une loi externe sur E. Le triplet $(E, +, \cdot)$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou de $\mathbb{K}$ _ espace vectoriel) si :

1 - 1 designant l'unité de la seconde loi de de $\mathbb{K}$ et $\forall x \in E : 1 . x = x$

2 - $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall$ ~~x, y~~ $\in \mathbb{K}$ $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$

3 - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$ $(\alpha . \beta) x = \alpha . (\beta x)$

K est appelé corps de base de l'espace vectoriel E

Remarque : par abus d'ecrire, on notera E le $\mathbb{K}$ - espace vectoriel $(E, +, \cdot)$

Definition : soit $\mathbb{K}$ un corps. un element d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est appelé un <u>Vecteur</u>

Proposition : soit $\mathbb{K}$ un corps, ~~soit~~ E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ~~(E, +, .)~~. on note 0 le neutre de loi + sur $\mathbb{K}$, 0 aussi le neutre de la loi + sur E et 1 le neutre de la loi . sur $\mathbb{K}$, soient $v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. on a les propriétés suivantes :

1. $0 . v = 0$

2. $-1 v = -v$

3. Si $\alpha . v = 0$ et que $\alpha \neq 0$ alors $v = 0$

Demonstration :

1. On a : $v + 0.v = (1+0) v = v$. En soustrayant v des deux côtes de cette egalité, on obtient $0.v = 0$

2. ~~$0v = 0 = 1$~~ $0 = 0v = (1-1) v = 1v + (-1v) = v + (-1.v)$
$-1.v$ est donc l'opposé de v et alors egal à $-v$

3. Si $\alpha . v = 0$ et ~~q~~ que $\alpha \neq 0$ alors α^{-1} existe dans $\mathbb{K}$.
On peut multiplier les deux ~~cot~~ membres de notre egalité de départ par ~~par~~ α^{-1}, cela donne :

$$v = \alpha^{-1} . 0 = 0$$

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$_espace vectoriel. Soit V un sous ensemble de E. V est un sous espace vectoriel de E si :

- $(V, +)$ est sous groupe de $(E, +)$
- si $\alpha \in \mathbb{K}$ et si $x \in V$ alors $\alpha x \in V$

Rappel : déf d'un sous groupe :

Une partie d'un groupe qui elle même un groupe relativement à la même loi s'appelle sous groupe.

$(E,+)$ est groupe

$(V,+)$ est un sous groupe de $(E,+)$ si et seulement si :

$\forall x, y \in V : x + (-y) \in V$

ou : il suffit de vérifier

Proposition : Soit $\mathbb{K}$ un corps, un sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Demonstration : Il suffit de vérifier les axiomes définissant des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Proposition : Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et V un sous ensemble de E.

V est 1 sous espace vectoriel de E si seulement si : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V, \ \alpha x + \beta y \in V$

Familles libres, Familles génératrices :

Définition : soit I un ensemble et soit $A = \{\lambda_i , i \in I\}$ ($A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i\}$) une partie indicée par I.

On dit que A est <u>support fini</u> si l'ensemble des éléments i de I tels que λ_i est non nul est de cardinal fini

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in I , \lambda_i \neq 0 \\ \text{card}(I) = \beta \in \mathbb{N} \text{ fini} \end{cases}$$

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit A une partie de E. On suppose que $A = \{x_i ; i \in I\}$ où I est un ensemble permettant d'indicer A. On appelle <u>combinaison linéaire</u> des éléments de A tout élément de E donné par $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$

où $\{\lambda_i ; i \in I\}$ est une <u>famille à support</u> fini de scalaires de $\mathbb{K}$.

Remarque : Comme la famille des λ_i est à support fini, il n'y a pas de problème de convergence de la somme précédente.

théorème 1

Définition - Proposition ; Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit A un sous ensemble de E. L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A est un sous ~~ensemble~~ espace vectoriel de E appelé <u>sous espace vectoriel de E engendré par A</u>.

On notera $\text{Vect}(A)$ le sous espace vectoriel engendré par A

De plus, si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ (~~ensemble fini~~), on notera

$\text{Vect}(A) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

$\text{Vect} \langle A \rangle$: plus petit espace qui contient A !!

Théorème 2: Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E le sous espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel de E qui contient A.

Démonstration 1 (théorème 1)

Soit x et $y \in E$ qui s'écrivent comme une combinaison linéaire d'éléments de A. Il existe donc des scalaires λ_i et α_i de $\mathbb{K}$ pour tout $i \in I$, tels que : $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$

Soit λ et $\alpha \in \mathbb{K}$. le vecteur $\lambda x + \alpha y$ s'écrit :

$$\lambda x + \alpha y = \sum_{i \in I} (\lambda \cdot \lambda_i x_i + \alpha \alpha_i y_i)$$

qui est encore une combinaison linéaire d'éléments de A. $\alpha x + \beta y$ est donc élément du sous espace vectoriel engendré par A et cela permet de conclure.

Démonstration 2 (théorème 2): Tout sous espace contenant A contient toute combinaison linéaire de vecteurs de A. Donc le sous espace vectoriel engendré par A est inclus dans tout sous espace vectoriel contenant A.

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit aussi V un sous espace vectoriel de E (qui peut éventuellement être égal à E). Soient A une famille de vecteurs de V. Cette famille est une partie génératrice de V ou génératrice dans V si l'espace engendré par A est égal à V, ou autrement dit si $\mathrm{Vect}(A) = V$. On dit encore que A engendre V

$$V = \langle A \rangle = \mathrm{Vect}(A)$$

Définition : Soit A une partie de E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Indexons les éléments de A par l'ensemble I. A est appelée ~~libre~~ partie libre de E ou famille indépendante de vecteurs de E si pour tout ensemble à support fini $\{\lambda_i, i \in I\}$ de $\mathbb{K}$, l'égalité $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \neq 0$

- Dans le cas contraire la partie A est dite : partie liée ou famille dépendante de vecteurs de E.

Proposition : si E est un espace vectoriel et que A est une partie liée de vecteurs de E alors l'un des vecteurs de cette partie s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de A.

Dém : Posons $A = \{x_i, i \in I\}$. La ~~partie~~ partie A est liée dans E on peut trouver un sous ensemble de scalaire $\{\lambda_i, i \in I\}$ de $\mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Soit $m \in I$ tq $\lambda_m \neq 0$. L'égalité précédente peut se ré-écrire :

$$\lambda_m x_m = -\sum_{i \in I, i \neq m} \lambda_i x_i$$

Soit en multipliant à droite et à gauche par λ_m^{-1} :

$$x_m = -\sum_{i \in I, i \neq m} \lambda_m^{-1} \lambda_i x_i$$

On a ainsi bien écrit un des vecteurs de A comme combinaison linéaire des autres vecteurs de A.

Base d'un espace vectoriel.

Déf : Soit E un k-espace vectoriel. Soit I un ensemble et soit $A = \{x_i ; i \in I\}$ une famille d'éléments de E. Cette famille est une base de E si elle est à la fois libre dans E et génératrice de E tout entier. On notera généralement les bases sous forme d'une suite de vecteurs $\{x_i\}_{i \in I}$

Déf : Soit E un k-espace vectoriel. Soit I un ensemble, une famille $\{x_i ; i \in I\}$ est dite :

- libre maximale dans E si elle est libre dans E et que pour tout vecteur y de E différent de x_i, $i \in I$, la famille $\{x_i ; i \in I, y\}$ est liée dans E.
- génératrice minimale si elle engendre E tout entier et si, quand on la prive d'un de ses éléments, elle n'engendre plus E.

théorème : Soit E un k espace vectoriel. Soit I un ensemble et $A = \{x_i ; I \in I\}$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :

1. A est une base
2. A est libre maximale de E
3. A est génératrice minimale dans E.
4. A est génératrice de E et libre dans E.

Définition - théorème : Soit E un k-espace vectoriel. Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base de E. Pour un élément x de E il existe une famille unique à support fini $\{\lambda_i ; i \in I\}$ de scalaire de k telle que : $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

Le scalaire α_i s'appelle la ième coordonée x relativement à la base $\{e_i\}_{i\in I}$.

Dimension d'un espace vectoriel :

Déf : Soit k un corps et E un k-espace vectoriel. E est k-espace vectoriel de dimension finie si il possède une ~~famille~~ génératrice de cardinal fini. Dans le cas contraire, E est dit de dimension infinie.

théorème : Soit E un espace vectoriel sur un corps K. On suppose que E est de dimension finie. Alors E possède une base. De plus cette base est de cardinale finie.

Remarque : Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal. Ce cardinal sera appelé la dimension de l'espace vectoriel.

Lemme : Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soit $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs de E formant une base de E. Soient aussi $v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E. Supposons que $m > n$. Alors $v_1, \dots, v_m$ forme une famille liée de vecteurs de E.

théorème : Soit K un ~~espace~~ corps et soit E un k-espace vectoriel. Si E est de dimension finie alors toutes les bases de E ont même cardinale.

Déf : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps. Si E est reduit à sont élément nul alors on dit que la dimension de E est 0. Si non, on appelle dimension de E et note $\dim E$, le cardinal d'une base de E.

Théorème de la base incomplète :

Soient k un corps et un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soit $n = \dim E$ et soit $e = \{e_1, \dots, e_m\}$ une famille libre de E. On suppose que $m < n$. On peut alors trouver des vecteur $f_{m+1}, \dots, f_n$ dans E tels que $\{e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_n\}$ soit une base de E. On dit qu'on a complété la famille e en une base de E.

Sous espace vectoriel, sous espaces supplémentaires et somme directe de sous-espaces vectoriels

- Comment montrer que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base de E ?

E utilisant l'une des propositions suivantes :

1. la définition : la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une famille libre et génératrice de E.

2. une seule propriété suffit si on possède un renseignement sur la dimension :

a) $\begin{cases} \dim(E) = p \\ \text{la famille } \{v_1, \dots, v_p\} \text{ est libre} \end{cases} \Longrightarrow$ la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base

b) $\begin{cases} \dim(E) = p \\ \text{la famille } \{v_1, \dots, v_p\} \text{ est génératrice} \end{cases} \Longrightarrow$ la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une base.

k désigne un corps.

Déf : Soit E un k-espace vectoriel et soit V un sous espace vectoriel de E. Une base de sous-espace vectoriel V est une base de V tant qu'espace vectoriel.

Déf : On dit qu'un sous espace vectoriel est de dimension finie s'il est engendré, en tant qu'espace vectoriel, par une famille de cardinal fini.

Déf : La dimension d'un sous espace vectoriel de dimension finie est le cardinal d'une base de ce sous-espace vectoriel

Déf : Soit V et V' sont deux sous espaces vectoriels du k-espace vectoriel E. ~~alors~~ On note V+V' l'ensemble somme de ces deux sous espace vectoriels V et V'

$$V+V' = \{ v+v' ; v \in V, v' \in V' \}$$

Théorème : Si V et V' sont deux sous espaces vectoriel du k-espace vectoriel E alors V+V' est aussi un sous espace vectoriel de E.

Déf : Soit E un k-espace vectoriel et soient V et V' deux sous espaces vectoriels de E. ~~On note~~. On dit que V et V' sont en somme directe si $V \cap V' = \{0\}$. On note $V \oplus V'$ le sous espace somme de deux sous espaces supplémentaires

Déf : Soient V et V' deux sous-espaces vectoriels du k-espace vectoriel E. On suppose que V et V' sont en somme directe dans E et que $V \oplus V' = E$ alors V et V' sont dit supplémentaires dans E. V est un supplémentaire de V' dans E.

Théorème : Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors V possède un sous-espace ~~vectoriel~~ supplémentaire dans E.

Théorème : si V et V' sont deux sous espaces vectoriels de dimension finie du k-espace vectoriel E alors
$$\dim V + \dim V' = \dim(V+V') + \dim(V \cap V')$$

Déf : Soit p un entier positif. On appelle rang d'un système de vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de l'espace vectoriel E la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$.

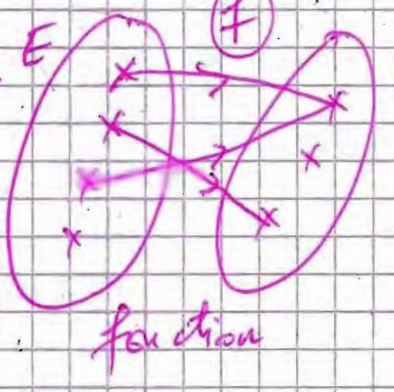
Applications linéaires.

Déf : (Rappel sur les applications)

1. fonctions et applications :

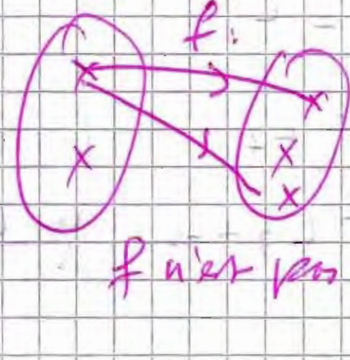
Soient E et F deux ensembles, si à tout élément x de E, on peut lui associer au plus un élément y de F, on dira qu'on a défini une fonction de E vers F qu'on ~~notera~~ notera f.

Exple 1



$f : E \longrightarrow F$ ou $E \xrightarrow{f} F$.

Exple 2



Domaine de définition d'une fct f : c'est l'ensemble $D(f)$ ou D_f défini $D(f) = D_f = \{x \in E \,/\, \exists\, y \in F,\ y = f(x)\} \subset E$.

- si $D(f) = E$ on dira que f est une application. Autrement dit f une ~~fct~~ application ; ssi : à tout élément x de E possède une image $f(x)$ ds F.

Le graphe d'une ~~fct~~ application :

$$\Gamma(f) = \Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \quad , \quad \Gamma(f) \subset E \times F.$$

si $E = F = \mathbb{R}$ le graphe de f s'identifie à la courbe représentative de f.

- Soit f et g deux fcts $E \xrightarrow{f,g} F$

$$f = g \iff \begin{cases} D(f) = D(g) = D \\ f(x) = g(x) \quad \forall x \in D \end{cases}$$

Composition d'application :

Soit, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications

$$g \circ f : E \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto g \circ f(x) = g[f(x)].$$

- E général $f \circ g \neq g \circ f$.

~~soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications~~

~~$(\mathcal{F}, \circ)$ est groupe $\{ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$~~

$f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ 3 app

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Image directe et Image réciproque d'une partie par application :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \subset E$

On définit $f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$

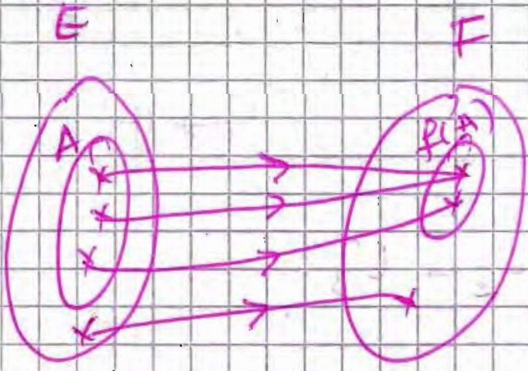
$$= \{ y \in F \,/\, \exists\, x \in A,\ y = f(x) \}$$

$f(A)$ sera appelée Image directe de A par f.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad x \longrightarrow x^2$

$A = [-1, 2]$, $f(A) = [0, 4]$



propriété : $f : E \longrightarrow F$ une application

$A \subset E$, $B \subset E$

i) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Image réciproque : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, soit $B \subset F$ on appelle image réciproque de B par l'appl f, qu'on note $f^{-1}(B)$.

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E \,/\, f(x) \in B \} \subset E$$

Exple: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^2$ $\quad B_1 = [-1, 0[$

$B_2 = [1, 4]$.

$f^{-1}(B_1) = \phi$, $f^{-1}(B_2) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

Propriété: $f : E \longrightarrow F$, appl , $B \subset F$, $B' \subset F$

i) $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

ii) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

iii) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

iv) $f^{-1}(C_F^{B}) = C_E^{f^{-1}(B)}$.

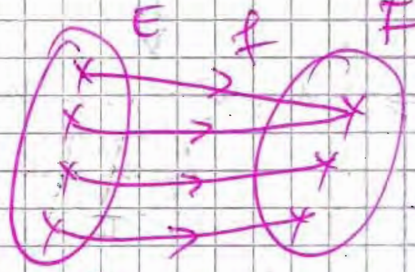
Application surjective, injective et bijective:

Soit $f : E \to F$ une application, on dira que f est surjective si l'une des propriétés suivante est vérifiée.

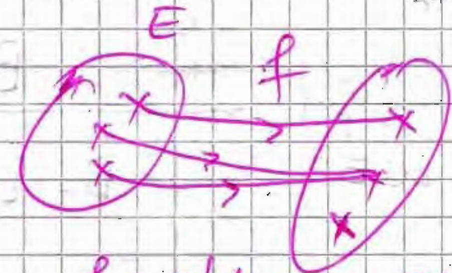
i) $f(E) = F$.

ii) $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tq $y = f(x)$

iii) $\forall y \in F$ l'éq. $y = f(x)$ possède au moins une solution.



f: surjective



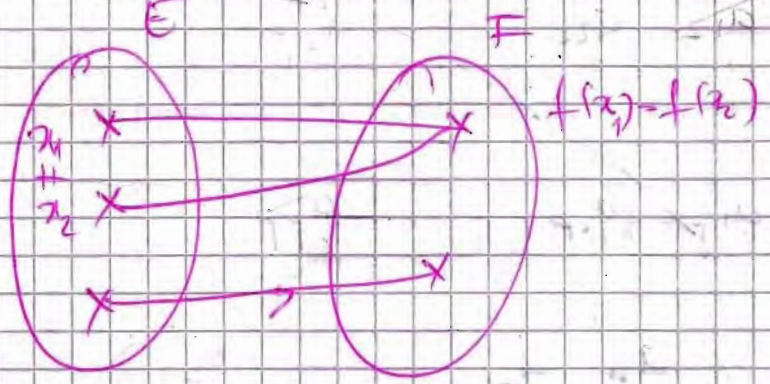
f : n'est pas surjective.

Application injective: Soit $f : E \longrightarrow F$ app f inj si l'une des propriétés st vérifiées

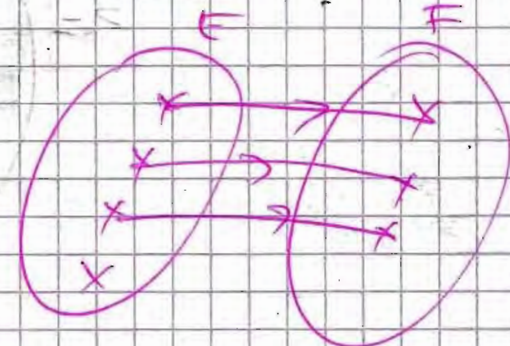
i) $\forall x \in E, \forall x' \in E$ $\quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

ii) $\forall x \in E, \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

iii) $\forall y \in F$ l'eq $y = f(x)$ possède au plus une solution



n'est pas ~~surjective~~ injective

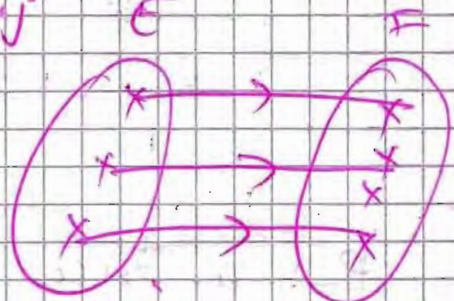


n'est pas une appli

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

$f(-1) = f(1)$

n'est inj



surjective

Application bijective :

$f : E \to F$ app on dira que f est bijective. Ssi :

i) f est à la fois surj et inj

ii) $\forall y \in F \quad \exists! x \in E$ tq $y = f(x)$

iii) $\forall y \in F$ l'eq $y = f(x)$ possède une et seule solution

Propriété : $f : E \to F, \quad g : F \longrightarrow G$

1) si f et g inj $\Rightarrow g \circ f$ inj

2) si f et g surj $\Rightarrow g \circ f$ surj

3) si f et g bij $\Rightarrow g \circ f$ bij

Soit f une appl bij de $E \to F$
$\exists!\ f' : F \to E$ tq :

$f \circ f' = id_F$, $f' \circ f = id_E$ $\qquad f' = f^{-1}$.

A ajouter relation d'equivalence

Applications Lineaires

Soient E et F deux k-espace et soit $f : E \to F$ une application.

Déf : On dira que f est lineaire (application lineaire) si :

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\ x, y \in E$

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in E$, $\lambda \in k$

Ceci est equivalent à dire : $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in k$
$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Déf : • Si f est bijective, dans ce cas f est appelée isomorphisme (et on dit également E et F sont isomorphisme)

• si $E = F$ on dira que f est endomorphisme

• si $E = F$ et si f est bij on dira que f est un automorphisme.

Notation : $\mathcal{L}(E,F)$ designe l'ensemble des applications lineaires de E dans F.

Exemple : ① $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto (x-z, x-y+z) = f(x,y,z)$

$E = \mathcal{C}([a,b])$ [toute fonction continue bornée sur $[a,b]$ et integrable]

Expl 2

$\phi : E = \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow F = \mathbb{R}$

$f \longmapsto \phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$

$$\phi(f+g) = \int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = \phi(f) + \phi(g)$$

$$\phi(\lambda f) = \int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt = \lambda \phi(f).$$

Expl 3 : $E = E_1 \times E_2$ (E_1, E_2 : 2 $\mathbb{K}$ - e.v).

$F = E_1$

$f : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$

$(x, y) \longmapsto f(x,y) = x$ est application linéaire

appelée projection de E sur E_1 notée par $Pr_1 = f$.

de m̂ : $Pr_2 : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$

$(x, y) \longrightarrow Pr_2(x,y) = y.$

Conséquences :

i) $f(0_E) = 0_F.$

$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$ après simplificat

on m aura $f(0_E) = 0_F.$

ii) $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots$

$+ \lambda_p f(x_p)$

$\forall x_1, x_2, \dots, x_p \in E, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}.$

Operations sur les application linéaires

i) somme de 2 applications linéaires est une application linéaire

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } f \in \mathcal{L}(E,F) \\ \text{et } g \in \mathcal{L}(E,F) \end{array}\right\} \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}(E,F)$$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } f \in (L,F) \\ \text{et si } \lambda \in \lambda \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}(E,F)$$

D'après (i) et (ii) on deduit que $\mathcal{L}(E,F)$ est K espace vectoriel

iii) $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(E,G)$ alors

$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

- En effet $\forall x \in E$, $\forall y \in E$
- $g \circ f(x+y) = g\left[f(x+y)\right] = g\left[f(x)+f(y)\right]$
$= g\left[f(x)\right] + g\left[f(y)\right] = g \circ f(x) + g \circ f(y)$

- $\forall \lambda \in K$, $\exists x \in E$ alors $g \circ f(\lambda x) = g\left[f(\lambda x)\right]$

$g\left[f(\lambda x)\right] = g\left[\lambda f(x)\right] = \lambda g\left[f(x)\right] = \lambda\, g \circ f(x)$

- $g \circ f$ est une application linéaire $\left[g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)\right.$

Noyau, Image d'une application linéaire.

Déf 1 : $f \in \mathcal{L}(E,F)$; on appelle noyau de f qu'on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Déf 2 : $f \in \mathcal{L}(E,F)$; on appelle Image de f qu'on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble de vecteurs de F défini par

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F \,/\, \exists x \in E \quad y = f(x)\} = \{f(x) \,/\, x \in E\}$$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto f[(x,y,z)] = f(x,y,z) = (x-y,\ y+z)$$

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = (0,0)\}.$$

$$= \{(x,y,z),\ x-y = y+z = 0\} = \{(x,x,-x);\ x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,1,-1);\ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-1) \rangle$$

$$\operatorname{Im} f = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ f(x,y,z) = (X,Y)\}$$

$$= \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } \begin{array}{l} X = x-y \\ Y = y+z \end{array}\right\}$$

On admettra le theoreme suivant :

Theoreme : si E est engendré par la famille $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ alors Imf est engendrée par $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$.

$$E = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \Rightarrow \operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle$$

$$E = \mathbb{R}^3 = \langle e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \rangle$$

$$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle (1,0), (-1,1), (0,1) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Im} f = \langle (-1,1), (0,1) \rangle = \mathbb{R}^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dim \operatorname{Im} f = 2 \\ \text{donc } \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2. \end{array} \right.$$

Theoreme :

Soit f une application lineaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

1) L'image directe de tout s.e.v E' de E est un s.e.v de F; En particulier Imf est s.e.v de F.

2) Si E' est engendré par $A \subset E$ alors $f(E') = \langle f(A) \rangle$

3) L'image reciproque de tout s.e.v $F' \subset F$ est s.e.v de E. En particulier Kerf est s.e.v de E.

~~4) Kerf est isomorphe à Imf~~

4) f est injective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

5) f surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$.

6) si f bijective, f^{-1} est aussi une application lineaire

$f^{-1} \in \operatorname{Iso}(F, E)$

7) $f \in Iso(E,F)$ "f bij" et $\dim E = \dim F \Leftrightarrow$

f bij $\Leftrightarrow f$ inj $\Leftrightarrow f$ surj $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$

8) $f, g \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-espace vectoriel

a) $f \circ g = g \circ f \Rightarrow g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$

b) $\operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

c) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ f) \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

Exple :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y,\ x+y-3z,\ -x-y)$.

- f - Linéaire
- $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$.
- Nature de f

Soit $v = (x,y,z)$, $v' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$.

$f(v+v') = f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z')$

$= (x+x'+y+y',\ x+x'+y+y'-3z-3z',\ -x-x'-y-y')$

$= ((x+y)+(x'+y'),\ (x+y-3z)+(x'+y'-3z'),\ (-x-y)+(-x'-y'))$

$= (x+y,\ x+y-3z,\ -x-y) + (x'+y',\ x'+y'-3z',\ -x'-y')$

$= f(x,y,z) + f(x',y',z') = f(v) + f(v')$.

$f(\lambda v) = f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x+\lambda y,\ \lambda x+\lambda y-3\lambda z,\ -\lambda x-\lambda y)$

$= \lambda(x+y,\ x+y-3z,\ -x-y) = \lambda f(x,y,z) = \lambda f(v)$

f est une application linéaire.

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$$f(x,y,z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x+y-3z = 0 \\ -x-y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$\ker f = \{(-y,y,0) \,;\, y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0),\; y \in \mathbb{R}\}$

$= \langle(-1,1,0)\rangle$, $\ker f \neq \{(0,0,0)\}$ donc f n'est pas injective.

$\underline{\operatorname{Im} f}$: on a $E = \mathbb{R}^3 = \langle e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\rangle$

$\operatorname{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle$

$\operatorname{Im} f = \langle (1,1,-1), (1,1,-1), (0,-3,0)\rangle = \langle (1,1,-1), (0,-3,0)\rangle$

~~dim f~~ $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ f n'est pas surjective.

Rang d'une application lineaire :

1) Espace ~~pas~~ vectoriel quotients

Def. theoreme : Soit E un K-espace vectoriel. Soit V un sous espace v de E. Sur E, on considere la relation d'equivalence suivante. Si $x, y \in E$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x-y \in V$. ($\mathcal{R}$ une relation d'equivalence sur E). On note E/V l'ensemble des classes d'equivalences de cette relation. E/V a une structure de K espace vectoriel

2) rang d'une app li : $\operatorname{rg} f = \dim f(E) = \dim(\operatorname{Im} f)$

Théorème :

1) $E/\mathrm{Ker}f$ est isomorphe à $\mathrm{Im}f$

2) $\mathrm{rg}\, f = \dim f(E) = \dim\left[E/f^{-1}(\{0\})\right] = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}f)$

$$\dim E = \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Ker}f).$$

3) Théorème : $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\dim E = p$, $\dim F = n$, alors

a) $\mathrm{rg}\, f = \dim(\mathrm{Im}f) = \dim(f(E)) \leq n$

b) $\mathrm{rg}\, f = p \Leftrightarrow f$ injective

c) $\mathrm{rg}\, f = n \Leftrightarrow f$ surjective

d) $\mathrm{rg}\, f = n = p \Leftrightarrow f$ bijective.

Théorème : $\mathcal{L} \in \mathrm{Iso}(E, F)$, $\dim E = \dim F$ alors,

a) L'image d'une base de E est une base de F

b) L'image réciproque d'une base F est une base de E

EXO 1 : $P_2(x)$ e.v. des polynômes de degrés ≤ 2

- $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$\boxed{P_2(x) = ax^2 + bx + c}$

$$f : P_2(x) \longrightarrow P_2(x)$$
$$P \longmapsto xP' + P''$$

Montrer que f est linéaire, calculer $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$.

EXO 2 :
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto (x+2y,\ y-z,\ x+z)$$

trouver une base et la dimension de $\mathrm{Im}f$.

EXO 3 : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+2y,\ y-z,\ x+z)$

linéarité, bij, et trouver f^{-1} s'il $\exists$.

EXO 4 : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (y+z,\ x+z,\ x+y)$

a) Démontrer que f est un isomorphe et déterminer f^{-1}

b) Soit $E = \{(x,y,z) \ ; \ x+y+z=0\}$

• Montrer que E est s.e.v de $\mathbb{R}^3$, que peut on dire de $f(E)$

c) quel est le noyau de la restriction de f à E.

CH. IV : Matrices

Soit k un corps commutatif, en pratique $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle matrice de type (n,p) à coefficients dans k, une application de $\{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,p\} \longrightarrow k$

$(i\ ,\ j) \longmapsto a_{ij}$

On note l'application par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Souvent on écrit $A = (a_{ij})$ $\begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p \end{array}$

n : nbre de lignes

p : nbre de colonnes

On désigne par $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type $(n,$

1) Si $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, $B \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

2) On définit la transposée de A qu'on note ${}^tA$ la matrice obtenue en changeant les lignes avec les colonnes (chaque ligne devient une colonne).

Si $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^tA \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

Quelques matrices particulières :

- une matrice A est dite carrée si le nbre de ligne = nbre de colonnes $(n = p)$.
- une matrice carrée est dite symétrique si :
$$ {}^tA = A \iff a_{ij} = a_{ji}$$
- Une matrice carrée est dite antisymétrique si :
$$ {}^tA = -A \iff a_{ij} = -a_{ji}$$

Dans matrice antisymétrique les éléments diagonaux sont nuls $(a_{ii} = 0 \quad \forall i, 1 \leq i \leq n)$.

Opérations sur les matrices

Soient A et $B \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

On définit $A+B$:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

$A+B \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

Propriétés de la somme :

$$\begin{cases} 1)\ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \\ 2)\ A+B = B+A \\ 3)\ (A+B)+C = A+(B+C) \end{cases}$$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

On définit produit d'une matrice par un scalaire λ par λA

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}, \quad \lambda A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

Proposition : $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ e.v de dimension np.

En effet $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + a_{12}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}$$

$$+ \cdots a_{ij}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{ij}} + \cdots + a_{np}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{E_{np}}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij}$$

E_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls à l'exception de l'élément qui se trouve sur l'intersection de $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1

$$M_{(n,p)}(\mathbb{K}) = \langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{np} \rangle$$

$$\lambda_{11} E_{11} + \lambda_{12} E_{12} + \dots + \lambda_{n,p} E_{np} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = \dots = \lambda_{ij} = \lambda_{np} = 0$$

les matrices $E_{11}, \dots E_{np}$ sont L.I, Elle forme une base de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et donc $\dim M_{(n,p)}(\mathbb{K}) = n.p$.

Remarque :

- $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de type (n,n) si $(p=n)$ → Alors $M_n(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ e.v de dim $= n^2$

- $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble matrices symétriques.
  $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble " antisymétriques.

1) $M_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$ e.v de dim $= n^2$
$S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux espaces vectoriels supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$ de dimension respective $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$

Théorème : toute matrice carrée s'écrit comme la somme de deux matrices l'une est symétrique et l'autre est antisymétrique.

$$B = S + A$$
$${}^tB = {}^tS + {}^tA = S - A \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{B + {}^tB}{2} \\ A = \dfrac{B - {}^tB}{2} \end{cases}$$

Cette décomposition est unique.

Produit de deux matrices :

$A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,m}(\mathbb{K})$ $\left(B \in M_{(p,m)}(\mathbb{K})\right)$

$A \cdot B \in M_{(n,m)}(\mathbb{K})$ défini par :

$$C = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{ip}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_p a_{ip} \cdot b_{pj}}$$

Exple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

$$C \times (A + B) = C \times A + C \times B$$

$$^t(A \cdot B) = {}^tB \times {}^tA \; ; \; [\, ^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \,].$$

En général : $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Rang d'une matrice : Soit A une matrice, $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ le nombre de lignes linéairement indépendantes égale (=) au nombre de colonnes (L.I) de A, le nombre commun est appelé rang de la matrice est noté ($rg\, A$).

→ De cette définition on a également :

$$rg(^tA) = rg(A).$$

Matrices carrées inversibles : Soit $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ une matrice carrée, on dira que A est inversible si il existe $B \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ tq : $A \cdot B = B \cdot A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[on note $B = A^{-1}$]

En réalité il suffit de vérifier $A \cdot B = I_n$.

Thme : A est inversible ssi $rg A = n$

⇕

On peut transformer A par des opérations élémentaires jusqu'à obtenir une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont tous non nuls.

Exple :

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 \\ L'_3 = L_3 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = L'_2 \\ L''_3 = L'_3 + \frac{2}{3} L'_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

les lignes sont linéairement indépendants ⇒ A est inversible ($rg A = 3$)

Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée ?

On a plusieurs méthodes :

a) $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1} Y$

Donc pour trouver la matrice A^{-1} l'inverse de A il suffit de résoudre le système $AX = Y$.

Exple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

On résout le système : $Ax = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$AX = Y \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 2x_3 = y_1 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_3 = y_2 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & 1 & y_2 \\ -2 & -3 & 5 & y_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & 1 & y_2 \\ 0 & -2 & 3 & y_3 + y_1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & y_1 \\ 0 & 3 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & y_3 + y_1 + \frac{2}{3} y_2 \end{array}\right)$$

$$\frac{11}{3} x_3 = y_1 + y_2 + \frac{2}{3} y_2 \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{3}{11} y_1 + \frac{2}{11} y_2 + \frac{3}{11} y_3}$$

$$3 x_2 + x_3 = y_2 \rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{1}{11} y_1 + \frac{3}{11} y_2 - \frac{1}{11} y_3}$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{11} y_1 + \frac{1}{11} y_2 + \frac{7}{11} y_3\right)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{22} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

b) $A^{-1} = T^{-1} U$ avec

T : matrice triangulaire ~~supérieure~~. ? inf

U : matrice triangulaire ~~inférieure~~ ? sup

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (A \mid I_3) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1} = ?$ $\quad TX = Y \iff X = T^{-1}Y$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{11} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} y_2 - \frac{1}{11} y_3 \\ x_1 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{6} y_2 + \frac{7}{22} y_3 \end{cases}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = T^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{22} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{2}{22} & \frac{6}{22} & -\frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{4}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}.$$

Matrice d'une application linéaire :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application où E et F 2 K-ev de dim p et m respectivement.

Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base de E

$\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ " " " F