

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$T^{-1} = ?$ $TX = Y \Leftrightarrow X = T^{-1}Y.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{11} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} y_2 - \frac{1}{11} y_3 \\ x_1 = \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{6} y_2 + \frac{7}{22} y_3 \end{cases}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = T^{-1} \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{22} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{18}{22} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ -\frac{2}{22} & \frac{6}{22} & -\frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{4}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire où E et F sont des espaces vectoriels de dimension p et m respectivement.

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une base de E
 et $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ une base de F

On a $f(e_1) \in F$ et F a comme base $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

$$\text{alors } f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1m}f_m$$

et et de même pour $f(e_2)$

$$f(e_2) = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2m}f_m$$

$$\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix}$$

A : matrice ayant n lignes et p colonnes, est appelée matrice de f relativement aux bases $\{e_i\}_{i=1, \dots, p}$, $\{f_j\}_{j=1, \dots, m}$, par fois on la note :

$$\begin{bmatrix} f \\ f \end{bmatrix}_{\{f_j\}}^{\{e_i\}} = A$$

→ cette matrice dépend du choix de bases de E et F . Quand on change de bases, la matrice change.

$$\rightarrow \text{Soit } v \in E, v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p$$
$$f(v) \in F \quad f(v) = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_m f_m$$

Quelle relation y a-t-il entre x_i et x'_i ?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & \dots & a_{p2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{im} & \dots & a_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f \\ f \end{bmatrix}_{\{f_j\}}^{\{e_i\}}$$

Proposition: Soit E, F, G 3 \mathbb{K} e.v. de dim: p, n, m respect.

$f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ 2 applications linéaires

on a: $g \circ f: E \rightarrow G$ une application linéaire

de plus:
$$\begin{bmatrix} g \circ f \\ \{g_i\} \\ \{f_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \{g_i\} \\ \{f_i\} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f \\ \{f_i\} \\ \{f_i\} \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x+y, 2x, x-y)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x+y, x, z+y)$$

Donner les représentations matricielles de f, g et $g \circ f$, prendre comme bases \mathcal{B} bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

$$\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

$$\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$$f(e_1) = (1, 0, 1) = f_1 + 0f_2 + f_3$$

$$f(e_2) = (1, 0, -1) = f_1 + 0f_2 - f_3$$

$$A = \begin{bmatrix} f \\ \{f_i\} \\ \{e_i\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(f_1) = (1, 1, 0) = f_1 + f_2 + 0f_3$$

$$g(f_2) = (1, 0, 1) = f_1 + 0f_2 + f_3$$

$$g(f_3) = (0, 0, 1) = 0f_1 + 0f_2 + f_3$$

$$B = \begin{bmatrix} g \\ \{g_i\} \\ \{f_i\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{\text{of}}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longmapsto ((x+y) + 2x, x+y, (x-y) + 2x) \\ = (3x+y, x+y, 3x-y)$$

$$g_{\text{of}}(e_1) = (3, 1, 3) = 3f_1 + f_2 + 3f_3$$

$$g_{\text{of}}(e_2) = (1, 1, -1) = f_1 + f_2 - f_3$$

$$C = \begin{matrix} \text{Artikelt} \\ \text{f}_1, \text{f}_2 \\ \text{f}_3 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vérifions que } C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- choix de bases :

Soit E un K -espace vectoriel de dimension p , soit $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ et $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_p\}$ deux bases de E . Soit $v \in E$.

$$\text{on a : } e'_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1p}e_p$$

$$e'_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2p}e_p$$

$$\vdots \\ e'_p = a_{p1}e_1 + a_{p2}e_2 + \dots + a_{pp}e_p$$

mit p ist:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

P : matrice carrée inversible.

Les colonnes de P sont données par les coefficients des vecteurs e'_1, e'_2, \dots, e'_p .

mit $x \in E$.

$$\begin{aligned} U &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p \\ &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_p e'_p \end{aligned}$$

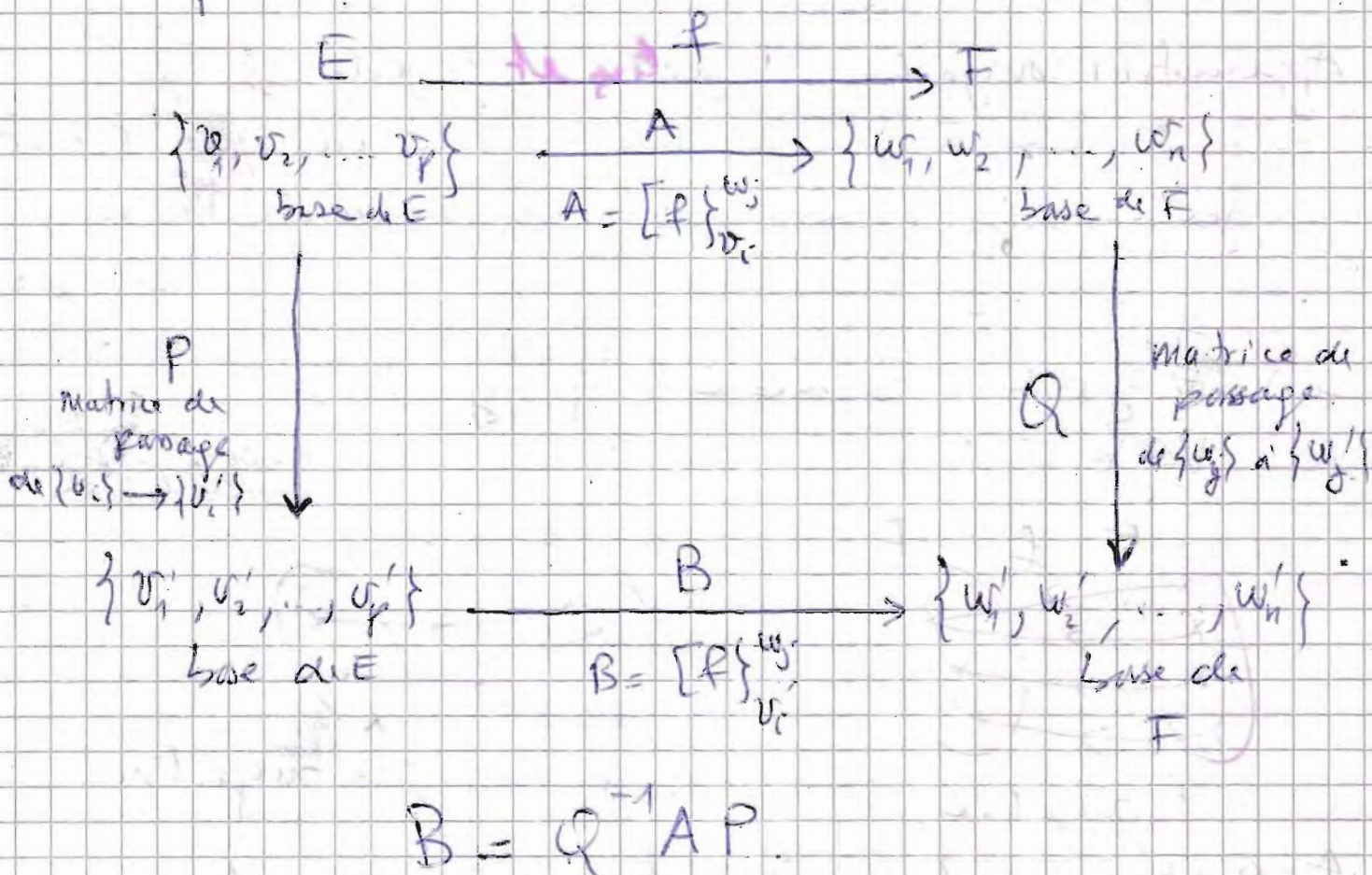
Quelle est la relation entre x'_i et x_i ?

$$\text{on a : } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

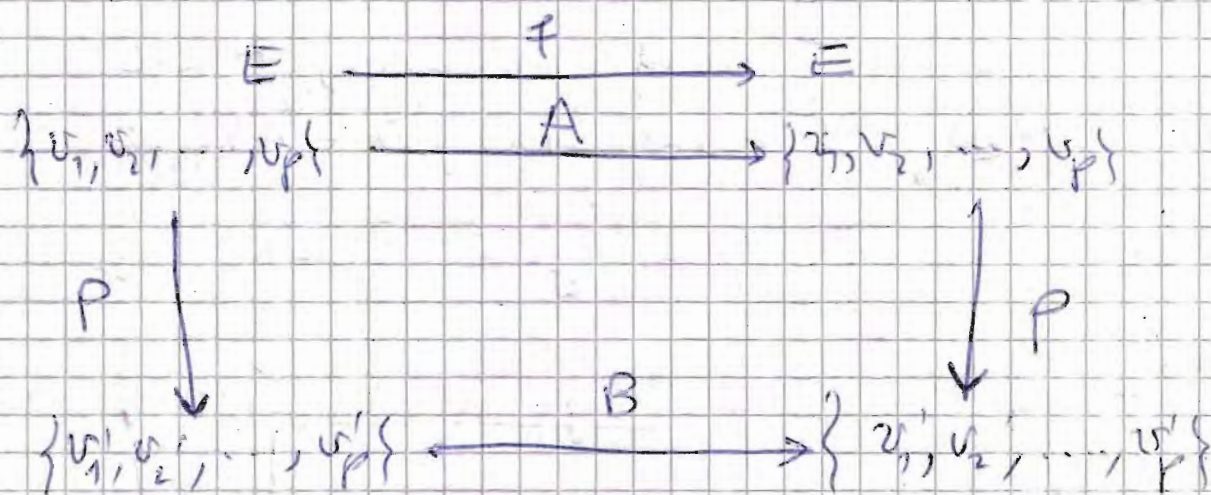
P : est appelée matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ à la base $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_p\}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

* Soit f une application linéaire de $E \rightarrow F$ tq $\dim E = p$ et $\dim F = n$.



cas particulier: $E = F$ $E \xrightarrow{f} E$



$$B = P^{-1} A P$$

Exemple d'application:

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base de \mathbb{R}^3

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, f application linéaire ($f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)

$$f(v_1) = -v_1$$

$$f(v_2) = v_1 + v_2 + v_3$$

$$f(v_3) = -v_2 - v_3$$

On demande:

- ① Matrice relative à $\{v_1, v_2, v_3\}$.
- ② base de $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$.
- ③ Montrer que $\{w_1 = -v_2, w_2 = v_1 + v_3, w_3 = v_1\}$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- ④ calculer par deux méthodes la matrice de f relative à la base $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Solution:

1) $A = [f]_{\substack{v_1, v_2, v_3 \\ v_1, v_2, v_3}} = ?$

$$f(v_1) = -v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$f(v_2) = v_1 + v_2 + v_3$$

$$f(v_3) = 0v_1 - v_2 - v_3$$

$$A = [f]_{\substack{v_1, v_2, v_3 \\ v_1, v_2, v_3}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ f(v_3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2) $\text{Ker} f = ?$

$$\text{Ker} f = \{ v \in E \mid f(v) = 0_F \} \quad \text{dowas nicht aus } E = F = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Ker} f = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$$

$$v = x v_1 + y v_2 + z v_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -x + y \\ y = y - z \\ z = y - z \end{cases}$$

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -x + y \\ y - z \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

$$\text{Ker } f = \left\{ x v_1 + x v_2 + x v_3 = x(v_1 + v_2 + v_3) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Ker } f = \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle, \dim \text{Ker } f = 1$$

On: Si $f: E \rightarrow F$ appl. linéaire, de plus si E est engendrée par $\{v_1, v_2, \dots, v_p\} \rightarrow$

$$\text{Im } f = f(E) = \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p) \rangle$$

dans notre cas:

$$\text{Im } f = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3) \rangle = \langle (-1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, -1, 1) \rangle$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} L'_1 = L_1 \\ L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} L''_1 = L'_1 \\ L''_2 = L'_2 \\ L'_3 = L'_3 + L'_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im } f = \langle (-1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle = \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle$$

$$\dim(\text{Im } f) = 2$$

③ Montrons que $\left\{ w_1 = -v_2, w_2 = v_1 + v_3, w_3 = v_1 \right\}$

$$\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\alpha(-v_2) + \beta(v_1 + v_3) + \gamma v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$(\beta + \gamma)v_1 - \alpha v_2 + \beta v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

comme $\{v_1, v_2, v_3\}$ est base de \mathbb{R}^3 ~~donc~~ ^{Alors} :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

~~car~~ ma $\left\{ \begin{array}{l} \{w_1, w_2, w_3\} \text{ sont l. I} \\ \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\{w_1, w_2, w_3\}$ est base de \mathbb{R}^3 .

④ Matrice de f relative à la base $\{w_1, w_2, w_3\}$

$$B = \begin{bmatrix} f \\ f \\ f \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1, w_2, w_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{array}$$

1^{ère} méthode :

Exprimer $f(w_1), f(w_2), f(w_3)$ dans la base w_1, w_2, w_3 .

$$\begin{aligned} f(w_1) &= f(-v_2) = -f(v_2) = -(v_1 + v_2 + v_3) = -(v_1 + v_3) - v_2 \\ &= w_1 - w_2 \end{aligned}$$

$$f(w_2) = f(v_1 + v_3) = f(v_1) + f(v_3) = -v_1 - v_2 - v_3 = w_1 - w_2$$

$$f(w_3) = f(v_1) = -v_1 = -w_3$$

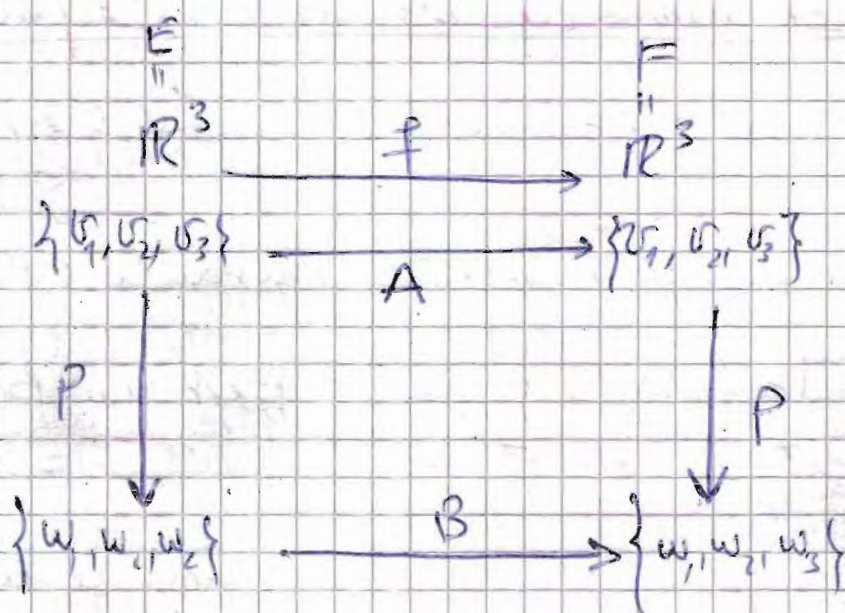
$$f(w_1) = w_1 - w_2 + 0w_3$$

$$f(w_2) = w_1 - w_2 + 0w_3$$

$$f(w_3) = 0w_1 + 0w_2 - w_3$$

$$B = \begin{bmatrix} f \\ f \\ f \end{bmatrix}_{\substack{w_1, w_2, w_3 \\ w_1, w_2, w_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2^{ème} méthode (application du théorème): $B = P^{-1}AP$



$$B = P^{-1}AP$$

avec $A = \begin{bmatrix} f \\ f \\ f \end{bmatrix}_{\substack{u_1, u_2, u_3 \\ v_1, v_2, v_3}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculons la matrice de $\{u_1, u_2, u_3\} \longrightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$.

$$\begin{aligned} v \in \mathbb{R}^3 : v &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 \\ &= x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

~~$$w_1 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$$~~

$$w_1 = 0v_1 - v_2 + 0v_3$$

$$w_2 = 2v_1 + 0v_2 + v_3$$

$$w_3 = v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & y_1 \\ -1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \\ L_2 \\ L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1 \\ L_2 = L_2 \\ L_3' = L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & y_3 - y_1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_3 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\boxed{x_3 = y_1 - y_3} ; \quad x_2 = y_1 - (y_1 - y_3) \Rightarrow \boxed{x_2 = y_3}$$

$$\boxed{x_1 = -y_2}$$

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P^{-1} \quad \cdot \quad A \quad \cdot \quad P$

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminants

Introduction: Considérons le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{--- (1)} \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = Y$$

On sait qu'un tel système possède une solution unique si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$, le nombre appelé déterminant du système (1) ou de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ et est

note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a b' - a' b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

donc si ~~on pose~~ on considère le système

$$A X = C \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ce système a une unique solution si

$$\boxed{\det A \neq 0} \iff (\text{vect. ab. ou vect. ligne L.I.})$$

mineurs - cofacteurs

soit $A \in M_{(n,n)}(K)$, $K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

soit " A_{ij} " la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne; c-à-d la ligne et la colonne contenant l'élément a_{ij} .

A_{ij} est appelé mineur de l'élément a_{ij}

le nombre $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ et appelé cofacteur de a_{ij} .

Exemple : $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(3,3)$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \det(A_{23})$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Calcul d'un déterminant

le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,n)$ (matrice carrée)

$\det A =$ la somme des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) multipliés chacun par son cofacteur

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$

$$= a_{11} (-1) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$

$$\det A = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$$

→ une matrice carrée est régulière lorsque son déterminant est non nul, on dit matrice singulière pour matrice non régulière.

Propriétés de déterminants

1° Dans tout déterminant

a) le mineur (de même le cofacteur) de tout élément est indépendant des éléments appartenant à la même ligne de ceux appartenant à la même colonne.

~~b) si tous les éléments (de même les cofacteurs) de~~

b) si tous les éléments d'une colonne (resp. ligne) sont nuls, alors le déterminant est nul.

c) si les mineurs (de même les cofacteurs) de tous les éléments d'une colonne (resp. ligne) sont nuls, alors le déterminant est nul.

2° : Si dans un déterminant d'ordre n , tous éléments d'une colonne (resp. ligne), sont nuls, sauf un alors le déterminant est ce dernier multiplié par son cofacteur. Inversement, on peut y mettre un déterminant d'ordre $n-1$, sous la forme d'un déterminant d'ordre n .

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & y \\ c & d & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(ordre 2) (ordre 3)

Notation :

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{col}_1 & \text{col}_2 & \dots & \text{col}_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix} = (\text{col}_1, \text{col}_2, \dots, \text{col}_n)$$

3° : si une colonne : $\text{col}_i = \alpha \text{col}_i' + \beta \text{col}_i''$ alors :

$$\det(\text{col}_1, \dots, \text{col}_i, \text{col}_i, \text{col}_{i+1}, \dots, \text{col}_n)$$

$$\det(\text{col}_1, \dots, \text{col}_i, \alpha \text{col}_i', \text{col}_{i+1}, \dots, \text{col}_n) + \det(\text{col}_1, \dots, \text{col}_i, \beta \text{col}_i'', \text{col}_{i+1}, \dots, \text{col}_n)$$

Exple :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 + \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 + \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 + \beta_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 \\ a_{31} & a_{32} & \alpha_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & \beta_3 \end{pmatrix}$$

4^o La valeur d'un déterminant ne change pas quand on remplace une colonne C_i par $C_i + \beta C_j$

→ plus généralement la valeur d'un det ne change pas quand on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

$$C_i \longrightarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$$

Exemple :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} + \beta a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} + \beta a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

5^o Le déterminant d'une matrice triangulaire = au produit des éléments diagonaux.

6^o Le déterminant de 2 matrices carrées de n ordre = au produit des déterminants des deux matrices.
 $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-2-1 \\ 0 & 1 & -1-1-0 \\ 1 & 2 & -2-2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-5) = -5$$

7// En changeant 2 colonnes le déterminant change de signe opposé.

Exemple

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$$

8// Si dans un déterminant 2 colonnes sont proportionnelles alors ce déterminant est nul (0).

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 3 & 2\sqrt{2} \\ \frac{2}{4} & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{col}_3 = -2 \text{ col}_1)$$

9// Produit d'un déterminant par un nombre

pour multiplier un déterminant par un nombre, il suffit de multiplier 1 élément d'une colonne (resp. ligne) par ce nombre.

Exemple :

$$m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & m a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & m a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & m a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1011. $\det(tA) = \det(A)$

→ toute propriété valable pour les colonnes, l'est pour les lignes et réciproquement.

calcul de l'inverse d'une matrice:

si A est inversible ($\det A \neq 0$) alors:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} t C$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\det A = -5 \neq 0$ (donc A est inversible).

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{13} = (-1)^4 = 1$, $C_{21} = 10$, $C_{22} = -5$, $C_{23} = 0$, $C_{31} = -5$

$C_{32} = 1$, $C_{33} = 1$

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $t C = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 0 & 10 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Système de Cramer

On appelle un système de Cramer tout système de n équations du 1^{er} degré à n inconnues (même nombre d'équations que d'inconnues) tel que le déterminant de la matrice (carrée d'ordre n) A des coefficients des inconnues est non nul.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}$$

Exemple:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 5y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{5} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{5} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{5} = 3$$

Diagonalisation des matrices

(recherche d'une matrice inversible contenant un maximum de zéros = réduction de matrices.)

Vecteur propre: On appelle vecteur propre d'un endomorphisme f d'un \mathbb{K} espace vectoriel E tout vecteur $x \in E$ qui vérifie $f(x) = \lambda x$ pour certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

• ce scalaire λ est appelé valeur propre de f .

• si $x \neq 0_E$ est vecteur propre de f (~~A~~), ~~alors~~

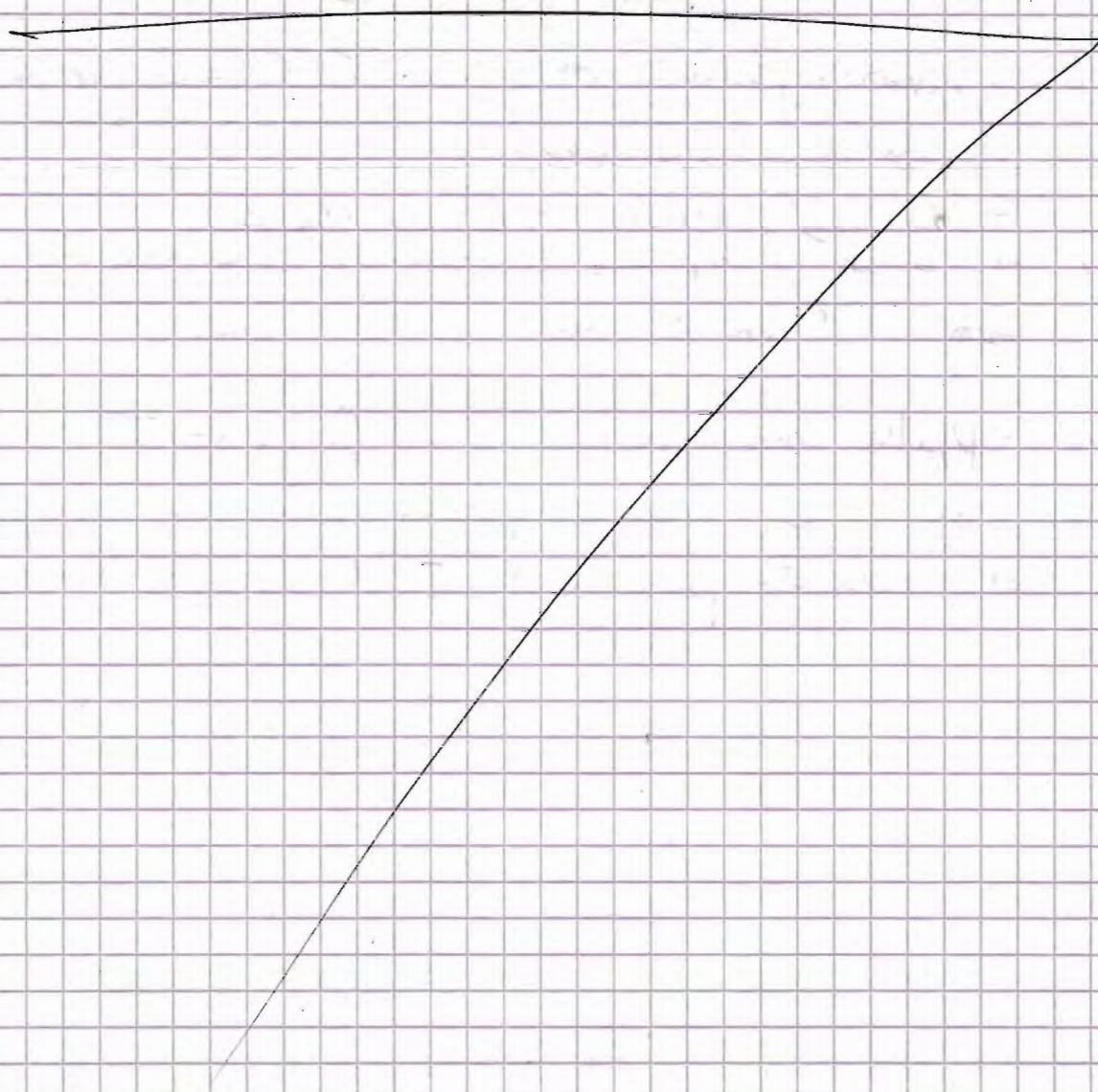
théorème 1 : L'ensemble E_λ des vecteurs propres de f associés à λ est un sous-espace vectoriel de E .

théorème 2 : f a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de f correspondent deux sous-espaces de vecteurs propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ tels que : $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.

théorème 3 : Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des valeurs propres de f distinctes. Alors la somme des sous-espaces associés est directe :

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$$

valeurs propres : (Voir le cours suivant)



Diagonalisation des matrices.

Le problème de la réduction des matrices est la recherche d'une matrice semblable à $A = (a_{ij})$ [matrice d'un endomorphisme de dimension finie n], et contenant un maximum de zéros.

1) vecteurs propres: On appelle vecteur propre d'un endomorphisme f d'un \mathbb{K} espace vectoriel E tout vecteur $\vec{v} \in E$ qui vérifie $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\vec{v} \neq \vec{0}_E$ alors \vec{v} est vecteur propre de f .

théorème 1: L'ensemble E_λ des vecteurs propres de f associés à λ est sous-espace vectoriel de E .

théorème 2: à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de f correspondent deux ~~espace~~ sous-espaces vectoriels E_{λ_1} et E_{λ_2} tels que: $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{\vec{0}_E\}$.

théorème 3: soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres de f distinctes. Alors la somme des sous-espaces associés est directe: $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m} = FCE$.

2) valeurs propres: On appelle valeur propre de l'endomorphisme f de E ($f: E \rightarrow E$) tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ pour un $\vec{v} \in E$.

théorème 4: à un vecteur propre $\vec{v} \neq \vec{0}_E$ correspond une valeur propre unique.

Définition 2 on appelle valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée A les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme associé à cette matrice A .

Polynôme caractéristique: Pour trouver les valeurs propres λ de f , on part de $f(x) = \lambda x$. cela donne $(f - \lambda I_E)(x) = 0$. cette équation fonctionnelle entraîne un système d'équations linéaires homogène.

$$(f - \lambda I_E)(x) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_{(n,n)}) = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant fournit une équation de degré n en λ , appelée équation caractéristique de f et de A .

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} b_1 \lambda^{n-1} + b_2 (-1)^{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + b_0 = 0.$$

→ les coefficients b_i sont des fonctions de a_{ij} . on trouve en particulier,

$$b_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Tr}(f) = \text{tra}(A)$$

$$b_0 = \det(f) = \det(A).$$

Le polynôme caractéristique de f est le polynôme :

$$P_A(X) = P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tra}(A) \cdot X^{n-1} + \dots + \det(A)$$

→ le polynôme caractéristique de f ou de A est indépendant de la base de E que l'on a choisie d'après le théorème suivant :

théorème : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

N.B (B est semblable à A et de la forme $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$)

théorème : Soit $(f : E \rightarrow E)$ f endomorphisme de E , pour qu'un scalaire $\lambda \in K$ soit une valeur propre de f , il faut et il suffit λ soit racine du polynôme caractéristique de f ou de A .

théorème :

a) Les valeurs propres de f (ou de A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

b) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

théorème : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale.

4.1 Diagonalisation d'une matrice :

théorème : Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E dont le polynôme

Le polynôme caractéristique de f est le polynôme :

$$P_A(X) = P_f(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tra}(A) \cdot X^{n-1} + \dots + \det(A)$$

→ le polynôme caractéristique de f ou de A est indépendant de la base de E que l'on a choisie d'après le théorème suivant :

théorème : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

N.B (B est semblable à A et de la forme $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$)

théorème : Soit $(f: E \rightarrow E)$ f endomorphisme de E , pour qu'un scalaire $\lambda \in K$ soit une valeur propre de f , il faut et il suffit λ soit racine du polynôme caractéristique de f ou de A .

théorème :

a) Les valeurs propres de f (ou de A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

b) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

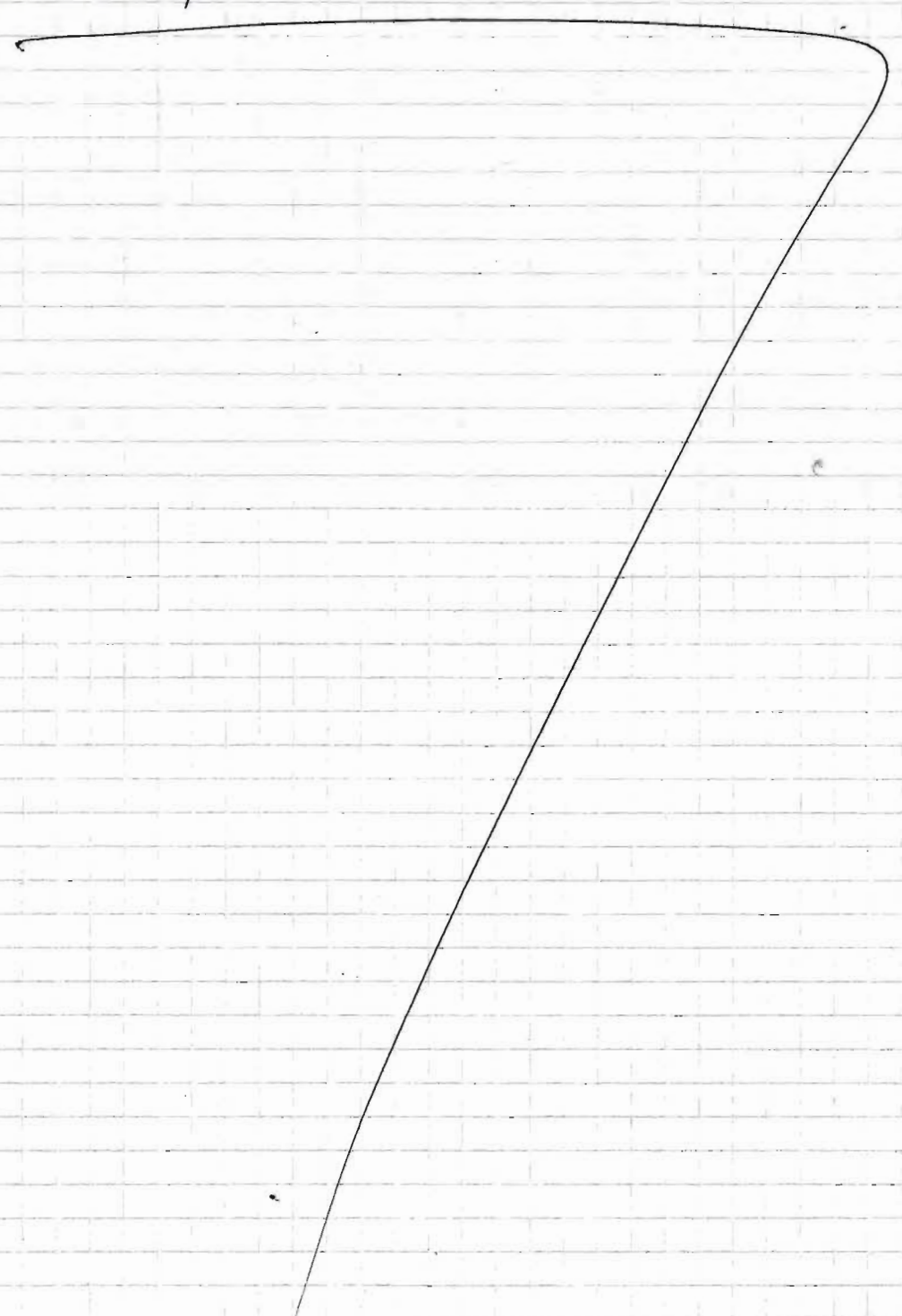
théorème : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire, ~~elles~~ sont les éléments de sa diagonale principale.

4.1 Diagonalisation d'une matrice :

théorème : Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E dont le polynôme

Caractéristique $P_A(X)$ admet n racines distinctes λ_i
alors il existe une base $\{\vec{e}_i\}_i$ de E telle que
 $f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$ pour $i=1, 2, \dots, n$.

théorème: une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique admet n racines simples.



Réduction des endomorphismes (Diagonalisation des matrices carrées)

Definition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme, où E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \neq \infty$. On sait que cette application $f: E \rightarrow E$ on peut la représenter dans une base quelconque de E .

$$\text{Si } \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_{\substack{\{\vec{e}_i\}_{i=1, n} \\ \{\vec{e}_i\}_{i=1, n}}} = A, \quad \begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_{\substack{\{\hat{f}_i\}_{i=1, n} \\ \{\hat{f}_i\}_{i=1, n}}} = B. \text{ alors}$$

il existe une matrice de passage P de la base $\{\vec{e}_i\}$ de E à la base $\{\hat{f}_i\}$ de E . telle que:

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

→ On dit que A et B sont matrices semblables

→ La réduction des endomorphismes (matrices carrées) consiste à rechercher des bases dans lesquelles les matrices de ces endomorphismes se présentent sous formes simplifiées dites réduites (maximum de zéros de la matrice semblable).

Matrices diagonales: Definition:

une matrice carrée est dite diagonale si les termes qui ne sont pas sur la diagonale principale sont tous nuls.

→ L'ensemble des matrices diagonales est sous-espace vectoriel de l'espace $M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ de dimension n .

→ le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

ces propriétés montrent l'intérêt des méthodes de réduction d'une matrice à forme diagonale.

→ la diagonalisation de A matrice de l'endomorphisme f consiste à la réduire d'une matrice D semblable à A :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ \left\{ \vec{e}_i \right\}_{i=1, \dots, n} & \xrightarrow{A} & \left\{ \vec{e}_i \right\}_{i=1, \dots, n} \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ \left\{ \vec{f}_i \right\}_{i=1, \dots, n} & \xrightarrow{D} & \left\{ \vec{f}_i \right\}_{i=1, \dots, n} \end{array} \quad (D = P^{-1} \cdot A \cdot P)$$

$\left\{ \vec{f}_i \right\}_{i=1, \dots, n}$ est la base de E où D une matrice diagonale.

valeurs propres, vecteur propres :

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

$B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ une base de E , soit f une application définie sur E ($f: E \rightarrow E$). A est la matrice de f dans la base B . I désigne la matrice unité d'ordre n .

Def : Un élément λ de \mathbb{K} est appelé une valeur propre de f (ou de A) si il existe un vecteur \vec{v} non nul de E tel que l'on ait $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ (ou $A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$).

***) un élément non nul $\vec{v} \in E$ est appelé un vecteur propre de f (ou de A) s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que l'on ait : $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

\vec{v} est appelé un vecteur propre associé à la valeur propre λ de f (ou de A).

théorème : à un vecteur propre $\vec{v} \neq \vec{0}_E$ correspond une valeur propre unique λ .

Polynôme caractéristique de f (ou de A) :

Pour trouver les valeurs propres λ_i de f (ou de A), on part de $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ cela nous donne $(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}_E$

\rightarrow cette équation fonctionnelle entraîne un système d'équations linéaires homogène.

$$(A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}_E \iff \det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{car } \vec{v} \neq \vec{0}_E)$$

soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$, A : représentation matricielle de f dans une base de E . ($f: E \rightarrow E$) application linéaire

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

le développement de ce déterminant fournit une équation de degré n en λ , appelée équation caractéristique de f (ou de A). Le polynôme en λ de degré n appelé polynôme caractéristique de f ou de A noté :

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = A - \lambda I = 0$$

$$P_A(\lambda) = A - \lambda I = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_1 \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} a_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_0 = 0$$

avec c :

$\rightarrow b_i$: sont des fonctions des éléments de A (a_{ij}), en particulier.

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(f)$$

$$a_0 = \det(A) = \det(f).$$

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres de A .

1) polynôme caractéristique:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) \\ = (-1-\lambda)(3-\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

2) valeurs propres

$$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -1$$

3) vecteurs propres:

a) vecteur propre \vec{v}_1 associé $\lambda_1 = 3$, $\vec{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \Rightarrow (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0 \\ 2x_1 - 2y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = +x_1$$

$\vec{v} = (x_1, +x_1) = x_1 (1, 1)$ le $\vec{v}_1 = x_1 (1, 1)$ est
vecteur propre de $\lambda_1 = 3 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$.

b) vecteur $\vec{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ associé $\lambda_2 = -1$

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \Rightarrow (A - \lambda_2 I) \vec{v}_2 = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 2y_2 = 0 \\ 2x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -x_2$$

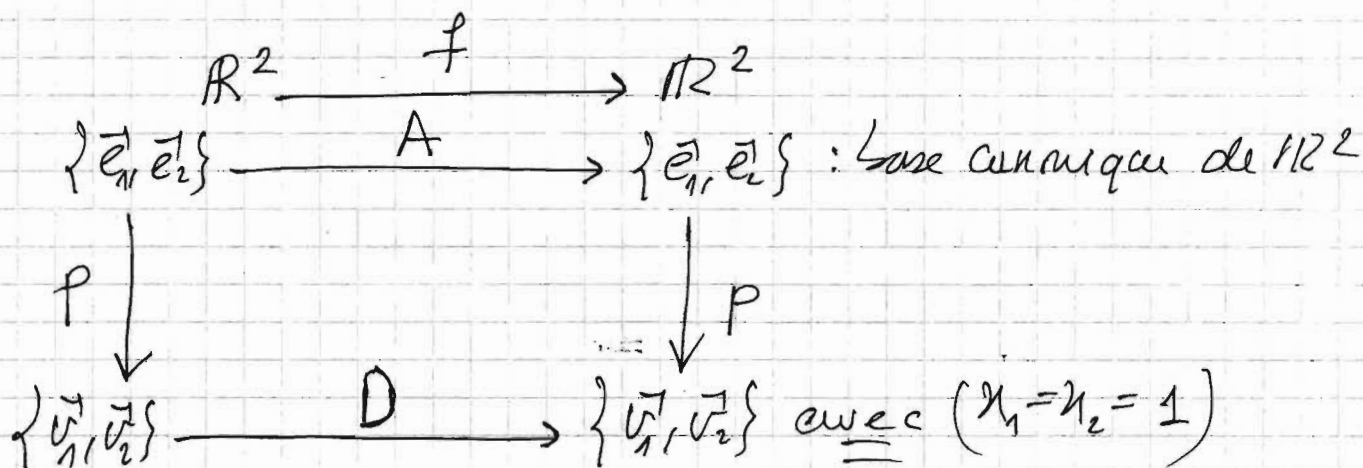
$\vec{v}_2 = (x_2, -x_2) = x_2(1, -1)$ est le vecteur propre de $\lambda_2 = -1$
 $\forall x_2 \in \mathbb{R}$.

La matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale de A

avec $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Propriétés fondamentales: Soit $\lambda \in K$, $f: E \rightarrow E$

1) λ est une valeur propre de f (ou de A) ssi $\det(A - \lambda I) = 0$

2) deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (même valeurs propres et vecteurs propres) et de plus le degré de ce polynôme égal la dimension de E

Sub-espaces propres:

Soit $\lambda \in K$ une valeur propre de f (ou de A). Le sous-espace propre de f associé à λ est le sous-ensemble de E défini par:

$$E_\lambda = \{ \vec{v} \in E / f(\vec{v}) = A\vec{v} = \lambda\vec{v} \}.$$

Propriétés:

1) Soit $\lambda \in K$ et $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda I) = \text{Ker}(A - \lambda I)$ est sous-espace vectoriel de E

→ De plus si λ est une valeur propre de f , $\dim E_\lambda \geq 1$.

2) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ des vecteurs propres associés,

et $F = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle$ Alors:

a) $f(F) \subset F$

b) $\dim E = m$ et par conséquent $\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \}$ est une partie libre.

c) les se propres E_i associés aux valeurs propre λ_i ;

$1 \leq i \leq m$, sont en somme directe.

3) Si λ est l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique, on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq \lambda$$

Diagonalisation :

Def 1) Un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ est dit diagonalisable s'il existe une base B' de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2) Une matrice A carrée d'ordre n est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que la matrice $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ soit diagonale.

théorème (!) Soit $f: E \rightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension fini " n ". Alors :

a) f est diagonalisable ssi E admet une base formée de vecteurs propres de f .

b) Soit $\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \}$ l'ensemble de valeurs propres de f . E_1, E_2, \dots, E_m les sous-espaces propres associés.

Alors : f est diagonalisable ssi $\dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_m = \dim E$.

Théorème (2) : pour qu'une matrice carrée d'ordre n soit diagonalisable, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres dans \mathbb{K} et que la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre soit égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.

Théorème (3) :

si f a n valeurs propres distinctes ou $n = \dim E$, alors f est diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton :

Soit $A \in M(n, n)(\mathbb{K})$, P_A son polynôme caractéristique, alors : $P_A(A) = 0$.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (P_A(\lambda) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 3)) \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$$

$$E_{\lambda_1=4} = \langle (1, 0, 1) \rangle, \quad E_{\lambda_2=3} = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Application " systèmes différentiels :

Dans de nombreux problèmes en mathématique, en physique ou en mécanique, en économie, ... , il est particulièrement intéressant (parfois nécessaire) de travailler par une matrice diagonale, par ailleurs les vecteurs propres et les valeurs propres correspondent à certaines directions et certaines valeurs privilégiées.

Exemple: Résolution d'un système différentiel.

$$\text{Soit } x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto x(t) \quad \quad \quad t \longmapsto y(t)$$

deux fonctions de variables telles que :

$$\vec{v} = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

~~$\vec{v} = (x, y)$~~

$$\vec{v} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy}{dt} \vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \vec{v}_1 = (1, -1) \rightarrow \vec{p}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \vec{v}_2 = (1, 2) \rightarrow \vec{p}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha e^t \\ y = \beta e^{4t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha e^t \vec{f}_1 + \beta e^{4t} \vec{f}_2 \\ &= (\alpha e^t + \beta e^{4t}) \vec{e}_1 + (-\alpha e^t + 2\beta e^{4t}) \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \alpha e^t + \beta e^{4t} \\ y(t) = -\alpha e^t + 2\beta e^{4t} \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Cas general.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$$

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = U_n = \dots = U_1 \\ V_{n+1} = 4 V_n = 4^{n-1} V_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = U_1 + 4^n U_1 \\ V_n = U_1 + 2 \cdot 4^n U_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = U_1 + 4^n U_1 \\ V_n = U_1 + 2 \cdot 4^n U_1 \end{array} \right.$$

Remarque : De même une relation de la forme :

$$U_{n+2} = a U_{n+1} + b U_n.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_n = U_{n+1} \\ V_{n+1} = a V_n + b U_n \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = V_n \\ V_{n+1} = a V_n + b U_n \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}}$$