

# Chapitre 2

## Modèle géométrique : Analyse de position

---

### 2.1 INTRODUCTION

- ◆ Modèle géométrique Direct :

Déterminer où est l'effecteur du robot si toutes les articulations sont connues.  $X=f(q)$

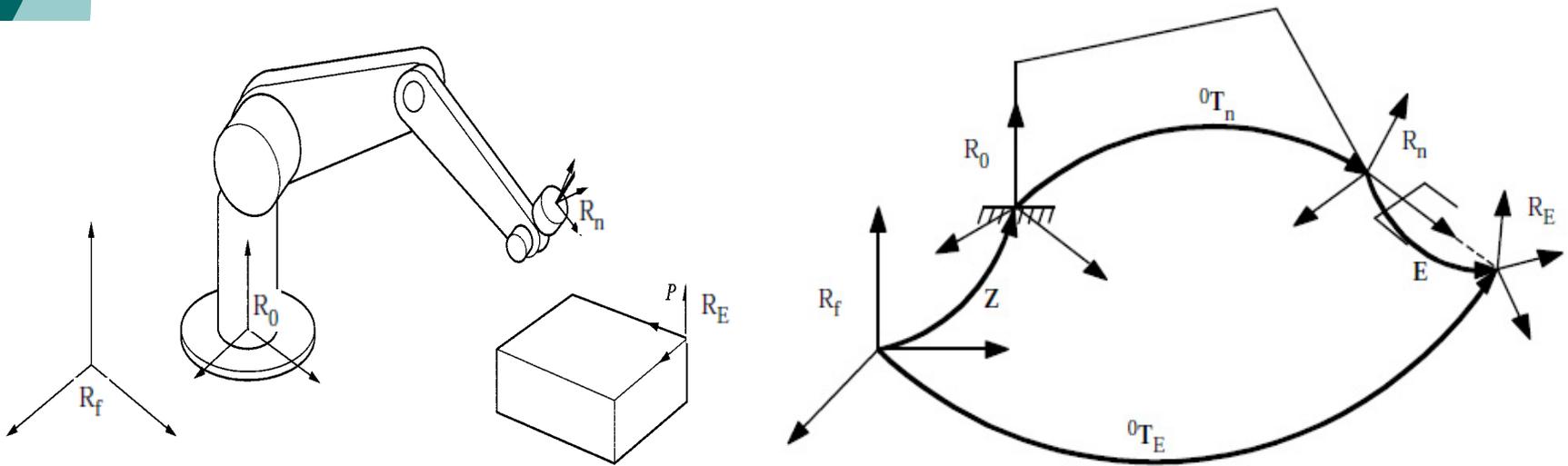
- ◆ Modèle géométrique Inverse MGI :

Calculer la valeur de chaque variable articulaire  $q$  :  
(Si on veut que l'effecteur soit dans une position désirée)

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

*Position du problème* : Le robot dans son environnement de travail



Soit  ${}^fT_E^d$  la matrice de transformation homogène représentant la situation désirée du repère outil  $R_E$  par rapport au repère atelier  $R_f$  :

$${}^fT_E^d = Z {}^0T_n(q) E$$

- $Z$  :  $R_0$  dans le repère atelier  $R_f$ ;
- ${}^0T_n$  :  $R_n$  dans le repère  $R_0$ , fonction du vecteur des variables articulaires  $q$  ;
- $E$  :  $R_E$  dans le repère terminal  $R_n$ .

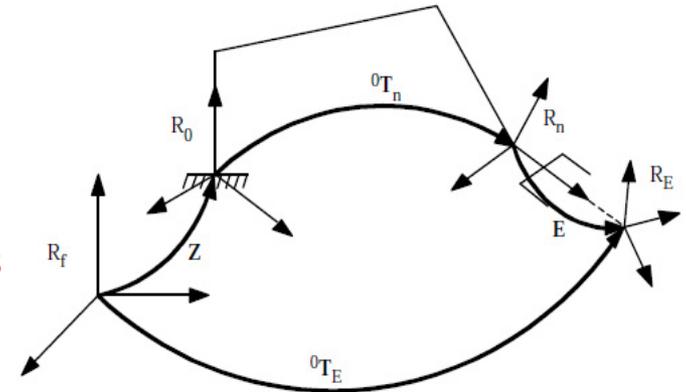
# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

Lorsque  $n \geq 6$ , on peut écrire la relation suivante :

$${}^0T_n(\mathbf{q}) = Z^{-1} {}^fT_E^d E^{-1}$$

Les inconnues  $\rightarrow$   ${}^0T_n(\mathbf{q})$   $\leftarrow$  Termes connues



Lorsque  $n < 6$ , l'espace opérationnel du robot est de dimension inférieure à six. Il n'est pas possible de faire coïncider le repère outil  $R_E$  avec un repère  $R_E^d$  décrivant la tâche sauf si les deux repères sont conditionnés de façon particulière.

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

$${}^0T_n(\mathbf{q}) = Z^{-1} {}^fT_E^d E^{-1}$$

**Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :**

– a) **Absence de solution**

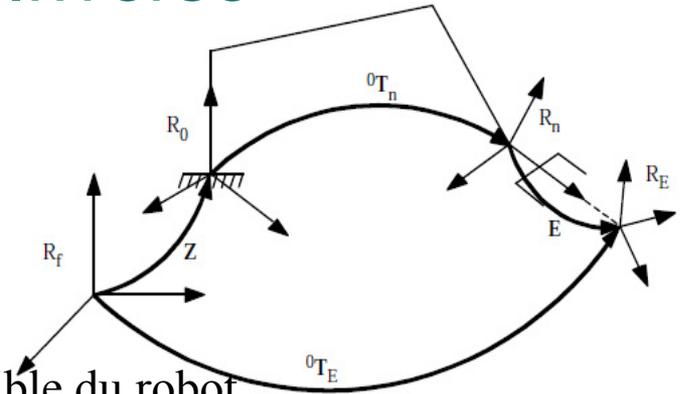
La situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot.

– b) **Infinité de solutions :**

- le robot est redondant vis-à-vis de la tâche ;

- le robot se trouve dans certaines configurations singulières ;

– c) **Solutions en nombre fini**, exprimées par un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r\}$ .



**Aujourd'hui**, tous les manipulateurs série ayant jusqu'à six degrés de liberté et qui ne sont pas redondants peuvent être considérés comme **résolubles c'est-à-dire** il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée.

\* Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur.

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

### 2.2.1 Principe de la méthode de Paul

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène a pour expression

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

Soit  $U_0$  la situation désirée telle que :  $U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

### 2.2.1 Principe de la méthode de Paul

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

- Pour trouver les solutions, on prémultiplie successivement les deux membres de l'équation par les matrices  ${}^jT_{j-1}$  pour  $j$  variant de 1 à  $n-1$ .
- Ces opérations permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche.

\* On rappelle que  ${}^jT_{j-1} = {}^jT_{j-1}^{-1}$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

### 2.2.1 Principe de la méthode de Paul

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$U_0 = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n)$$

Pour un robot à six degrés de liberté par exemple, on procède comme suit :  $U_0 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$

– multiplication à gauche de l'expression par  ${}^1T_0$

$${}^1T_0 U_0 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$${}^2T_1 U_1 = {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$${}^3T_2 U_2 = {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$$

$${}^4T_3 U_3 = {}^4T_5 {}^5T_6$$

$${}^5T_4 U_4 = {}^5T_6$$

Avec  $U_j = U_0 T_j U_j$  pour  $j = 0, \dots, 4$ .

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

### 2.2.1 Principe de la méthode de Paul

#### **Quelques remarques**

- 1) Si le robot possède plus de 6 ddl, le système contient plus d'inconnues que de paramètres décrivant la tâche : il manque  $(n-6)$  relations.

*Deux stratégies sont possibles :*

- 1 On fixe les  $(n-6)$  articulations. On se ramène au problème à 6ddl
- 2 Introduire  $(n-6)$  relations supplémentaires décrivant la redondance

- 2) Si le robot possède moins de 6ddl, il ne peut pas donner à son organe terminal n'importe quelles positions et orientations. Sauf si certains éléments de  ${}^0T_E^d$  sont imposés de façon à compenser le nombre insuffisant de degrés de liberté. Sinon, on est amené à réduire le nombre d'équations en ne considérant que certains éléments géométriques liés aux repères  $R_E$  et  $R_E^d$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.1 Principe de la méthode de Paul

#### Types d'équations rencontrées :

Type 1	$X r_i = Y$
Type 2	$X S\theta_i + Y C\theta_i = Z$
Type 3	$X1 S\theta_i + Y1 C\theta_i = Z1$ $X2 S\theta_i + Y2 C\theta_i = Z2$
Type 4	$X1 r_j S\theta_i = Y1$ $X2 r_j C\theta_i = Y2$
Type 5	$X1 S\theta_i = Y1 + Z1 r_j$ $X2 C\theta_i = Y2 + Z2 r_j$
Type 6	$W S\theta_j = X C\theta_i + Y S\theta_i + Z1$ $W C\theta_j = X S\theta_i - Y C\theta_i + Z2$
Type 7	$W1 C\theta_j + W2 S\theta_j = X C\theta_i + Y S\theta_i + Z1$ $W1 S\theta_j - W2 C\theta_j = X S\theta_i - Y C\theta_i + Z2$
Type 8	$X C\theta_i + Y C(\theta_i + \theta_j) = Z1$ $X S\theta_i + Y S(\theta_i + \theta_j) = Z2$

**Solutions selon le type d'équation**

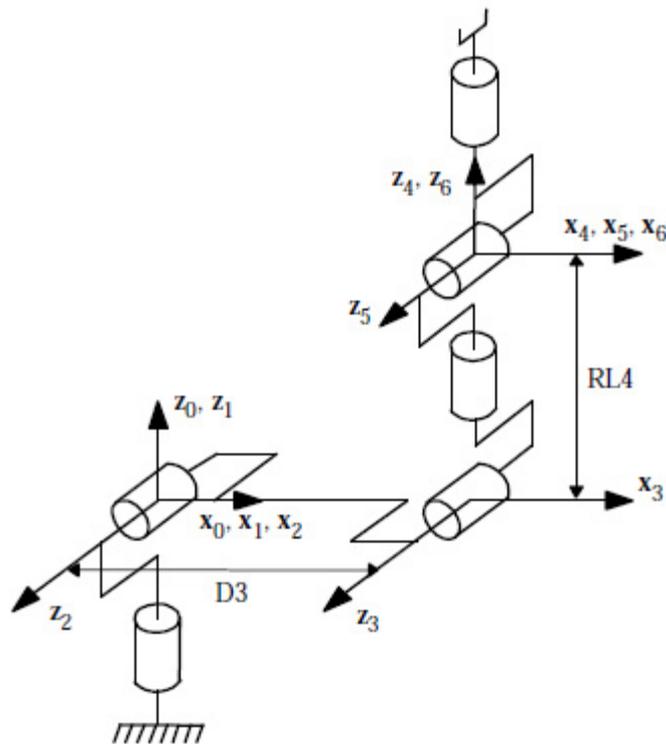
$r_i$  : variable de l'articulation prismatique  $i$ ,

$S\theta_i, C\theta_i$  : sinus et cosinus de la variable  $\theta_i$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.



J	$\sigma_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$\theta_j$	$r_j$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	$\pi/2$	0	$\theta_2$	0
3	0	0	$D3$	$\theta_3$	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4$	$RL4$
5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5$	0
6	0	$-\pi/2$	0	$\theta_6$	0

**Paramètres géométriques  
du robot Stäubli RX-90**

**Placement des repères et notations  
pour le robot Stäubli RX-90**

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

La matrice de transformation homogène générale est de la forme

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} c\theta_j & -s\theta_j & 0 & d_j \\ c\alpha_j s\theta_j & c\alpha_j c\theta_j & -s\alpha_j & -r_j s\alpha_j \\ s\alpha_j s\theta_j & s\alpha_j c\theta_j & c\alpha_j & r_j c\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

J	$\sigma_j$	$\alpha_j$	$d_j$	$\theta_j$	$r_j$
1	0	0	0	$\theta_1$	0
2	0	$\pi/2$	0	$\theta_2$	0
3	0	0	D3	$\theta_3$	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4$	RL4
5	0	$\pi/2$	0	$\theta_5$	0
6	0	$-\pi/2$	0	$\theta_6$	0

### **Paramètres géométriques du robot Stäubli RX-90**

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

Les matrices de transformation homogène de 0 à 6 sont

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & D3 \\ S3 & C3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R4 \\ -S4 & -C4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} C5 & -S5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S5 & C5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} C6 & -S6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S6 & -C6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

#### MGD :

Afin de calculer  ${}^0\mathbf{T}_6$ , il est préférable de calculer le produit des matrices  ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$  en partant de la dernière matrice de transformation, ceci pour deux raisons :

- 1- Les résultats intermédiaires  ${}^j\mathbf{T}_6$ , notés  $U_j$ , seront utilisés pour l'obtention du modèle géométrique inverse
- 2- On minimise ainsi le nombre d'opérations du modèle. On écrit successivement les  $U_j$  pour  $j = 5, \dots, 0$  :

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

**MGD :**

$$U_5 = {}^5T_6$$

$$U_4 = {}^4T_6 = {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} C5C6 & -C5S6 & -S5 & 0 \\ S6 & C6 & 0 & 0 \\ S5C6 & -S5S6 & C5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = {}^3T_6 = {}^3T_4 U_5 = \begin{bmatrix} C4C5C6 - S4S6 & -C4C5S6 - S4C6 & -C4S5 & 0 \\ S5C6 & -S5S6 & C5 & R4 \\ -S4C5C6 - C4S6 & S4C5S6 - C4C6 & S4S5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

**MGD :**

$$\mathbf{U}_2 \left\{ \begin{array}{l} s_x = C3(C4C5C6 - S4S6) - S3S5C6 \\ s_y = S3(C4C5C6 - S4S6) + C3S5C6 \\ s_z = -S4C5C6 - C4S6 \\ n_x = -C3(C4C5S6 + S4C6) + S3S5S6 \\ n_y = -S3(C4C5S6 + S4C6) - C3S5S6 \\ n_z = S4C5S6 - C4C6 \\ a_x = -C3C4S5 - S3C5 \\ a_y = -S3C4S5 + C3C5 \\ a_z = S4S5 \\ P_x = -S3R4 + D3 \\ P_y = C3R4 \\ P_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{U}_1 \left\{ \begin{array}{l} s_x = C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6 \\ s_y = S4C5C6 + C4S6 \\ s_z = S23(C4C5C6 - S4S6) + C23S5C6 \\ n_x = -C23(C4C5S6 + S4C6) + S23S5S6 \\ n_y = -S4C5S6 + C4C6 \\ n_z = -S23(C4C5S6 + S4C6) - C23S5S6 \\ a_x = -C23C4S5 - S23C5 \\ a_y = -S4S5 \\ a_z = -S23C4S5 + C23C5 \\ P_x = -S23R4 + C2D3 \\ P_y = 0 \\ P_z = C23R4 + S2D3 \end{array} \right.$$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

**MGD :**

$$\mathbf{U}_0 \left\{ \begin{array}{l} s_x = C1(C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6) - S1(S4C5C6 + C4S6) \\ s_y = S1(C23(C4C5C6 - S4S6) - S23S5C6) + C1(S4C5C6 + C4S6) \\ s_z = S23(C4C5C6 - S4S6) + C23S5C6 \\ n_x = C1(-C23(C4C5C6 + S4S6) + S23S5S6) + S1(S4C5S6 - C4C6) \\ n_y = S1(-C23(C4C5C6 + S4S6) + S23S5S6) - C1(S4C5S6 - C4C6) \\ n_z = -S23(C4C5S6 + S4C6) - C23S5S6 \\ a_x = -C1(C23C4S5 + S23C5) + S1S4S5 \\ a_y = -S1(C23C4S5 + S23C5) - C1S4S5 \\ a_z = -S23C4S5 + C23C5 \\ P_x = -C1(S23R4 - C2D3) \\ P_y = -S1(S23R4 - C2D3) \\ P_z = C23R4 + S2D3 \end{array} \right.$$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

### 2.2.2 Solution Modèle géométrique direct et inverse du robot Stäubli RX-90.

#### MGD :

Le modèle géométrique direct est donné par  $\mathbf{U}_0$  :

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{U}_0$$

$\mathbf{q}$  est le vecteur des variables articulaires et  $\mathbf{X}$  représente les coordonnées opérationnelles :

$$\mathbf{q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T$$

$$\mathbf{X} = [P_x \quad P_y \quad P_z \quad s_x \quad s_y \quad s_z \quad n_x \quad n_y \quad n_z \quad a_x \quad a_y \quad a_z]^T$$

# Chapitre 2

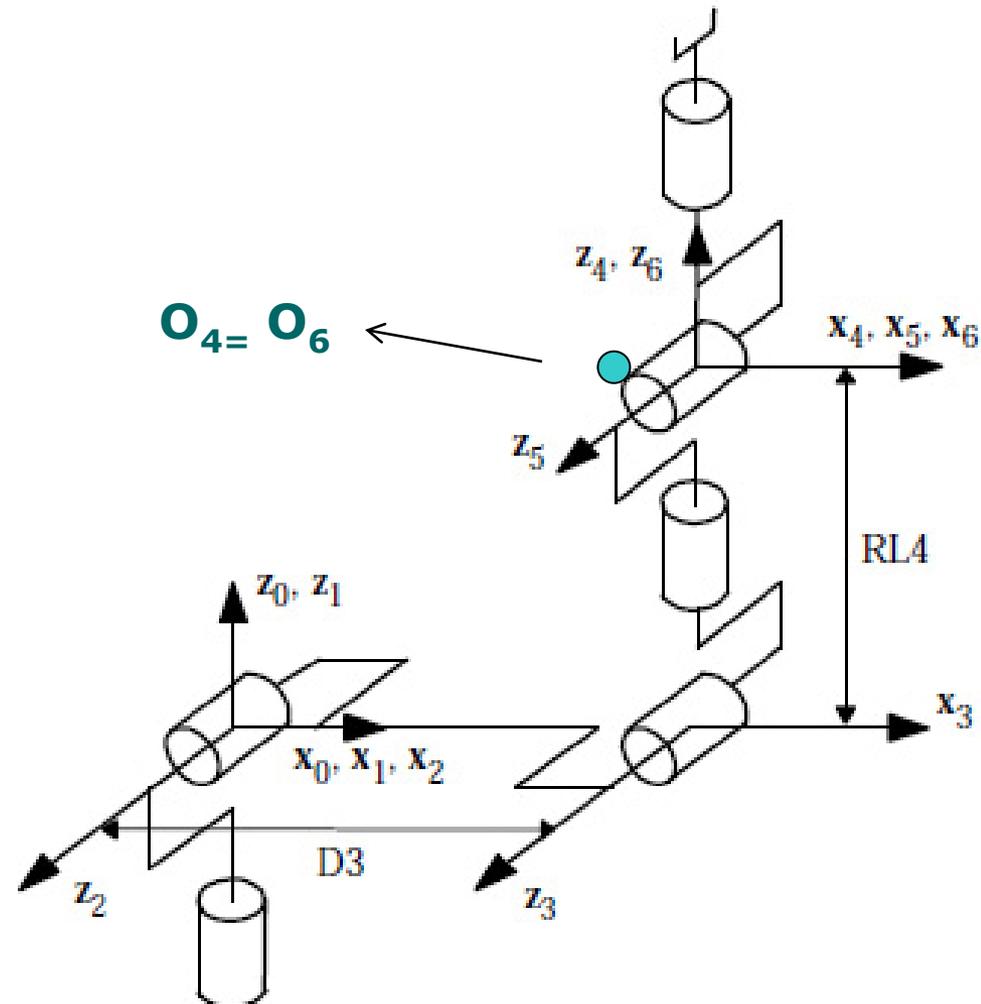
## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### 2.2.2 Solution Modèle g robot Stäubli RX-90.

#### MGI :

Un poignet rotule (3 rotations d'axes concourants au niveau du poignet).

La position du centre de la rotule ne dépend que des variables articulaires  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ . On observe un découplage position / orientation qui conduit à considérer deux ensembles d'équations à trois inconnues :

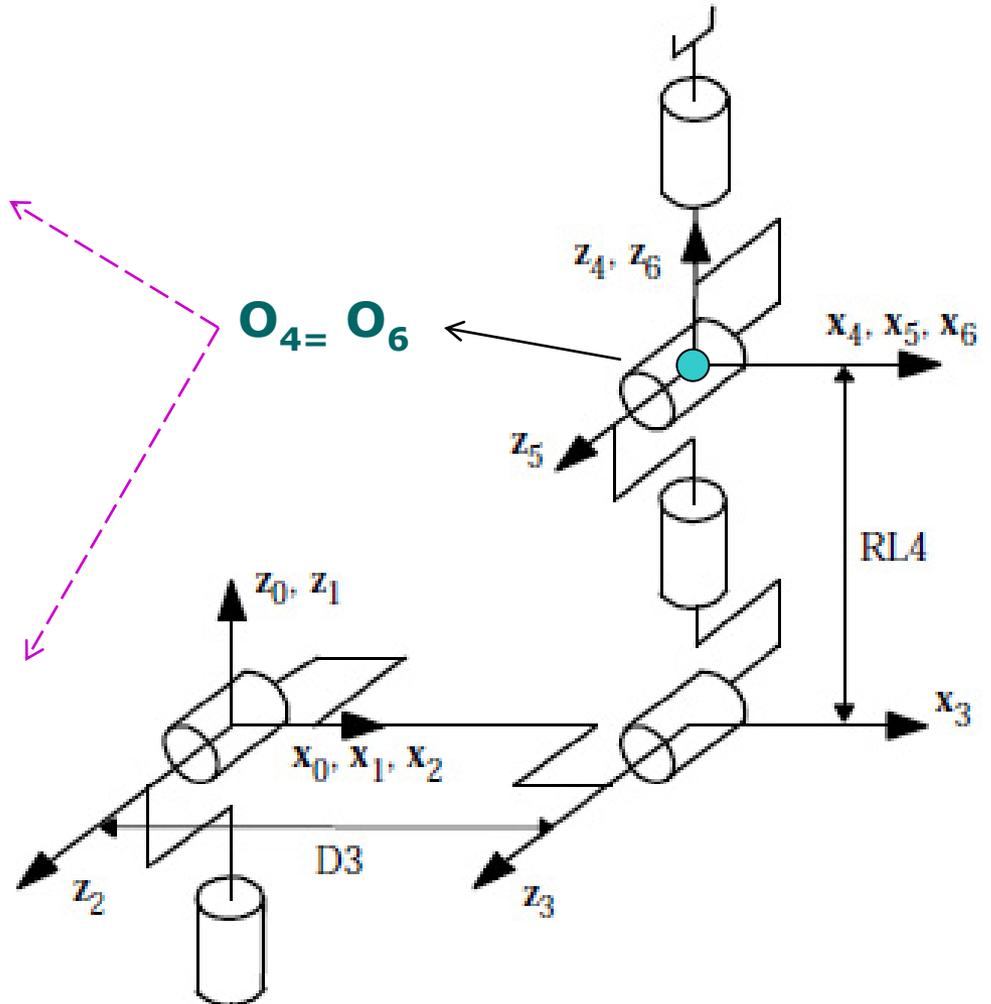


# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

$${}^0U^d = {}^0T_6^d = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^0T_4(q) = \begin{pmatrix} s_{x4} & n_{x4} & a_{x4} & p_{x4} \\ s_{y4} & n_{y4} & a_{y4} & p_{y4} \\ s_{z4} & n_{z4} & a_{z4} & p_{z4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



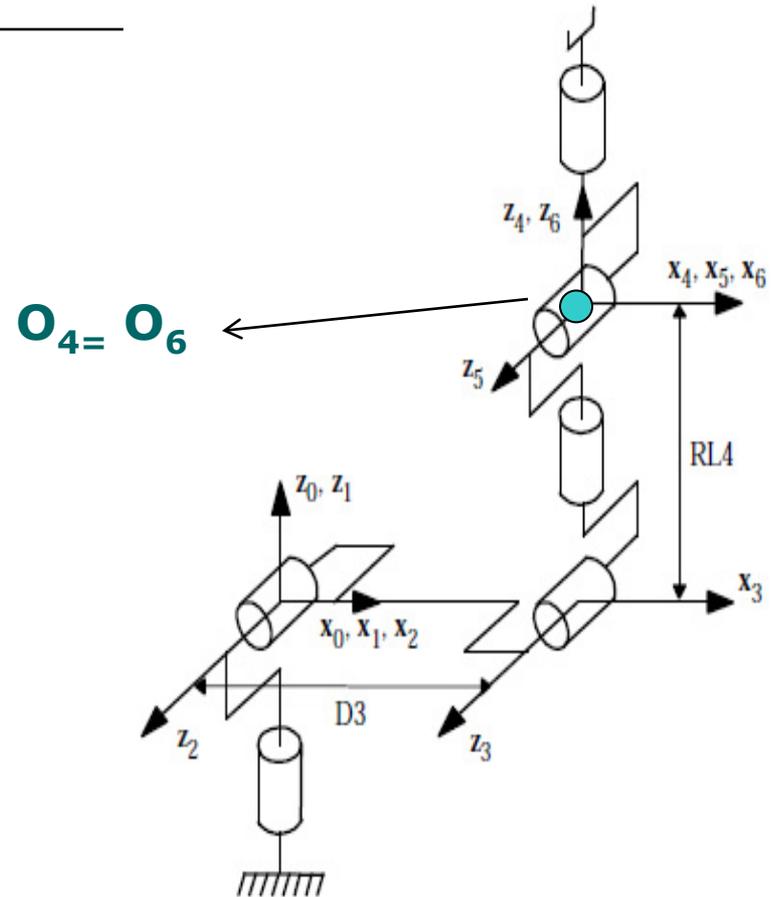
# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### Equation de position

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On résout les variables ( $q_1, q_2, q_3$ ) à partir de ce système d'équations en pré-multipliant successivement les deux membres par  ${}^j\mathbf{T}_0$  ( $j = 1, 2$ ) pour isoler et identifier les variables articulaires



$q_1, q_2, q_3$

**Calculées donc connues**

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

### Equation d'orientation

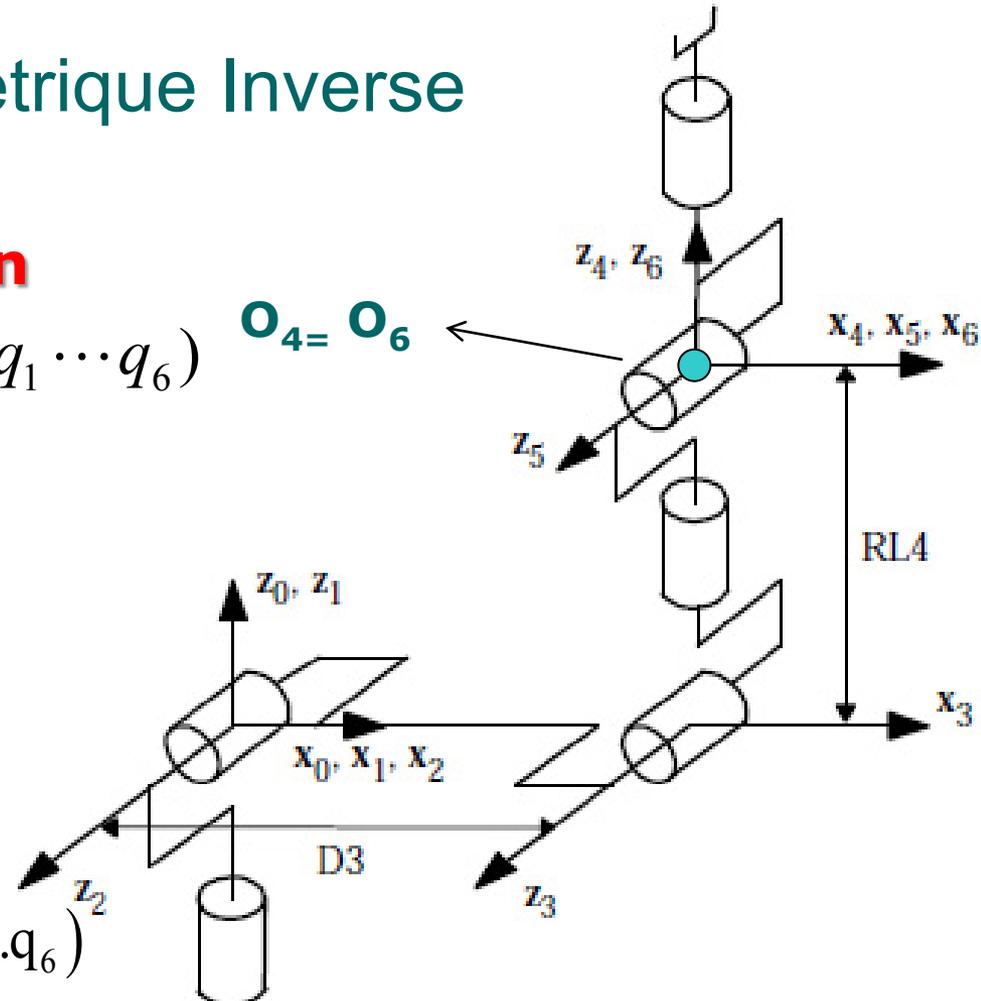
$$U_0^d = {}^0T_6^d = \begin{pmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow {}^0A_6(q_1 \dots q_6)$$

$$[s \quad n \quad a] = {}^0A_6(q)$$

$$\text{càd } [s \quad n \quad a] = {}^0A_3(q_1 \dots q_3) {}^3A_6(q_4 \dots q_6)$$

$$q_1, q_2, q_3 \text{ connues donc } {}^3A_0(q_1, q_2, q_3) [s \quad n \quad a] = {}^3A_6(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$$

$${}^3A_6(q_4 \dots q_6) = {}^0A_3(q_1 \dots q_3)^{-1} \cdot {}^0A_6(q)$$



# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

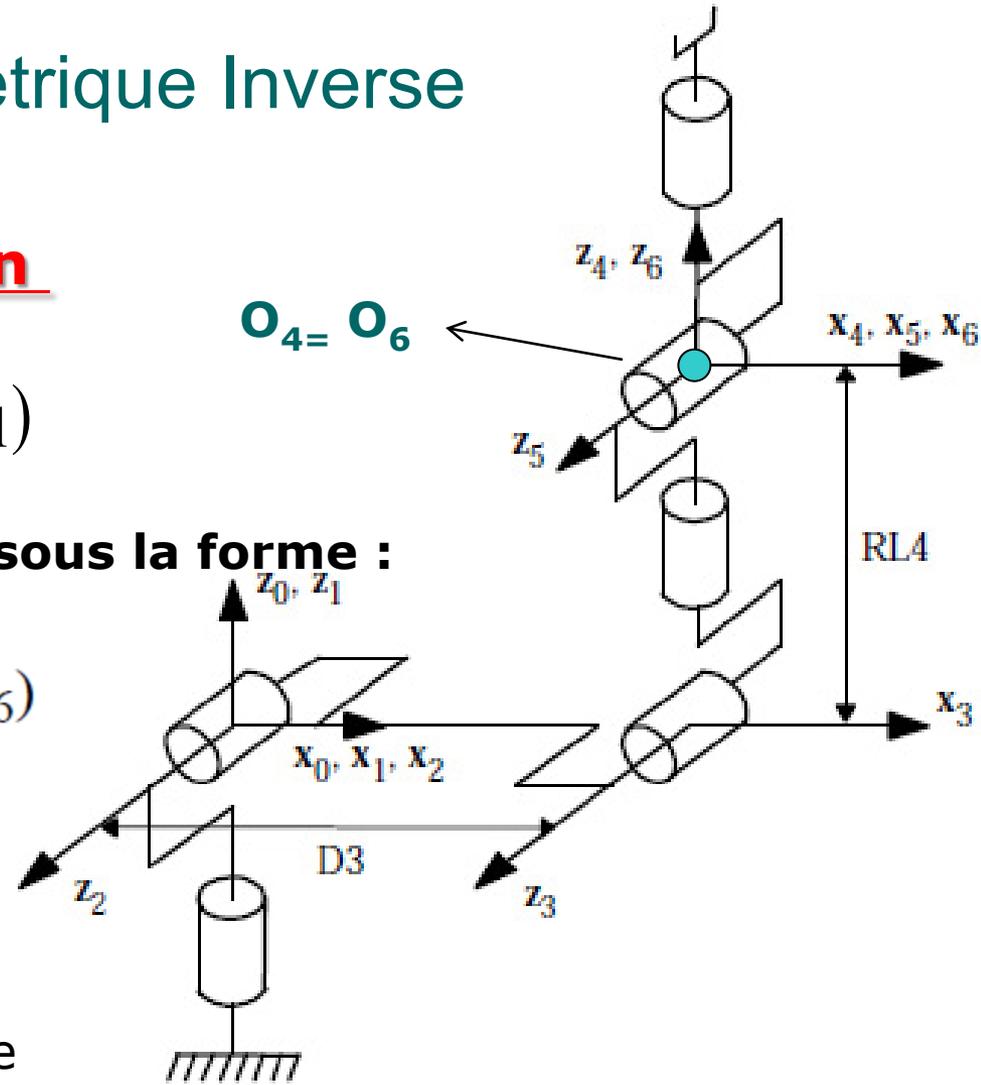
### Equation d'orientation

$${}^3A_6(q_4..q_6) = {}^0A_3(q_1..q_3)^{-1} \cdot {}^0A_6(q)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$[F \quad G \quad H] = {}^3A_6(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$$

Les variables  $(q_1, q_2, q_3)$ , donc,  ${}^3A_0$  étant connues, le terme de gauche est connu. Pour obtenir  $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ , il suffit de prémultiplier successivement les deux membres de l'équation par  ${}^4A_3$  puis par  ${}^5A_4$  et de procéder par identification terme à terme des deux membres



# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

Calcul de  $q_1, q_2, q_3$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow {}^1\mathbf{T}_0 \mathbf{U}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C1 & S1 & 0 & 0 \\ -S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On se trouve avec une équation de type 2  $\blackleftarrow$

$$\begin{bmatrix} C1P_x + S1P_y \\ -S1P_x + C1P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S23R4 + C2D3 \\ 0 \\ C23R4 + S2D3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} q_1 = \text{ATAN2}(P_y, P_x) \\ q'_1 = q_1 + 180^\circ \end{cases}$$

2 solutions, 1 singularité  
 $P_x = P_y = 0$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

Calcul de  $q_2, q_3$

$${}^2\mathbf{T}_1 \mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} C2 & 0 & S2 & 0 \\ -S2 & 0 & C2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1P_x + S1P_y \\ -S1P_x + C1P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{T}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C2(C1P_x + S1P_y) + S2P_z \\ -S2(C1P_x + S1P_y) + C2P_z \\ S1P_x - C1P_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S3R4 + D3 \\ C3R4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Equation de  
type 6**

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

Calcul de  $q_2, q_3$

La solution d'une équation type 6 se fait de la façon suivante :

$$X S_2 + Y C_2 = Z$$

$$X = -2 P_z D_3$$

$$Y = -2 B_1 D_3$$

$$Z = R_4^2 - D_3^2 - P_z^2 - B_1^2$$

$$B_1 = P_x C_1 + P_y S_1$$

$$\begin{cases} C_2 = \frac{Y Z - \varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \\ S_2 = \frac{X Z + \varepsilon \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \end{cases} \text{ Avec } \varepsilon = \pm 1$$

$$q_2 = \text{ATAN2}(S_2, C_2) \quad 2 \text{ solutions}$$

Maintenant la troisième articulation

$$\begin{cases} S_3 = \frac{-P_z S_2 - B_1 C_2 + D_3}{R_4} \\ C_3 = \frac{-B_1 S_2 - P_z C_2}{R_4} \end{cases}$$

$$q_3 = \text{ATAN2}(S_3, C_3)$$

# Chapitre 2

## 2.2 Modèle géométrique Inverse

---

Calcul de  $q_4, q_5, q_6$  ou bien  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$

Les variables articulaires  $q_1, q_2, q_3$  étant connues, on s'intéresse aux équations d'orientation :

$$[ \mathbf{F} \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{H} ] = {}^3\mathbf{A}_0 [ \mathbf{s} \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{a} ]$$

Les expressions des éléments de  $\mathbf{F}$  s'écrivent

$$U(1,1) = C23 (C1 s_x + S1 s_y) + S23 s_z$$

$$U(2,1) = -S23 (C1 s_x + S1 s_y) + C23 s_z$$

$$U(3,1) = S1 s_x - C1 s_y$$

Les expressions de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  s'obtiennent à partir de  $\mathbf{F}$  en remplaçant  $(s_x, s_y, s_z)$  par  $(n_y, n_z)$  et par  $(a_x, a_y, a_z)$  respectivement.

A partir des éléments (1, 3) et (3, 3), on obtient un système de type 3 en  $\theta_5$

$$\begin{aligned} -S_5 &= C_4 H_x - S_4 H_z \\ C_5 &= H_y \end{aligned}$$

Identification des termes de  $[ \mathbf{F} \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{H} ] = {}^3\mathbf{A}_6$

Les éléments de  ${}^3\mathbf{A}_6$  représentent les termes d'orientation de  ${}^3\mathbf{T}_6$  déjà calculés pour le MGD :

$${}^3\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6C_5C_4 - S_6S_4 & -S_6C_5C_4 - C_6S_4 & -S_5C_4 \\ C_6S_5 & -S_6S_5 & C_5 \\ -C_6C_5S_4 - S_6C_4 & S_6C_5S_4 - C_6C_4 & S_5S_4 \end{bmatrix}$$

A partir des éléments (2, 3), on pourrait calculer  $\theta_5$  par la fonction arcosinus, mais, pour des raisons de précision numérique, ce résultat n'est pas retenu.

Identification des termes de  ${}^4\mathbf{A}_3 [ \mathbf{F} \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{H} ] = {}^4\mathbf{A}_6$

Les éléments de la première colonne du terme de gauche s'écrivent : calculée dans le MGD

$$\begin{bmatrix} C_4F_x - S_4F_z & C_4G_x - S_4G_z & C_4H_x - S_4H_z \\ -C_4F_z - S_4F_x & -C_4G_z - S_4G_x & -C_4H_z - S_4H_x \\ F_y & G_y & H_y \end{bmatrix} = {}^4\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} C_6C_5 & -S_6C_5 & -S_5 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ C_6S_5 & -S_6S_5 & C_5 \end{bmatrix}$$

---

A partir des éléments (2, 3), on obtient une équation du type 2 en  $\theta_4$  :

$$-C_4 H_z - S_4 H_x = 0 \quad \text{Deux solutions} \quad \left\{ \theta_4 = \text{atan2}(H_z, -H_x), \theta'_4 = \theta_4 + \pi \right.$$

A partir des éléments (1, 3) et (3, 3), on obtient un système de type 3 en  $\theta_5$

$$\begin{aligned} -S_5 &= C_4 H_x - S_4 H_z \\ C_5 &= H_y \end{aligned} \quad \text{qui a pour solution} \quad \theta_5 = \text{atan2}(S_5, C_5)$$

Enfin, en considérant les éléments (2, 1) et (2, 2), on obtient d'équations de type 3 en  $\theta_6$  :

$$\begin{aligned} S_6 &= -C_4 F_z - S_4 F_x \\ C_6 &= -C_4 G_z - S_4 G_x \end{aligned} \quad \text{qui a pour solution} \quad \theta_6 = \text{atan2}(S_6, C_6)$$