Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.1 Introduction

- Le modèle cinématique direct d'un robot-manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires.

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}$$

- Où

$$J(q) = \frac{\partial x}{\partial q} \quad , q(n \times 1) \text{ et } x(m \times 1)$$

désigne la matrice ***Jacobienne*** de dimension $(m \times n)$ du méca nisme, fonction de la configuration particulaire

Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.2 Intérêt de la matrice Jacobienne

- Elle Permet de calculer une solution locale q connaissant X dans le modèle différentiel

- En statique, elle est utilisée pour établir une relation pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs.

- Elle facilite le calcul des singularités et de la dimension de l'espace opérationnel accessible du robot.

Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.2 Calcul de la matrice Jacobienne

- Par dérivation du modèle géométrique direct

$$x = f(q) \quad \Rightarrow \dot{x} = \frac{df(q)}{dt}$$

$$= \frac{\partial f(q)}{\partial q}\dot{q}$$

La matrice Jacobienne est donc $J(q) = \dfrac{\partial f(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial q_1} \cdots \dfrac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$

Chapitre 3
Modèle Cinématique

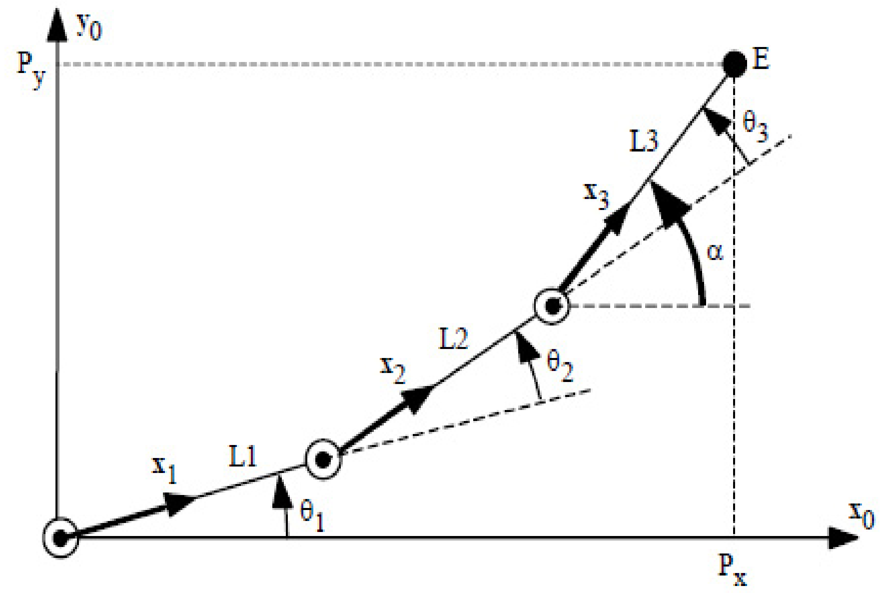
Exemple

Robot Plan à 3 degrés de libertés
L'espace Opérationnelle est décrit en E par

$$x = [P_x, P_y, \alpha]^t$$

L'espace articulaire est décrit par

$$q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^t$$



Le MGD :

$$P_x = C1\,L1 + C12\,L2 + C123\,L3$$
$$P_y = S1\,L1 + S12\,L2 + S123\,L3$$
$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Dérivation → **Jacobienne**

Chapitre 3
Modèle Cinématique

Exemple

Le MGD :

$$P_x = C1\,L1 + C12\,L2 + C123\,L3$$
$$P_y = S1\,L1 + S12\,L2 + S123\,L3$$
$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$\Rightarrow \quad J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} & \ddots & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1} & \ddots & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -S1L1 - S12L2 - S123L3 & -S12L2 - S123L3 & -S123L3 \\ C1L1 + C12L2 + C123L3 & C12L2 + C123L3 & C123L3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et donc le modèle cinématique direct

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = J(q) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3
Modèle Cinématique

Si l'espace opérationnel était représenté par le point O3 $x = [P_x, P_y, \alpha]^t$

La Jacobienne serait donc :

$$J = \begin{bmatrix} -S1L1-S12L2 & -S12L2 & 0 \\ C1L1+C12L2 & C12L2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.2 Matrice Jacobienne cinématique

On peut obtenir la matrice *Jacobienne* par une méthode de calcul direct, fondée sur la relation entre les vecteurs des vitesses de translation et de rotation $\boldsymbol{v}_n$ et $\boldsymbol{\omega}_n$ du repère $\mathbf{R}_n$, et les vitesses articulaires :

$$\begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J\dot{q}$$

On note que :

- $\boldsymbol{v}_n$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur $\boldsymbol{P_n}$.
- $\boldsymbol{\omega}_n$ n'est pas la dérivée d'une représentation quelconque de l'orientation.

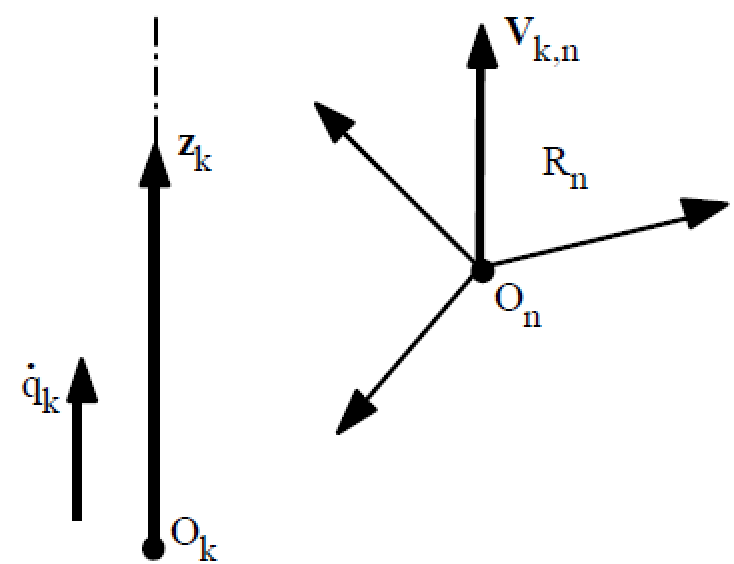
Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.2 Matrice Jacobienne cinématique
3.2.1 *Calcul du jacobien cinématique*

Considérons la $k^{ème}$ articulation d'une chaîne articulée. La vitesse $\dot{q}_k$ induit sur le repère terminal R_n la vitesse de translation $V_{k,n}$ et la vitesse de rotation $w_{k,n}$

Deux cas se présentent :

➢ **1.Articulation prismatique** $\sigma_k = 1$



$$\begin{cases} v_{k,n} = a_k \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = 0 \end{cases}$$

$a_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ **Vecteur unitaire selon l'axe z**

Chapitre 3

Modèle Cinématique

3.2 Matrice Jacobienne cinématique

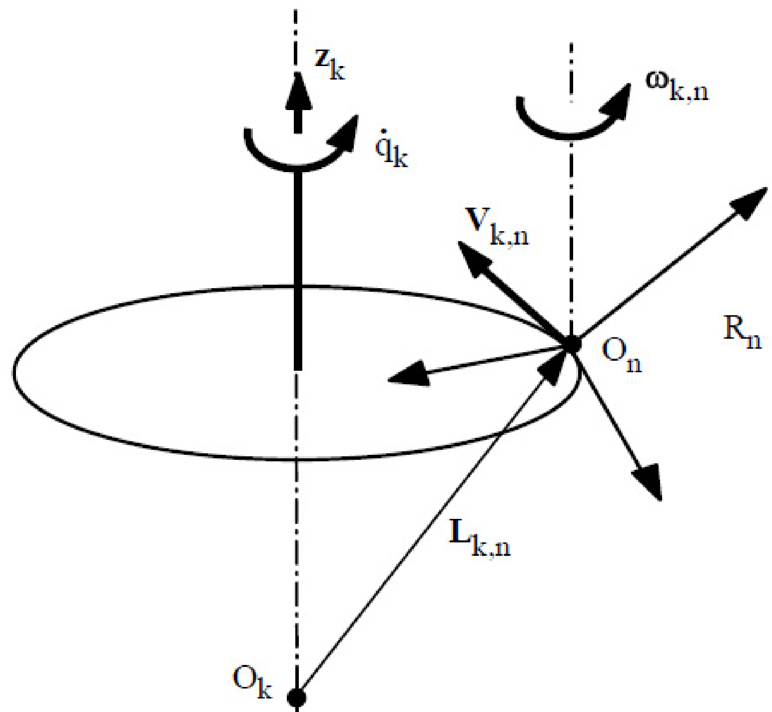
3.2.1 *Calcul du jacobien cinématique*

Considérons la $k^{ème}$ articulation d'une chaîne articulée. La vitesse $\dot{q}_k$ induit sur le repère terminal R_n la vitesse de translation $V_{k,n}$ et la vitesse de rotation $w_{k,n}$

Deux cas se présentent :

- **2.Articulation rotoïde** $\sigma_k = 0$

$$\begin{cases} v_{k,n} = a_k \dot{q}_k \times L_{k,n} = \left(a_k \times L_{k,n} \right) \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = a_k \dot{q}_k \end{cases}$$



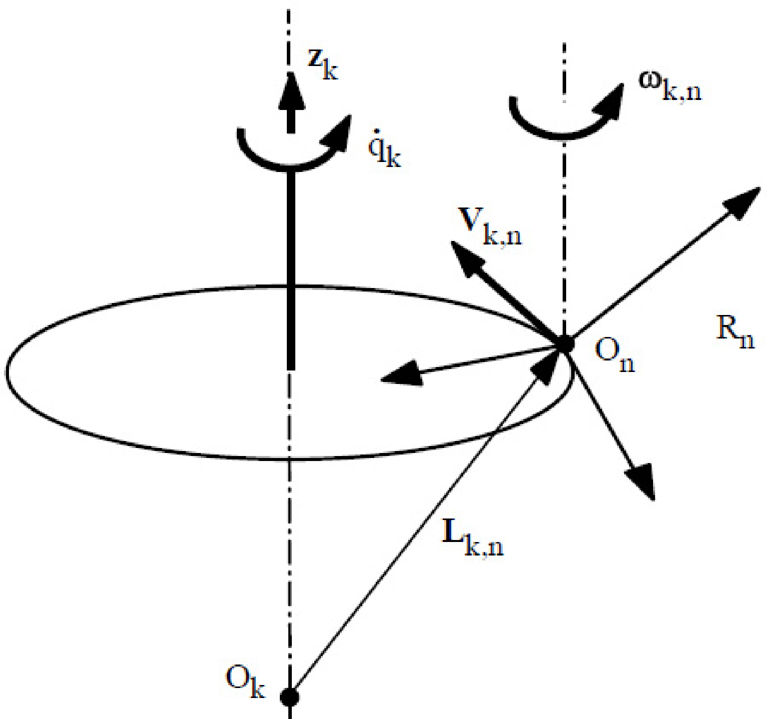
Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.2 Matrice Jacobienne cinématique
3.2.1 *Calcul du jacobien cinématique*

- le cas général, les vitesses $V_{k,n}$, $w_{k,n}$ se calculent par :

$$\begin{cases} v_{k,n} = \left[\sigma_k a_k + \bar{\sigma}_k \left(a_k \times L_{k,n} \right) \right] \dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = \bar{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n = \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \\ \omega_n = \sum_{k=1}^{n} w_{k,n} \end{cases}$$



3.2 Matrice Jacobienne cinématique

3.2.1 *Calcul du jacobien cinématique*

- **Donc la matrice jacobienne est donnée**

$$\begin{cases} v_{k,n} = \left[\sigma_k a_k + \bar{\sigma}_k \left(a_k \times L_{k,n}\right)\right]\dot{q}_k \\ \omega_{k,n} = \bar{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n = \sum_{k=1}^{n} v_{k,n} \\ \omega_n = \sum_{k=1}^{n} w_{k,n} \end{cases}$$

$$J_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 a_1 + \bar{\sigma}_1 \left(a_1 \times L_{1,n}\right) & \cdots & \sigma_n a_n + \bar{\sigma}_n \left(a_n \times L_{n,n}\right) \\ \bar{\sigma}_1 a_1 & \cdots & \bar{\sigma}_n a_n \end{bmatrix}$$

Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.4 Modèle cinématique inverse

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration q donnée, les vitesses articulaires $\dot{q}$ qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle $\dot{X}$ imposée.

Pour obtenir le M C inverse on inverse le modèle cinématique, système de M équations : $\Longrightarrow$ Solution **analytique ou numérique**

- **Analytique :** le +) Diminuer considérablement le nombre d'opérations
  le -) Il faut traiter séparément tous les cas singuliers
- **Numérique: (**fondée sur la notion de pseudo-inverse)
  le +) Plus générales, les algorithmes traitent de façon unifiée les cas réguliers, singuliers et redondants.
  le -) Temps de calcul relativement important.

Chapitre 3
Modèle Cinématique

3.4 Modèle cinématique inverse
Solution dans le cas régulier

La jacobienne J est carrée d'ordre n et son déterminant est non nul. La méthode la plus générale consiste à calculer J-1, la matrice inverse de J,

$$\dot{q} = J(q)^{-1}\dot{X}$$