Eléments d’analyse vectorielle

Sommaire

champ scalaire, champ vectoriel

opérateur « ***nabla*** »

opérateur **« *gradient* »**

opérateur **«** *divergence* **»**

opérateur « ***rotationnel* »**

opérateur « *Laplacien* »

Systèmes de coordonnées cylindriques, sphériques

Lignes de champ (d’un champ vectoriel)

Lignes ou surfaces équipotentielles (d’un champ scalaire)

Circulation d’un champ vectoriel sur un contour

Flux d’un champ vectoriel à travers une surface

Théorême de Stokes

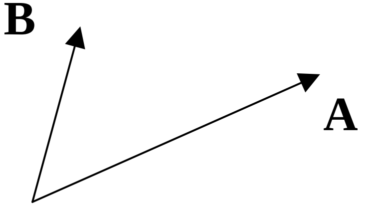
Théorême d’Ostrogradski

Dans tout le cours, les **vecteurs** sont en caractères **gras**

f (x,y,z) désigne un <u>champ scalaire</u> (*exemple: champ de pression atmosphérique)*

A (A_x, A_y, A_z) désigne un <u>champ vectoriel</u> (*exemple: vitesse du vent atmosphérique)*
→ chaque composante est un champ scalaire dépendant de (x, y, z)

Rappel: <u>produit scalaire</u> (est un nombre réel)



$\mathbf{A}.\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\mathbf{A}\| \; \|\mathbf{B}\| \; \cos(\mathbf{A},\mathbf{B})$

Propriété: **A.B** = 0 si **A** orthogonal à **B**

Exemple: le travail d'une force dW = **F.dOM** (moteur ou résistant selon signe)

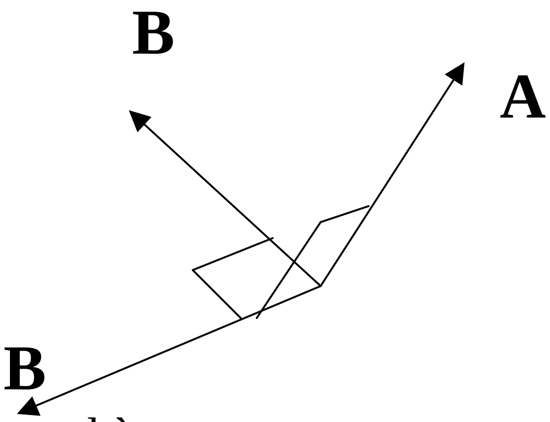
Rappel: <u>produit vectoriel</u> (est un vecteur)

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y\, ,\, A_z B_x - A_x B_z\, ,\, A_x B_y - A_y B_x)$ est orthogonal à **A** et à **B**

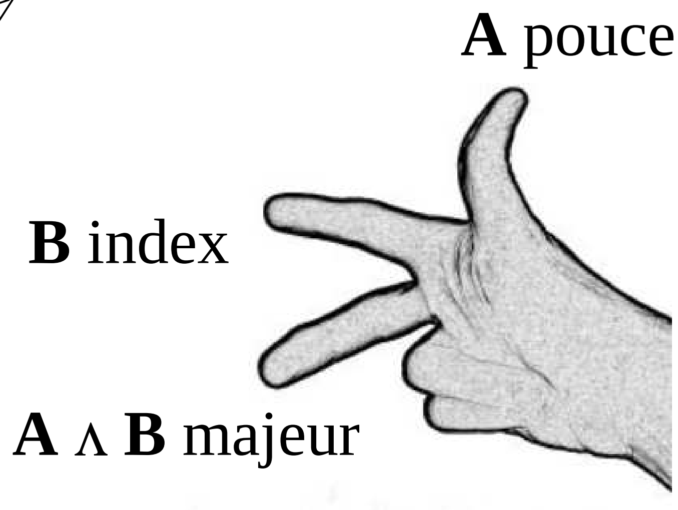
$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \; \|\mathbf{B}\| \; |\sin(A,B)|$ = surface du parallélogramme (**A**, **B**)

Propriété: $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$ si **A** colinéaire à **B**

Règles mnémoniques d'orientation du produit vectoriel et de calcul par duplication des deux premières lignes et produits en croix



orthogonal à
A et à **B**



$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} A_x & B_x \\ A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix}$$

Règle des doigts de la main droite

Rappel: <u>dérivées partielles</u>

Si $f(x,y,z)$ est un champ scalaire, ses dérivées partielles par rapport aux variables spatiales x, y, z (coordonnées d'un point M) sont notées avec des « ∂ ronds »: $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$

→ $\partial f/\partial x$ est la dérivée de $f(x,y,z)$ par rapport à x en gardant y et z constants

→ <u>différentielle</u> $df = (\partial f/\partial x)\, dx + (\partial f/\partial y)\, dy + (\partial f/\partial z)\, dz = \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{dOM}$

En coordonnées cartésiennes, on définit:

- L'opérateur « *nabla* »: $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ou opérateur **«** dérivées partielles »

- L'opérateur ***gradient*:** $\mathbf{grad}\, f = \nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$

- L'opérateur ***divergence*:** $\mathrm{div}\, \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$
(produit scalaire de ∇ et de **A**)

- L'opérateur ***rotationnel*:** $\mathbf{rot}\, \mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$
(produit vectoriel de ∇ et **A**) tel que (utiliser la règle mnémonique entre ∇ et **A**):

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{A} = (\partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \,,\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \,,\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y)$$

- *Coordonnées cylindriques* M(r, θ, z), trièdre mobile ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$, $\mathbf{e_z}$)

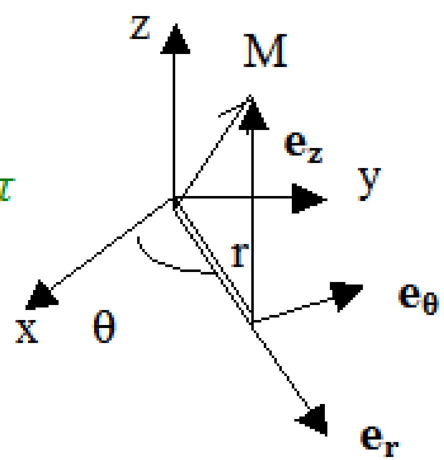
OM $= r\,\mathbf{e_r} + z\,\mathbf{e_z}$

dOM $= dr\,\mathbf{e_r} + r\,d\theta\,\mathbf{e_\theta} + dz\,\mathbf{e_z}$

$d\mathbf{e_r}/d\theta = \mathbf{e_\theta}$ et $d\mathbf{e_\theta}/d\theta = -\,\mathbf{e_r}$

$r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$



- *Coordonnées polaires dans un plan* M(r, θ)

= coordonnées cylindriques sans z

- *Coordonnées sphériques* M(r, θ, φ), trièdre mobile ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$, $\mathbf{e_\varphi}$)

OM $= r\,\mathbf{e_r}$

dOM $= dr\,\mathbf{e_r} + r\,d\theta\,\mathbf{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\mathbf{e_\varphi}$

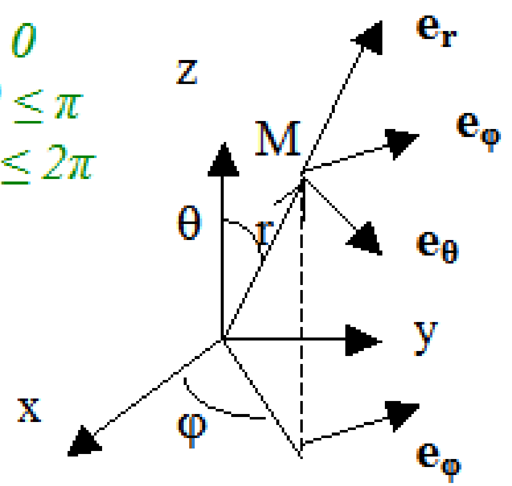
d'une part: $d\mathbf{e_r}/d\theta = \mathbf{e_\theta}$ et $d\mathbf{e_\theta}/d\theta = -\,\mathbf{e_r}$

Et d'autre part: $d\mathbf{e_r}/d\varphi = \sin\theta\,\mathbf{e_\varphi}$ et $d\mathbf{e_\theta}/d\varphi = \cos\theta\,\mathbf{e_\varphi}$

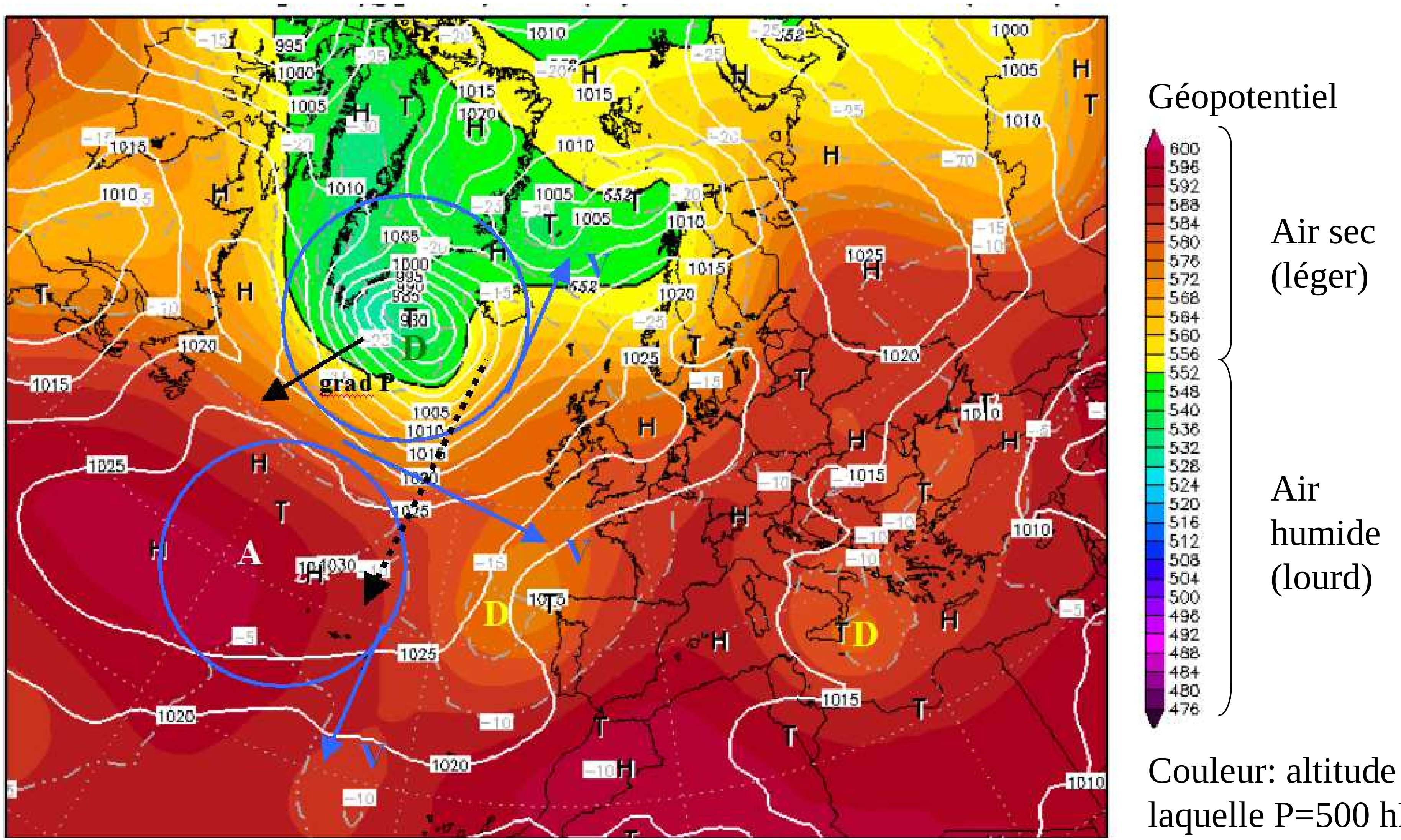
$r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$



$\mathbf{e_\varphi} \in$ plan (xOy)



Couleur: altitude à laquelle P=500 hPa

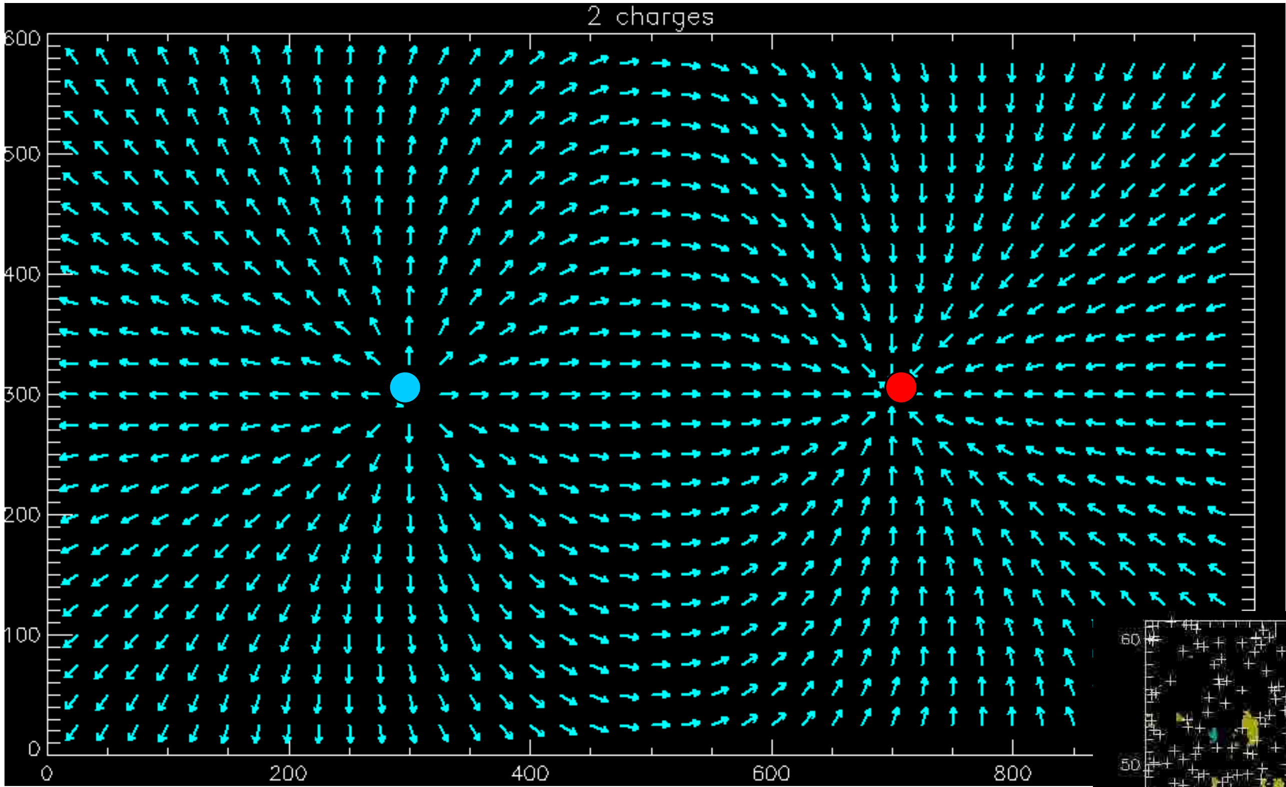
Exemple de champ scalaire: le champ de pression au sol

Isobares = lignes blanches en hPa = lignes de niveau de la pression au sol

A = anticyclone (hautes pressions) D = dépression (basses pressions) **V** vitesse du vent

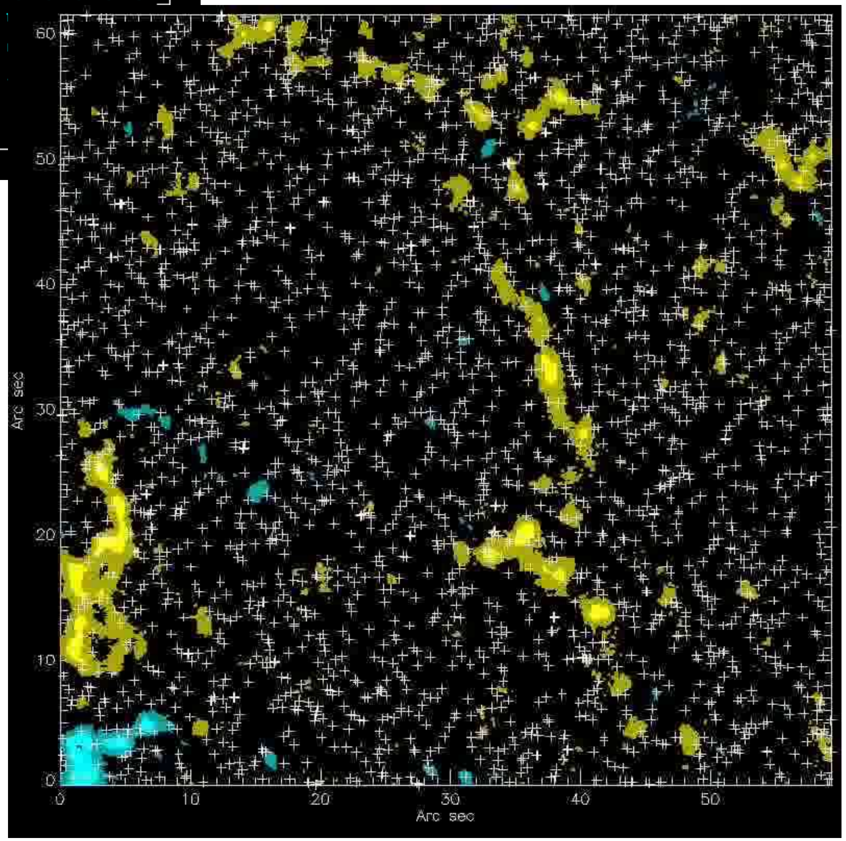
grad P orthogonal aux isobares (dP = 0 = **grad** P.**dOM**)

Exemples de champs vectoriels

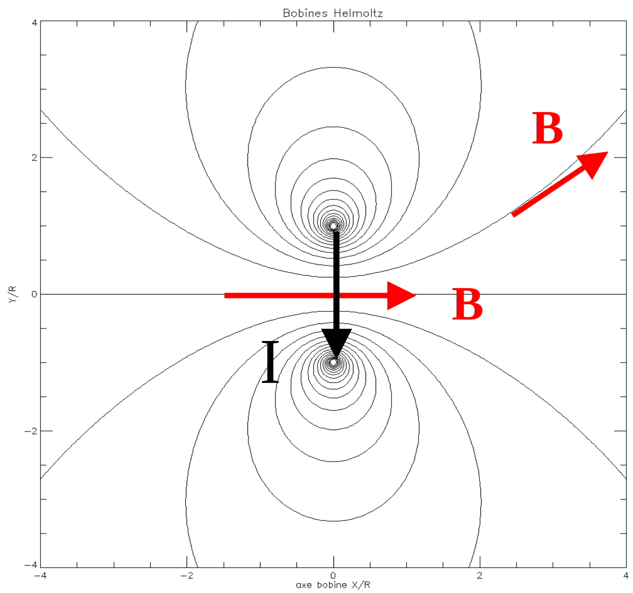


← Vecteur champ électrique **E** crée par 2 charges +q et –q

Champ de vitesses **v** représenté par le mouvement de bouchons



Lignes du champ magnétique **B** créé par une spire parcourue par un courant I (**B** est tangent en tout point des lignes de champ) →



Lignes de champ

Si **A** est un champ vectoriel, l'équation des lignes de champ est donnée par **A** = k **dOM** (k réel). Equations différentielles obtenues par élimination de k, à intégrer:

coordonnées <u>cartésiennes</u>: $dx / A_x = dy / A_y = dz / A_z$ avec **dOM** (dx, dy, dz)

coordonnées <u>cylindriques</u>: $dr / A_r = r\, d\theta / A_\theta = dz / A_z$ avec **dOM** (dr, r dθ, dz)

coordonnées <u>sphériques</u>: $dr / A_r = r\, d\theta / A_\theta = r \sin\theta\, d\phi / A_\phi$ avec **dOM** (dr, r dθ, r sinθ dϕ)

<u>**A** est tangent en tout point M d’une ligne de champ</u>.

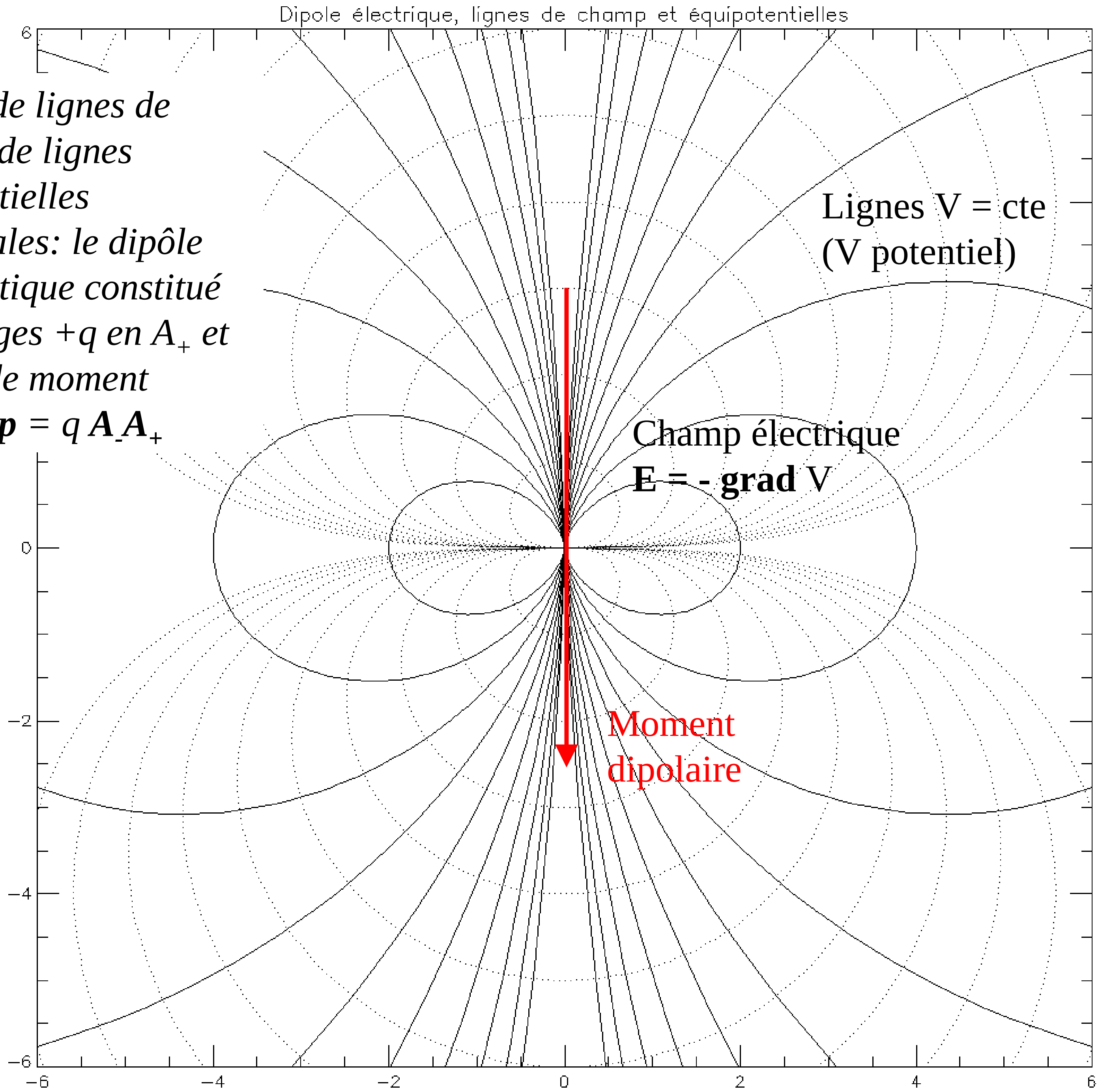
Lignes ou surfaces équipotentielles

Si **A** est un champ vectoriel tel que **A** = **- grad** f où f est une fonction <u>potentiel</u> (ou champ scalaire), l'équation des lignes équipotentielles est donnée par

df = 0 = **grad** f **. dOM** = **- A . dOM =** 0

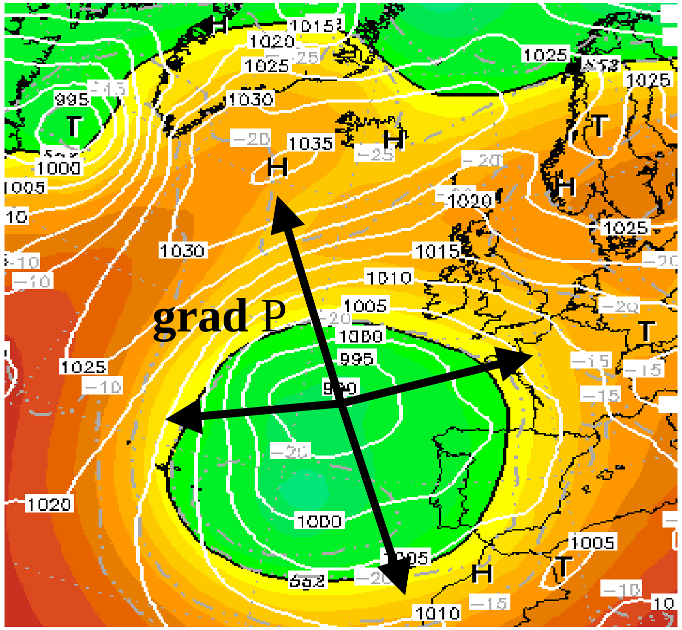
impliquant que <u>les lignes/surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ</u>

Exemple de lignes de champ et de lignes équipotentielles orthogonales: le dipôle électrostatique constitué de 2 charges +q en A_+ et –q en A_- de moment dipolaire $\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{A_-A_+}$



Le gradient s'applique à un champ <u>scalaire</u> et le résultat est un champ <u>vectoriel</u>

→ caractérise la variation <u>spatiale</u> <u>3D</u> d’un champ <u>scalaire</u>



Exemple: isobares d’une carte météo serrées
→ gradient de pression élevé
→ vent fort parallèle aux isobares

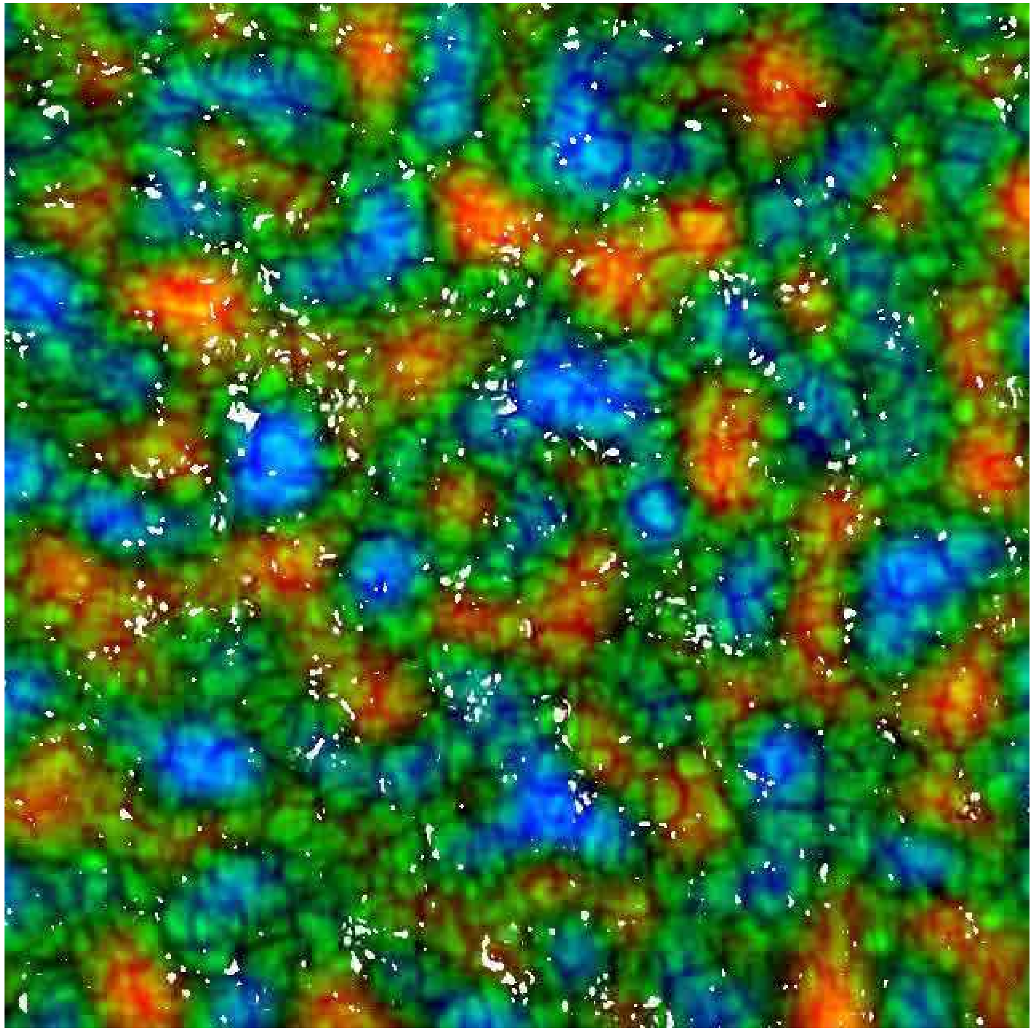
La divergence s'applique à un champ <u>vectoriel</u>
et le résultat est un champ <u>scalaire</u>

→ caractérise la variation spatiale du champ <u>vectoriel dans sa direction</u>

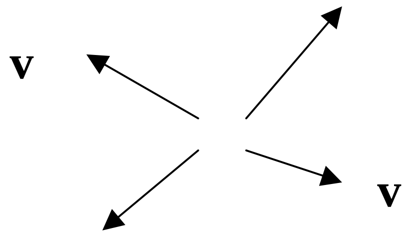
*Exemple 1: mouvement fluide <u>radial</u> de vitesse **v***

div **v** > 0   mouvements <u>divergents</u> (issus d’une source S)

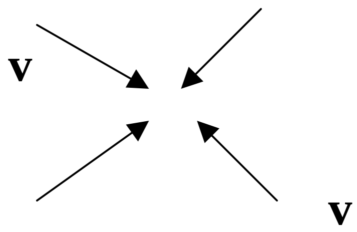
div **v** < 0   mouvements <u>convergents</u> (vers un puits P)



Mouvements
divergents: div $\mathbf{v} > 0$



Mouvements
convergents : div $\mathbf{v} < 0$



Exemple: mouvements horizontaux des granules (cellules convectives) sur la surface du soleil (champ de 50000 km, un granule = 1000 km), satellite Hinode JAXA NASA

div $\mathbf{v} > 0$ mouvements <u>divergents</u>

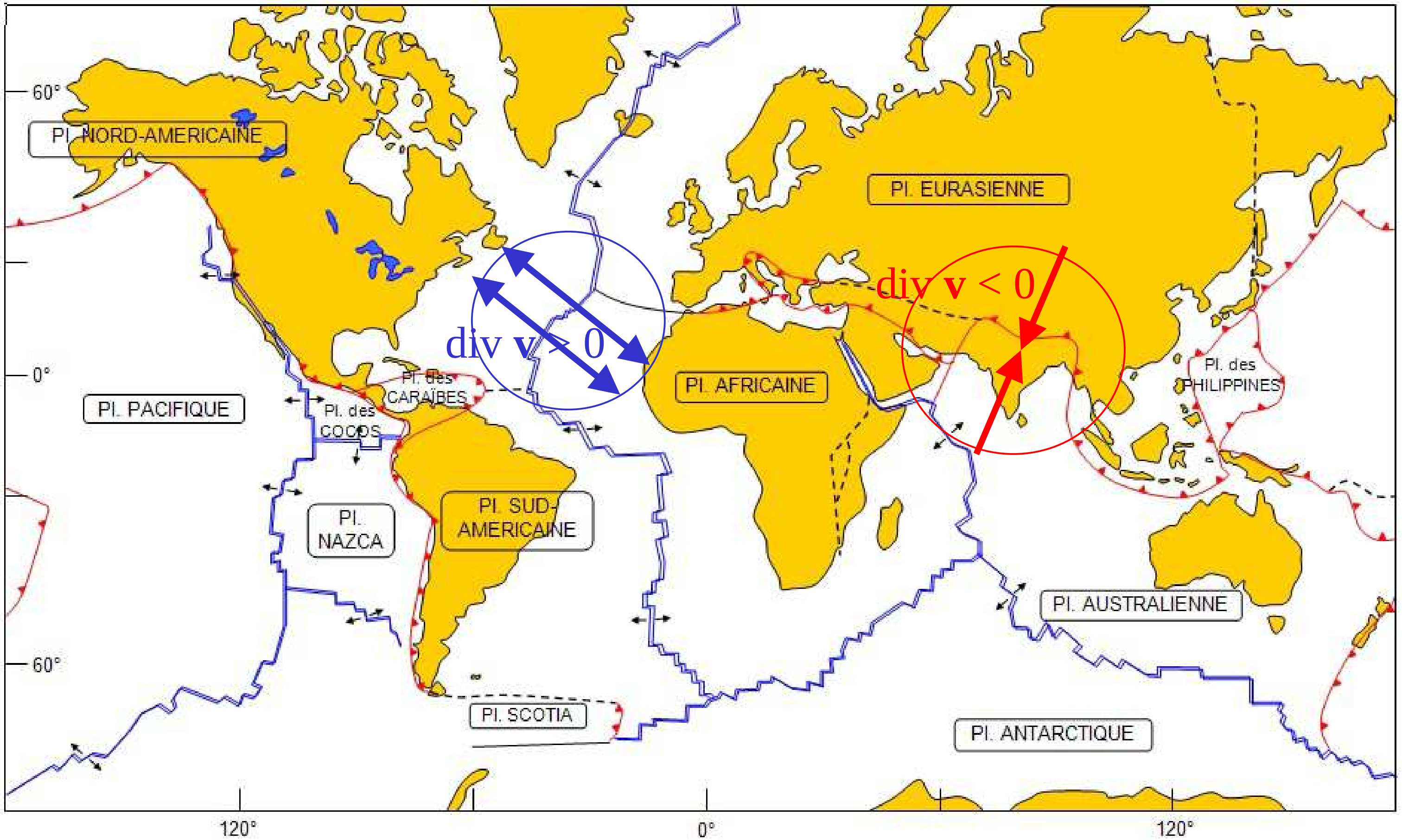
div $\mathbf{v} < 0$ mouvements <u>convergents</u>

→ la divergence caractérise la variation spatiale du champ <u>vectoriel dans sa direction</u>

Exemple 2: les plaques tectoniques

div $\mathbf{v} > 0$ au niveau des dorsales océaniques (plaques tectoniques qui s'écartent)

div $\mathbf{v} < 0$ au niveau des chaînes de montagne (plaques tectoniques qui s'approchent)



Tectonique des plaques: un exemple de mouvements convergents (chaînes montagneuses) et divergents (dorsales océaniques)

Le rotationnel s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ vectoriel

→ caractérise la variation spatiale du champ vectoriel dans les directions orthogonales

Exemple: tourbillon fluide de vitesse orthoradiale **v** *dans un plan horizontal*

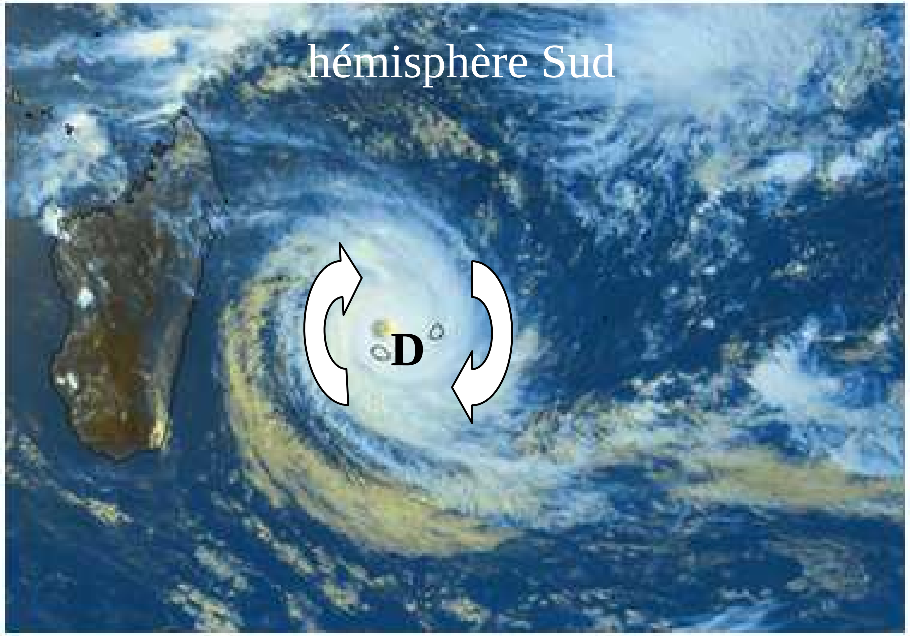
$[\mathbf{rot\ v}]_z > 0$ rotation dans le sens antihoraire (trigonométrique)

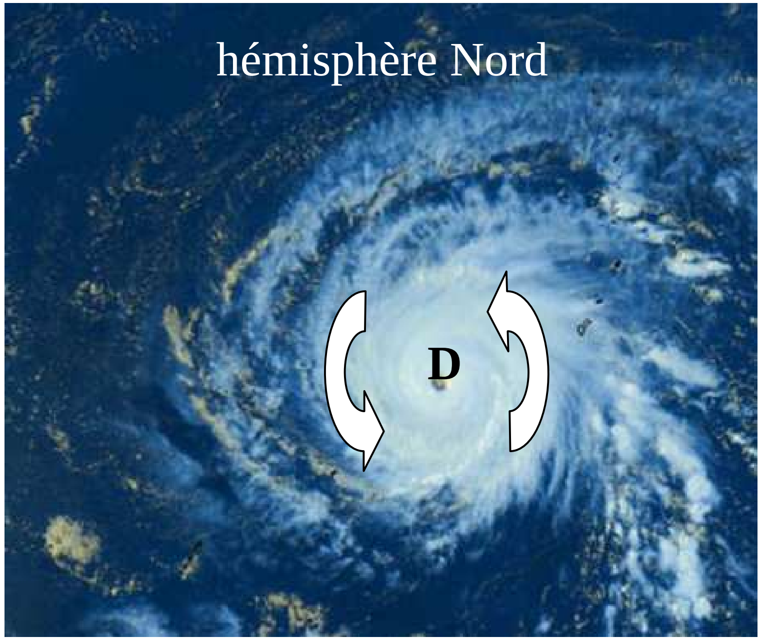
$[\mathbf{rot\ v}]_z < 0$ rotation dans le sens horaire

Météo hémisphère Nord: rotation sens trigo autour d'une D / horaire autour d'un A

hémisphère Sud: situation inverse (orientation par la force de Coriolis)

$\boxed{\tfrac{1}{2}\ \mathbf{rot(v)}\ \text{est le vecteur tourbillon}}$





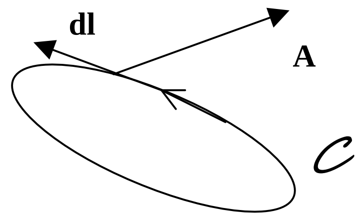
tourbillon à $[\mathbf{rot\ v}]_z < 0$ rotation horaire

tourbillon à $[\mathbf{rot\ v}]_z > 0$ rotation antihoraire

- Le *Laplacien* *scalaire* est défini par $\Delta f = \nabla^2 f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$ **=** div(**grad** f)

- **Le *Laplacien* *vectoriel*** est défini par $\Delta\mathbf{A}$ **= grad(**div**A) - rot(rotA)**

En cartésiennes, on peut écrire $\Delta\mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ ou Δ est le Laplacien scalaire; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées.



Circulation d'un champ vectoriel ***A*** *sur un contour* $\mathcal{C}$:

c'est l'intégrale curviligne $\boxed{\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}}$

dl désigne un élément du contour orienté $\mathcal{C}$ (**dl** est tangent au contour en tout point).

Le contour orienté $\mathcal{C}$ peut être ouvert (arc entre deux points P et Q) ou bien fermé.

Un champ vectoriel **A** dont la circulation est nulle sur tout contour fermé $\mathcal{C}$ est dit à circulation conservative. C'est toujours vrai si **A** = **-** grad **f** où f est une fonction « potentiel »

Exemples de champs à circulation conservative: les champs dérivant des potentiels
- de pesanteur $f(z) = g\,z$ ou de gravitation $f(r) = -KM/r$ (potentiel newtonien)
- électrostatique $f(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ (potentiel coulombien)

Flux d'un champ vectoriel ***A*** *sur une surface* $\mathcal{S}$:

c'est l'intégrale surfacique $\boxed{\iint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}}$

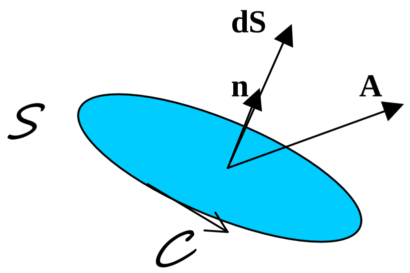
La surface $\mathcal{S}$ peut être <u>ouverte</u> (appuyée sur un contour – exemple: un bonnet) ou bien <u>fermée</u> (entourant un volume fini $\mathcal{V}$)

dS désigne un élément de surface: le vecteur surface est défini par **dS** = **n** dS où **n** est la normale locale.

Si $\mathcal{S}$ est une surface <u>fermée</u> entourant un volume $\mathcal{V}$, **n** est par convention vers l'extérieur.

Si $\mathcal{S}$ est une surface <u>ouverte</u>, le sens de **n** dépend de l'orientation du contour fermé $\mathcal{C}$ sur lequel s'appuie $\mathcal{S}$.

règle des doigts de la main <u>droite</u>:
pouce = $\mathcal{C}$, *index vers le centre du contour, majeur =* ***n***

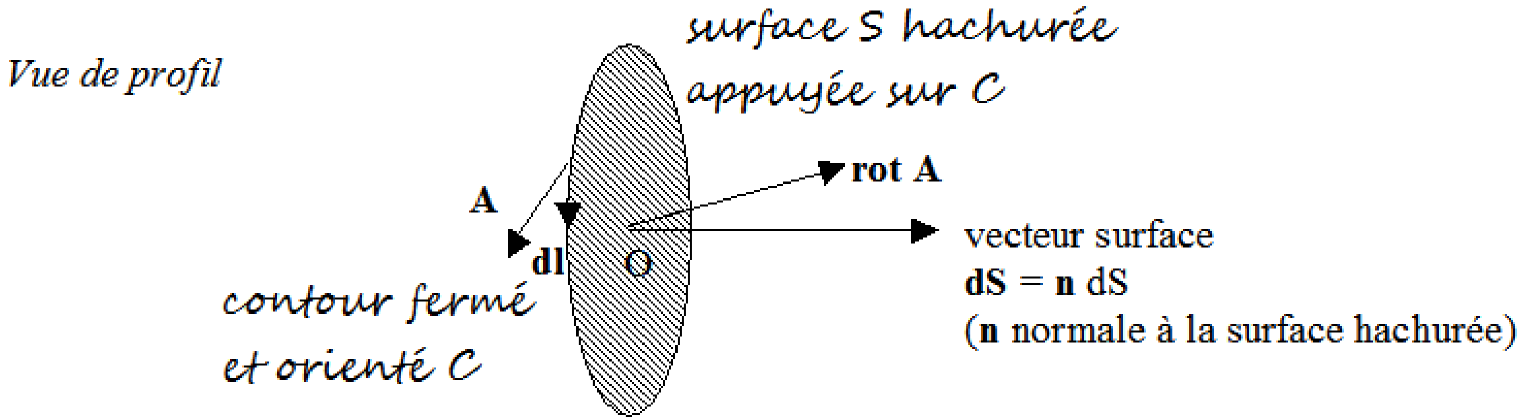


Un champ de flux nul sur toute surface <u>fermée</u> $\mathcal{S}$ est dit à <u>flux conservatif</u>

exemples de champs à flux conservatif: champ magnétique, vitesse d'un fluide incompressible

Théorême de Stokes ou du rotationnel: $\boxed{\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} = \iint \mathbf{rotA} \cdot \mathbf{dS}}$

La circulation du champ vectoriel **A** sur un contour <u>fermé</u> $\mathcal{C}$ est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur ce contour fermé.



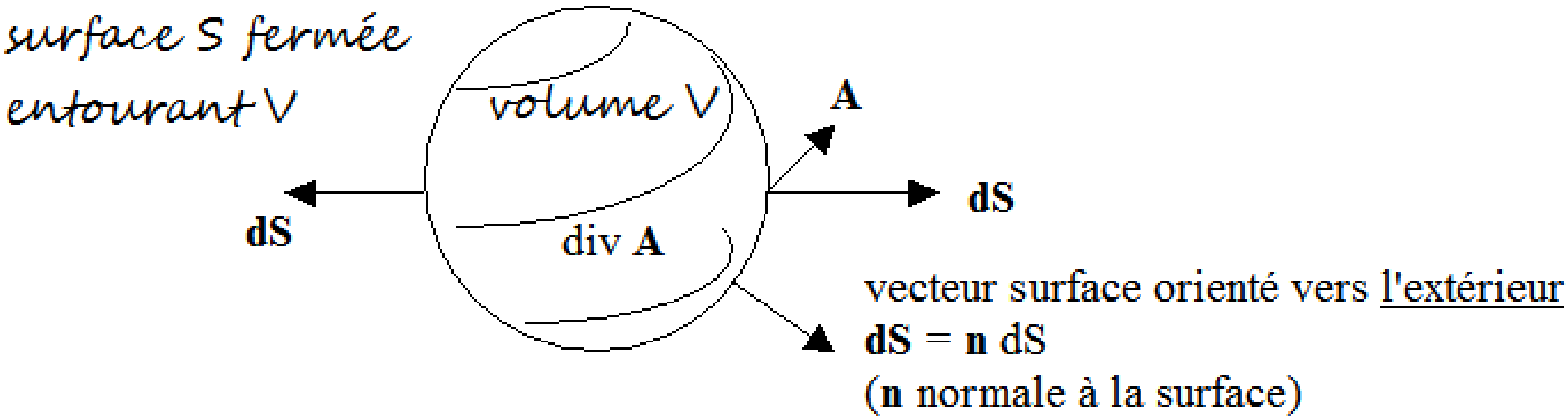
On choisit une orientation arbitraire du contour $\mathcal{C}$. Le vecteur surface **dS** est alors orienté par $\mathcal{C}$ selon la règle des doigts de la main *droite*:

*pouce sur le contour $\mathcal{C}$ dans le sens choisi, index vers le centre O, le majeur indique **dS**.*

Ou bien la règle du bonhomme d'Ampère: *couché sur le contour $\mathcal{C}$ dans le sens choisi, il regarde le centre O, son bras gauche indique le vecteur **dS**.*

Théorême d’Ostrogradski ou « flux divergence »: $\boxed{\oiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS} = \iiint \mathrm{div}\mathbf{A}\, dv}$

Le flux du champ vectoriel **A** au travers d’une surface <u>fermée</u> S est égal à l’intégrale de sa divergence sur le volume intérieur V délimité par cette surface.



Exemple: **A = v** vitesse d’un fluide incompressible

div v = 0

$\rightarrow \oiint \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = 0$

$\rightarrow$ $v_1\, S_1 = v_2\, S_2$ conservation du débit volumique