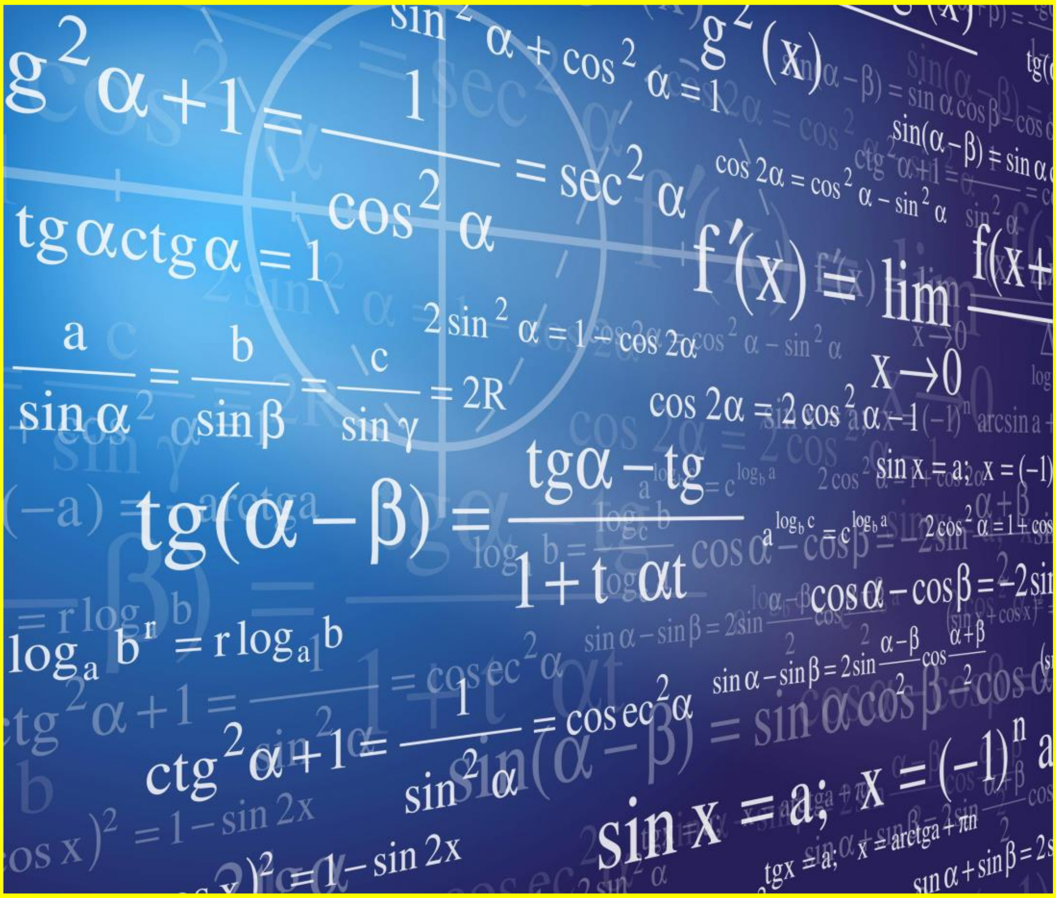
Université Ziane Achour-Djelfa

Faculté des Sciences exactes et informatique

Département : Mathématiques et Informatiques

Cours d'analyse 1ère année



Diabi Dallel et Ziane Fatima

Chapitre 1 et chapitre 2

Table des matières

première partie

SEMESTRE 1 :

Chapitre 1:

Propriétés des nombres réels.

Chapitre 2:

Suites réelles.

Chapitre 3:

Fonctions d'une variable réelle :

- Limite d'une fonction,
- Continuité,
- Dérivabilité,
- Formules de Taylor et developpements limites.

Introduction

Vous savez déjà compter, et vous connaissez les propriétés des réels. Une seule nouveauté dans ce chapitre, la notion de borne (supérieure ou inférieure) d'un ensemble. Au-delà des définitions, vous allez commencer à vous habituer aux « epsilons strictement positifs », à comprendre comme des quantités pouvant prendre des valeurs arbitrairement petites. À part ça, pas grand chose de neuf ni de difficile dans ce chapitre d'introduction à l'analyse.

CHAPITRE 1

Corps des nombres réels

1.1 Définition axiomatique des nombres réels $\mathbb{R}$

Nous ne présenterons pas de construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Cette section rappelle quelques notations, les propriétés des opérations (addition, multiplication) et de la relation d'ordre.

[Tab.1.1] Quelques notations.

Notation	Ensemble	Exemples
$\mathbb{N}$	Entiers naturel	$0, 1, 2, ...$
$\mathbb{Z}$	Entiers relatifs	$..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..$
$\mathbb{Q}$	Rationnels	$1.4, -\frac{5}{2}, 0.001, ...$
$\mathbb{R}$	Réels	$\sqrt{2}, \pi, ...$

L'exposant *signifie « privé de 0». Ainsi, $R^* = R\backslash \{0\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

Les ensembles vus précédemment et qui vérifient :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

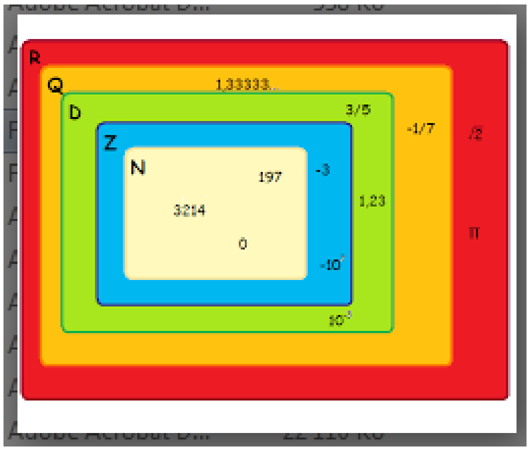


Figure 1.1

Problème 1.1.1 *Essayons de résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2 = 2$.*

Preuve. Supposons qu'un tel x existe. Alors il s'écrit sous la forme $x = \frac{p}{q}$.

Quitte à simplifier la fraction on peut supposer que p et q n'ont pas de multiple commun.Nous avons $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$: p^2 est donc un nombre pair.

Si p était un nombre impair, nous pourrions écrire

$$p = 2k + 1 \text{et } p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

et donc p^2serait aussi impair. Mais cela est faux puisque p^2est pair, ce qui implique donc que p est pair.

Ecrivons donc $p = 2p'$. Il vient alors $4p'^2 = 2q^2$ et donc $q^2 = 2p'^2$. Le nombre q^2 est donc pair et cela implique que q est lui-même pair.

En résumé: p et q sont des multiples de 2 : c'est absurde, on a supposé qu'il n'avait pas de multiple commun! Cela signifie qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Nous avons $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$: p^2 est donc un nombre pair.

Si p était un nombre impair, nous pourrions écrire

$$p = 2k + 1 \text{et } p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

et donc p^2serait aussi impair. Mais cela est faux puisque p^2est pair, ce qui implique donc que p est pair.

Ecrivons donc $p = 2p'$. Il vient alors $4p'^2 = 2q^2$ et donc $q^2 = 2p'^2$. Le nombre q^2 est donc pair et cela implique que q est lui-même pair.

En résumé: p et q sont des multiples de 2 : c'est absurde, on a supposé qu'il n'avait pas de multiple commun! Cela signifie qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. ■

1.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

1.2.1 Addition et multiplication

Addition

- Associativité : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$
- Élément neutre: $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = 0 + x = x$
- Opposé: $\forall x \in \mathbb{R},\ x + (-x) = x - x = 0$
- Commutativité:$\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$

L'ensemble des réels muni de l'addition est un **groupe commutatif**.

Multiplication L'ensemble $\mathbb{R}^*$ (ensemble réels privé de 0), muni de la multiplication, est un autre groupe commutatif.

- Associativité : $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}, x(yz) = (xy)z$
- Élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = 1 \times x = x$
- Inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)x = 1$
- Commutativité :$\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$
- Distributivité :$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R},\ x(y + z) = (xy) + (xz)$

L'ensemble des réels muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif.

1.2.2 Ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 *Soit E un ensemble.*

1) une *relation* $\mathfrak{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on sit que x est en relation avec y et on note $x\mathfrak{R}y$ pour dire que $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

2) Une relation $\mathfrak{R}$ est une **relation d'ordre** si :

   $\mathfrak{R}$ est réflexive: pour tout $x \in E$, $x\ \mathfrak{R}x$,

   $\mathfrak{R}$ est antisymétrique : pour tout $x, y \in E$, $(x\ \mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y$,

   $\mathfrak{R}$ est transitive :pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x\mathfrak{R}z$.

Définition 1.2.2 *Une relation d'ordre $\mathfrak{R}$ sur un ensemble E est **totale** si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathfrak{R}y$ ou $y\mathfrak{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathfrak{R})$est unensemble **totalement ordonné.***

Proposition 1.2.1 *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une realtion d'ordre, et de plus, elle est totale.*

Nous avons donc:

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

1.2.3 Propriété d'Archimède

Propriété

$\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$$

$\ll$ Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x. $\gg$

Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Proposition 1.2.2 *Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif, la* ***partie entière*** *notée $E(x)$, tel que :*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

On note aussi $E(x) = [x]$.

Voici le graphe de la fonction partie entière $x \to E(x)$:

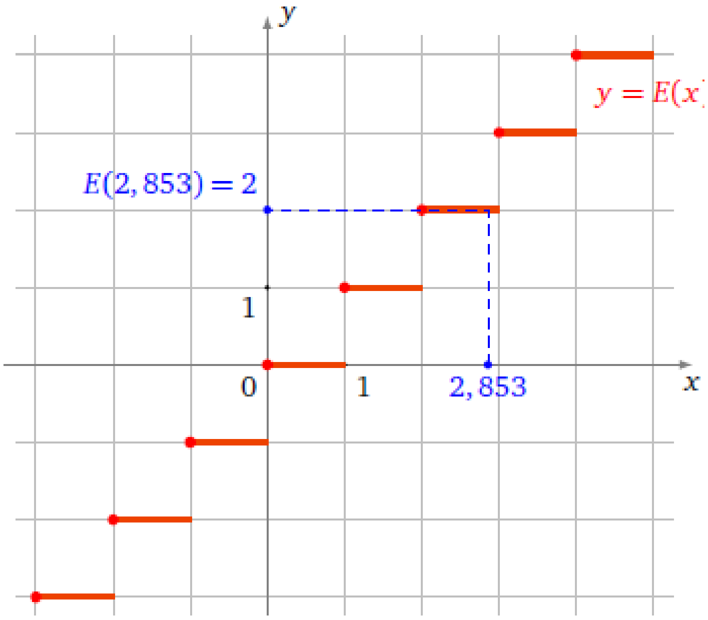


Figure 1.2 – Courbe de la fonction « partie entière »

Exemple 1.2.1 $E(2,853) = 2,\ E(\pi) = 3,\ E(-3,5) = -4.$

$E(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4.$

1.3 Majorant - minorant - bornes sup. et inf

1.3.1 Majorants, minorants

Définition 1.3.1 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un réel.*

- On dit que M est un majorant de A si :

$$\forall x \in A, x \leq M \ .$$

- De même, $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si :

$$\forall x \in A, x \geq m \ .$$

On notera $Mj(A)$(resp. $Mn(A)$) l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A.

- On dit que A est majorée lorsqu' elle admet un majorant M et alors tous les réels supérieur à M sont aussi des majorants de A.

- On dit que A est minorée ssi elle admet un minorant m et alors tous les réels inférieur à m sont aussi des minorants de A.

- A est bornée ssi elle est majorée et minoré.

Exemple 1.3.1

$$\begin{aligned} A &= [0, 2[\\ A &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\} \end{aligned}$$

A est majorée car il existe M (par exemple $M = 2$ ou bien $M = 5$). $M \in [2, +\infty[$.

Exercice 1.3.1 *Déterminer $Mj(A)$ et $Mn(A)$*

- pour $A = \mathbb{R}^+$

- pour $A = [0, 1[$.

- pour $A = \mathbb{Z}$.

1.3.2 Plus grand élément et plus petit élément

Définition 1.3.2 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux réels*

■M est le **plus grand élément** de A lorsque M majore A et $M \in A$.

■ m est le **plus petit élément** de A lorsque m minore A et $m \in A$.

Définition 1.3.3 ***Proposition 1.3.1*** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, si A admet un* ***plus grand (resp petit)*** *élément alors celui-ci est unique.*

Notation 1.3.1 *Si A admet un plus grand élément on le note $max(A)$ et si A admet un plus petit élément on le note $min(A)$.*

[Tab.1.2] Quelques exemples.

Ensemble	Plus petit élément	Plus grand élément
$\mathbb{N}$	0	Non
$\mathbb{Z}$	Non	Non
$\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	Non	1
$\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$	Non	Non
$\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$	-2	$\frac{3}{2}$
$\left\{(-1)^n+\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	Non	$\frac{3}{2}$
$\left\{(-1)^n-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	-2	Non

1.3.3 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.3.4 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*

■ **La borne supérieure de A** est, si il existe, le plus petit des majorants de A.

■ **La borne inférieure de** A est, si il existe, le plus grand des minorants de A.

Sous réserve d'existence, on note **sup(A)** et **inf(A)** les réels ainsi définis.

■ Si A possède un **plus grand (resp plus petit)** élément c'est nécessairement sa **borne sup (resp inf)**.

On étend la définition de sup et inf aux ensembles non majorés et non minorés par la convention suivante.

1. Si A n'est pas majorée, $sup(A) = +\infty$
2. Si A n'est pas minorée, $inf(A) = -\infty$

Reprenons comme exemples les 6 ensembles du tableau précédent.

[Tab.1.2] Quelques exemples.

Ensemble	Borne inférieure	Borne supérieure
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$
$\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	0	1
$\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$	-1	1
$\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$	-2	$\frac{3}{2}$
$\left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	-1	$\frac{3}{2}$
$\left\{(-1)^n - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$	-2	1

Proposition 1.3.2 *Caractérisation de la borne supérieure. Soit A une partie non vide de* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq \alpha \ \textit{et}\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \alpha - \varepsilon < x, \\ \beta &= \inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geq \beta \ \textit{et}\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < \beta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1 *: Toute partie non vide et majorée (resp minorée) de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

1.3.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.3.5 *On dit qu'un sous ensemble I de R est* ***un intervalle*** *de* $\mathbb{R}$*, si pour tous réels a et b appartenant à I et pour tout réel x tel que $a \leq x \leq b$, alors x appartient à I.*

Soient a et b deux réels tels que$a < b$.

On dit que l'intervalle I des réels x est :

✓ un intervalle fermé$[a;b]$ (ou un segment) si, pour tout x appartenant à I, $a \leq x \leq b$.

✓ un intervalle ouvert $]a;b[$ si, pour tout x appartenant à I, $a < x < b$.

✓ un intervalle semi-ouvert à droite $[a;b[$(respectivement à gauche $]a;b]$) si, pour tout x appartenant à I, $a \leq x < b$ (respect. $a < x \leq b$).

Dans ces trois cas, I est un intervalle dit **borné** de $\mathbb{R}$.

De la même façon, on définit les intervalles **non bornés** de $\mathbb{R}$.

[Tab.1.2] Illustration.

Description	Définition	Notation
fermé borné (segment)	$\{x \in \mathbb{R},\, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
borné, semi-ouvert à droite	$\{x \in \mathbb{R},\, a \leq x < b\}$	$[a, b[$
borné, semi-ouvert à gauche	$\{x \in \mathbb{R},\, a < x \leq b\}$	$]a, b]$
ouvert borné	$\{x \in \mathbb{R},\, a < x < b\}$	$]a, b[$
fermé non majoré	$\{x \in \mathbb{R},\, a \leq x\}$	$[a, +\infty[$
ouvert non majoré	$\{x \in \mathbb{R},\, a < x\}$	$]a, +\infty[$
fermé non minoré	$\{x \in \mathbb{R},\, x \leq b\}$	$]-\infty, b]$
ouvert non minoré	$\{x \in \mathbb{R},\, x < b\}$	$]-\infty, b[$
droite réelle	$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

1.4 valeur absolue d'un réel

Définition 1.4.1 *Soit x un réel, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ et défini*

$$|x| = \max(x, -x).$$

Proposition 1.4.1 *Propriétés de la valeur absolue:* $x, y \in R$:

1. $|-x| = |x|$,
2. $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$,
3. $|xy| = |x| \, |y|$,
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
5. $\sqrt{x^2} = |x|$,
6. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ avec $y \neq 0$,
7. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

CHAPITRE 2

SUITES RÉELLES

2.1 Généralités sur les suites numériques

Définition 2.1.1 *On appelle* ***suite numérique*** *est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Nous ne considérons ici que les suites réelles. Ainsi une suite peut être considérée comme une liste ordonnée de nombres réels.

Si la suite s'appelle (u), la notation habituelle est (u_n) où u_n se lit : "u d'indice n " ou "terme d'indice n de la suite u".

Si la suite u a pour ensemble d'indice l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, on a alors la suite: $u_0, u_1, u_2, u_3, ..., u_n.....$

On fait attention que la notation (u_n)correspond à l'ensemble des termes de la suite alors que la notation u_n correspond au terme d'indice n ou le terme général de la suite. Dans la suite, toutes les suites seront indicées sur $E \sqsubseteq \mathbb{N}$.

Exemple 2.1.1 *Déterminons le terme général de la suite* $(v_n) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, ...\right\}$.

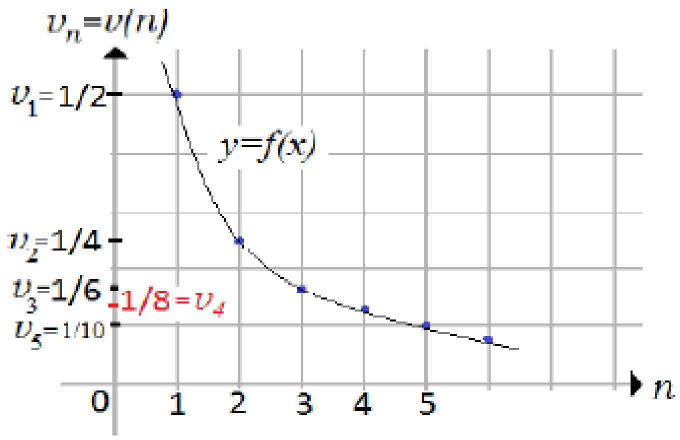
Le dénominateur est de la forme $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$ donc le terme général de la suite est $u_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Représentation graphique

Une suite réelle est une application de $E \sqsubseteq \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$, sa représentation graphique dans le plan est donc l'ensemble des points(n, u_n)du plan, où n appartient au domaine de définition de la suite.

Exemple 2.2.1 *Représentons la suite* (v_n) *de l'exemple 2 dans le plan cartésien. Les 5 premiers points de la représentation graphique sont* $\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), \left(3, \frac{1}{6}\right), \left(4, \frac{1}{8}\right), \left(5, \frac{1}{10}\right)$.

La suite (v_n) est donc représentée par des points sur la figure 2.1.



Représentation graphique de la suite $\left(v_n = \frac{1}{2n}\right)$ et de la fonction f associée.

En fait, l'ensemble (v_n) est un sous-ensemble de la courbe représentative $y = f(x)$(trait plein sur la figure 2.1) de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2x}, x \geq 1.$$

2.3 Sens de variation d'une suite

Le comportement d'une suite numérique (u_n) est défini selon ce qui suit.

Définition 2.3.1 (***Suite croissante***)

On dit que la suite est croissante si pour tout n entier naturel, on a : $u_n \leq u_{n+1}$. On a donc $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq$ ......

Définition 2.3.2 (***Suite décroissante***)

On dit que la suite est décroissante si pour tout n entier naturel, on a : $u_{n+1} \leq u_n$. On a donc $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1} \leq .... \leq u_2 \leq u_1 \leq u_0$.

Définition 2.3.3 (***Suite monotone***)

On dit que la suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 2.3.4 (***Suite stationnaire***)

Une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ est dite stationnaire s'il existe un entier naturel p de E tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p$.

Définition 2.3.5 (***Suite constante***)

La suite (u_n) est constante lorsuqe $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier n du domaine de définition de (u_n) .

■ Pour comprendre la nuance entre une suite stationnaire et une suite constante, donnon un exemple.

Notons E la partie entière dun réel(par exemple $E(\pi) = 3$) et (u_n) la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par:

$$u_n = E\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a $u_1 = E(1) = 1$, $u_2 = E(0.5) = 0$ puis pour tout $n \geq 2, u_n = 0$. La suite (u_n) est stationnaire(à partie du rang 2) mais non constante puisuqe $u_1 = 1$ et $u_2 = 0$.

2.4 Majorant-Minorant

Définition 2.4.1 **(suite majorée)**

On dit que la suite est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n entier naturel, on a: $u_n \leq M$.

On dit que M est un majorant de la suite.

Définition 2.4.2 **(suite minorée)**

On dit que la suite est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n entier naturel, on a : $m \leq u_n$. On dit que m est un minorant de la suite.

Définition 2.4.3 **(suite bornée)**

Si la suite admet un majorant et un minorant, on dit qu'elle est bornée. Il existe donc M et m tel que pour tout n entier naturel, on a: $m < u_n < M$.

Remarque 2.4.1 *La suite est bornée ssi*

$$\exists A \in \mathbb{R} \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \ |u_n| < A.$$

On peut alors énoncer les propriétés suivantes:

Propriété 1. Une suite croissante est minorée (car pour tout n, on a : $u_0 \leq u_n$).

Propriété 1. Une suite décroissante est majorée (car pour tout n, on a : $u_0 \geq u_n$).

`Attention!` Une suite n'est pas nécessairement bornée ou majorée ou minorée. Par exemple, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par u_n= (-1)^n, n'est ni bornée, ni majorée, ni minorée.

2.4.1 Technique pour prouver qu'une suite est majorée(ou minorée ou bornée)

Technique algébrique: manipulation d'inégalités

Exemple 2.4.1

$$u_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^2}, \textit{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$-2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2 \ \textit{et} \ 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$$

D'ou

$$-2 \leq u_n \leq 2$$

La suite (u_n) est bornée.

Exercice 2.4.1

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \ \textit{pour} \ n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que (u_n) est majorée par 2.

Technique fonctionnelle

Exemple 2.4.2

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

Considérons la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+5}$$

On a déjà vu, plus haut, que f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Par ailleurs, on a $f(0) = \frac{1}{5}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{5}$ et 2.

On peut aussi retrouver ce résultat par la méthode algébrique. (Manipulation d'inégalités)

Technique par récurrence

Exemple 2.4.3

$$u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \ \textit{avec} \ u_0 = 0$$

Montrer que cette suite est bornée.

Solution 2.4.1

Le calcul des premiers termes ($u_1 = \sqrt{6} \simeq 2{,}45$; $u_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} \simeq 2{,}91$ et $u_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} \simeq 2{,}98$) nous amène à considérer la propriété $\wp$, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\wp(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

- Par hypothèse, on a $\wp(0)$. La propriété est initialisée au rang 0.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 0.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\wp(n)$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$

  Alors, en ajoutant 6 : $\quad 6 \leqslant 6 + u_n \leqslant 9$

  Par passage à la racine carrée (qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) :

  $$\sqrt{6} \leqslant \sqrt{6+u_n} \leqslant 3$$

  Donc : $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, on a:

$$0 \leq u_n \leq 3$$

2.5 Convergence, Nature d'une suite

Définition 2.5.1 (**Suite convergente**)

On dit qu'une suite converge(ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel ℓ tel que :

tout intervalle ouvert I centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Lorsque (u_n) converge vers ℓ, in note alors:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Une suite no convergente est apppelée **suite divergente.**

En formulant différement cette définition, on obtient plusieurs variantes toutes équivalentes:

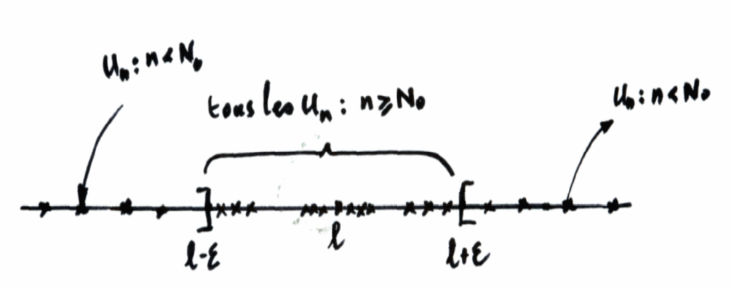
(u_n) converge lorsqu'il existe un réel ℓ tel que :

- Tout intervalle $I =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ $\left(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\right)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- Pour tous réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n vérifient $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

- Pour tout réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que pour tout indice n, on ait :

$$n \geq N \Rightarrow |u_n \text{ -}\ell| < \varepsilon \qquad \text{Lire : } n \geq N \text{ implique } |u_n - \ell| < \varepsilon$$



- Si la limite ℓ existe et est finie, on dit que la suite est convergente. Sinon, la suite est dite divergente.

Théorème 2.5.1 *Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, cette limite ℓ est unique.*

Proposition 2.5.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Attention ! La réciproque est fausse en général.

Exemple 2.5.1 *En utilisant la définition, montrons que la suite définie par:*

$$u_n = \frac{-3n+5}{n+5}, \textit{ tend vers -3.}$$

Définition 2.5.2 (**Suite divergente vers** $+\infty$)

On dit qu'une suite diverge vers $+\infty$ lorsque : tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ (où $A > 0$) contient tous les termes de laa suite à partir d'un certain rang.

En formulant différemment cette définition, on obtient plusieurs variantes toutes équivalentes:

$$u_n \text{ diverge vers } +\infty \text{ lorsque:}$$

- Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, l'intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang N tel que pour tout indice n,on ait:

$$n \geq N \Rightarrow u_n > A$$

On définit de même la divergence vers -∞ à l'aide d'intervalles du type $]-\infty, A[$.

À l'aide de cette définition, on peut, par exemple, démontrer la propriété suivante:

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

En effet, si une suite (u_n) est non majorée, cela signifie que pour tout réel M, il existe un rang N telque:

$$u_N > M$$

Et si, de plus, la suite est croissante, alors pour tout indice n tel que $n \geq N$, on aura $u_n \geq u_N$donc:

$$n \geq N \Rightarrow u_n > M$$

Ce qui prouve bien que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 2.5.1 *Étudier la limite de la suite (u_n) définie par :*

$$u_n = \frac{3n^2 - 2n + 4}{4n^2 + 1}$$

2.6 Règles opérations sur les Limites d'une suite

Les règles opératoires (somme, produit, quotient, ...) sont les mêmes que pour les limites de fonctions. Pour résumer :

$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(\lambda u_n), \lambda \in \mathbb{R}$	$\lim(u_n + w_n)$	$\lim(\lambda\, u_n . v_n)$	$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right), v_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$
l	l'	λl	$l + l'$	$\lambda l l'$	$\frac{l}{l'}$ $(l' \neq 0)$
0	0	0	0	0	?
l	$\sigma\infty$ (où $\sigma = \pm 1$)	λl	$\sigma\infty$	$\sigma\infty$ *si* $\lambda > 0$ $-\sigma\infty$ *si* $\lambda < 0$	0
0	$\sigma\infty$ (où $\sigma = \pm 1$)	0	$\sigma\infty$	?	0
$\sigma\infty$ (où $\sigma = \pm 1$)	l'	$\begin{cases} 0 \text{ si } \lambda = 0 \\ \sigma\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ -\sigma\infty \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$	$\sigma\infty$	$\sigma\infty$ *si* $l' > 0$ $-\sigma\infty$ *si* $l' < 0$? *si* $l' = 0$	$\begin{cases} \sigma\infty \text{ si } l' > 0 \\ -\sigma\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$
$\sigma_1\infty$ (où $\sigma_1 = \pm 1$)	$\sigma_2\infty$ (où $\sigma_2 = \pm 1$)	//	$\sigma_1\infty$ *si* $\sigma_1 = \sigma_2$? *si* $\sigma_1 \neq \sigma_2$	$+\infty$	?

Les points d'interrogation(?) signalent les cas indéterminés, pour lesquels une étude spécifique doit être menée pour déterminer l'éventuelle limite.

1) Cas " $\infty - \infty$"

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

On écrit:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

D'où(par inverse) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2) Cas " $\infty \times 0$":

$$u_n = n \sin\frac{1}{n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} sin\frac{1}{n} = 0$. D'où une forme indéterminée du type " $\infty \times 0$".

Pour lever l'indétermination, on écrit:

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Comme on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on en déduit:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2.6.1 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

2.7 Conditions Particulières de Convergence

Théorème 2.7.1 *Si la suite (u_n) est croissante et admet un majorant M alors cette suite est convergente et sa limite ℓ est inférieure ou égale à M.*

Exemple 2.7.1 *La suite définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ est croissante et majorée par 2, mais sa limite est $\ell = 1$.*

2.8 Quelques théorème de comparaison et d'encadrement

2.8.1 Comparaison par rapport à une suite divergente

Soient (u_n) et (v_n)deux suites telles que:

$$\text{pour tout } n,\ u_n \leq v_n$$

■ Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) aussi.

■ Si (v_n) diverge vers $+\infty$ alors (u_n) aussi.

Démonstration.

Fixons $A \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que (u_n) diverge vers $+\infty$. Alors, à partir d'un certain rang N, on a :

$$\begin{aligned} u_n &\geq A \\ v_n &\geq A \end{aligned}$$

Et comme $v_n \geq u_n$, on aura aussi.

Donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

Le deuxième point se démontre de manière analoque.

Exemple 2.8.1 *Étudier la limite de la suite (u_n) définie; pour tout $n \in \mathbb{N}$, par*

$$u_n = 2\cos n + 3 \times (-1)^n - 3n$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq 5 - 3n$$

Or

$$\lim (5 - 3n) = -\infty$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Exercice 2.8.1 *Étudier la limite de la suite (u_n) définie; pour tout $n \in \mathbb{N}$, par*

$$u_n = n^4 (\cos n - 2)$$

■

Exercice 2.8.2 *L'affirmation "une suite qui diverge vers $+\infty$ est nécessairement croissante" est - elle vraie?*

Théorème 2.8.1 (***Théorème d'encadrement ou des gendarmes***)

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites telles que

- À partir d'un certain rang:

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

- (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ.

Alors (v_n) converge vers ℓ.

Exemple 2.8.2 *Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par:*

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

On a:

$$n^2 < n^2 + 1,$$

En outre

$$n^2 + 1 < (n+1)^2,$$

En effet

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + 1 \text{ car } 2n > 2 > 0$$

On a donc l'encadrement suivant:

$$n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$$

Par passage à la racine(tous les membres sont positif) , il vient:

$$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$$

Puis en divisant par n (positif) :

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, on en déduit(théorème des gendarmes) que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2.8.3 *Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par:*

$$v_n = \frac{3n+5\times(-1)^n}{2n}.$$

2.9 Suites Particulières

2.9.1 Suites Adjacentes

Définition 2.9.1 **(Suites adjacentes)**

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$, on dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Remarque 2.9.1

la condition "pour tout n, $u_n \leqslant v_n$" est inutile dans les hypothèses. Elle découle des trois autres.

Théorème 2.9.1 *Si deux suites sont **adjacentes**, alors elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.*

2.9.2 Suites extraites

Définition 2.9.2 *Une suite $(v_n)n \in \mathbb{N}$ est appelée **suite extraite** ou **sous-suite** d'une suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$ s'il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)} \ .$$

Cela veut dire que les termes de la suite (v_n) sont des éléments de la suite (u_n)placés dans le même ordre.

Proposition 2.9.1 *Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.*