Université Ziane Achour Djelfa.
Faculté des sciences exactes et informatique.
Département : mathématiques et Informatiques

Séries d'exercices pour 1ère année.
Année mathématique (LMD-S1).
Module : Analyse 1.

série de Td

Série N°1(Les nombres réels)

Exercise 1 *Démontrer que le carré d'un entier impair est impair.*

Exercise 2 (**Raisonnement par récurrence**)

Démontrer les relations suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)}{4}$.

Exercise 3 (**autour de** $\sqrt{2}$)

On considère l'équation $x^2 = 2$. Montrez que cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercise 4 (**Calcul de racine**)

Montrer que les nombres suivantes sont rationnels

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \\ \text{et } b &= \sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}} \ . \end{aligned}$$

Exercise 5 (**autour des valeurs absolues**)

Démontrer les relations suivantes : $\forall x, y \in \mathbb{R}$

1) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
2) $||x| - |y|| \leq |x+y|$,
3) $|xy| = |x|\,|y|$.

Exercise 6 (**inf**, **sup**, **max**, **min**)

Soit $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\} = \left\{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, ...\right\}$

- Montrez que A est un ensemble non vide, majoré et minoré.
- Montrez que $sup(A) = max(A) = 1$.

- Montrez que $inf(A) = 0$.
- Montrez que $min(A)$ n'existe pas.

Exercise 7 (**inf**, **sup**, **max**, **min**)

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément s'ils existent :

$$\begin{aligned} A &= \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \\ B &= \mathbb{N}, \\ C &= [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ D &=]0,1[\cap \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Exercise 8 *Soient Aet B deux parties bornées de* $\mathbb{R}$*. On note*

$$A + B = \{a + b \diagup (a,b) \in A \times B\}.$$

- Montrer que $supA + supB$ est un majorant de $A + B$.
- Montrer que $sup(A + B) = supA + supB$.

Exercise 9 (**autour des parties entières**)

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Démontrer les résultats suivants

$$\begin{aligned} E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) &= E(x), \\ x - 1 &< E(x) \leq x \end{aligned}$$

soit x$\in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$E(x+n) = E(x) + n$$

Série N°2 (les suites numériques)

Exercise 10 *Etudier la* ***monotonie*** *des suites suivantes et en déduire eventuellement leur nature:*

1) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$; **2)** $u_n = \sqrt{\frac{n^3-1}{n^4}}$;

3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; **4)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$;

5) $u_n = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^2}$; **6)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $p = 2, 3, \ldots$;

7) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$; **8)** $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$;

9) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; **10)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$;

11) $u_n = \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n-1)}$; **12)** $u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$.

Exercise 11 *En utilisant le théorème des trois suites, calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *si :*

1) $u_n = \frac{n(\cos n + \sin n)}{(n+1)^2}$; **2)** $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

3) $u_n = (n+1)^k - n^k \quad (0 < k < 1)$; **4)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$;

5) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^3+k}$; **6)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$;

Exercise 12 *On considère les deux suites :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N},$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de* $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$*.*

Exercise 13 *Soit* $a > 0$*. On définit la suite par* $(u_n)_{n\geq 0}$ *par* u_0 *un réel vérifiant* $u_0 > 0$ *et par la relation*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) *tend vers* $\sqrt{a}$*.*

- Montrer que
$$u_{n+1}^2 - a = \frac{\left(u_n^2 - a\right)^2}{4u_n^2},$$

- Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$est décroissante.
- En déduire que la suite(u_n) **converge** vers$\sqrt{a}$.

Exercise 14 *En appliquant le **critère de Cauchy** étudier la nature des suites suivantes définies par:*

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos ka}{k^\alpha}$ $(a \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 2)$; (indication: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$);

2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k$ $(|\lambda| < 1,\ |a_k| \leq M\ (k \in \mathbb{N}))$;

3) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$; **4)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \geq 2,\ \alpha \in \mathbb{N})$; **5)** $u_n = \cos \frac{1}{n}$;

6) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; 7) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; **8)** $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log k}$;

9) $u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

Exercise 15 *Soit la suite numérique (u_n) définie par:*

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1 = 1, \\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + u_{n-1}} \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

- Calculer u_2, u_3.Montrer que la suite (u_n) est monotone.
- Montrer que la suite(u_n) est **majorée**.
- Est-elle **convergente**? Si oui, calculer sa limite.

Exercise 16 *Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!},$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2},\ n \geq 2;$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}},\ p \geq 2,\ n \geq 2.$$

- Montrer que(u_n) et (v_n) sont **adjacentes**.