Chapitre 2 Systèmes d'équations

On cherche $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ solution de

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Notation matricielle

$$Ax = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Les 3 propositions suivantes sont équivalentes et garantissent l'existence d'une solution du problème $Ax = b$

- la matrice A est de rang maximal (nombre d'inconnues = nombre d'équations).
- le déterminant de A, noté $\det A$ est non nul.
- A a une inverse, notée A^{-1}($AA^{-1} = A^{-1}A = I$)

Si une de ces propositions est vraie alors on pourra écrire $x = A^{-1}b$

Remarques

- La plupart du temps on traite des cas où la matrice est inversible (matrice non singulière). Ce qui assure l'existence d'une solution.
- Sauf dans de rares cas les formules, tel que la formule de Cramer, peuvent être considérer comme purement théorique (sans applications).

Comment résoudre de manière « automatique » de tel système?

La méthode de substitutions, facile pour un humain, semble peu adaptée à nos besoins.
Tentons d'exploiter la structure de certaines matrices.

Une matrice est dite **diagonale** si les entrées de la matrice sont nulles en dehors de sa diagonale:

$$a_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad i, j = 1, ..., n$$

Dans ce cas,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

donc le système admet une solution si $a_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, ..., n$ et dans ce cas

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Une matrice est **dite triangulaire inférieure (ou supérieure)** si toutes ses entrées a_{ij} sont nulles pour $i < j$ ($i > j$ resp.).

Pour ces deux cas,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

donc le système admet une solution si $a_{ii} \neq 0$ pour $i = 1, ..., n$

Matrice triangulaire supérieure: on résout en commençant par x_n, on fera une **remontée triangulaire:**

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k}{a_{ii}} \quad i = n-1, n-2, ..., 1$$

Matrice triangulaire inférieure: on résout en commençant par x_1, on fera une **descente triangulaire:**

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k}{a_{ii}} \quad i = 2, 3, ...n$$

Les méthodes de remontée et de descente sont très efficaces.

Peut-on transformer toutes les matrices en matrices triangulaires?

Oui! On sait transformer une matrice en triangulaire supérieure, c'est la **méthode d'élimination de Gauss**: on transforme la matrice et le vecteur de droite par une série **d'opérations élémentaire sur les lignes**.

Problème? On transforme la matrice et le vecteur *b*. **On doit tout refaire si on change le membre de droite.**

Théorème (de décomposition) Pour toute matrice A inversible, il existe une décomposition de A en un produit de 3 matrices, notées P, L et U tels que

$$A = PLU$$

Avec
- P une matrice dite de permutation avec $\det P = 1$
- L une matrice triangulaire inférieure.
- U une matrice triangulaire supérieure.

Remarques
- On supposera pour le reste du cours que la matrice P n'est pas nécessaire lors de la décomposition.

- La décomposition n'est pas unique! Il faut une condition supplémentaire
  - $U_{ii} = 1$, $i = 1, ..., n$ produit la **décomposition de Crout**, dans ce cas
    $$\det A = \det L = \prod_{i=1}^{n} L_{ii}$$
  - $L_{ii} = 1$, $i = 1, ..., n$ produit la **décomposition de Doolittle** (Matlab), dans ce cas
    $$\det A = \det U = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$$

Comment transformer une matrice quelconque en produit LU?

Notre point de départ est l'élimination de Gauss : on transforme la matrice en triangulaire supérieure sans rendre la diagonale (les pivots) unitaire: s'apparente a une décomposition de Doolittle où on aurait jeté la matrice L.

Les opérations élémentaires sur les lignes correspondent à des produits par une matrice: elles servent à former la matrice L .

En résumé, on modifie l'élimination de Gauss en gardant l'information permettant de construire L (p. 111 pour la décomposition de Crout).

Remarques

• Contrairement à l'élimination de Gauss, la décomposition ne modifie pas le membre de droite.
• La décomposition ne dépendant plus du membre de droite, on peut utiliser la décomposition pour plusieurs membres de droite.

Comment résoudre partant de LU?

On cherche à résoudre $Ax = b$, partant de $A = LU$

Deux étapes:
1) Résoudre par descente triangulaire $Ly = b$
2) Résoudre par remontée triangulaire $Ux = y$

C'est la **méthode de résolution par décomposition LU**, une méthode directe.

Une méthode de résolution d'un système linéaire est dite **directe** si la solution du système peut être obtenue en **un nombre fini et prédéterminé d'opérations**.

Nombre d'opérations

• Une méthode directe est essentiellement une méthode basée sur la remontée (descente). On peut faire une estimation a priori du nombre d'opérations en virgule flottante et du temps de calcul. Pour une matrice de dimension n

• on compte le nombre d'opérations pour la décomposition LU ($O(n^3)$)

• on compte les opérations pour une remontée et une descente ($\mathcal{O}(n^2)$)

On obtient ainsi qu'une résolution directe est $O(n^3)$ opérations!

Importance du nombre d'opérations:

La résolution directe par décomposition LU (méthode LU) est une méthode nécessitant beaucoup d'opérations: la **décomposition est la partie la plus couteuse** ($O(n^3)$).

Retour sur le problème de dimension $n = 576300099$:

Quelques chiffres:

1) Nombre d'opérations: 2×10^{26}
2) Espaces requis pour le stockage de la matrice 768 G distribué sur 512 processeurs.
3) En supposant que l'on fasse 10^{14} opérations à la seconde, on aura besoin de 10^{12} secondes ≈ 31688 années pour résoudre.

Conclusion:

- la méthode LU **ne doit pas être utilisée pour les systèmes de grande taille.**
- l'inversion effective d'une matrice de dimension *n* correspond à *n* résolutions. **On ne doit jamais inverser une matrice.**

Un quickie d'algèbre

Q, R, S des matrices $n \times n$, u et v des vecteurs de dimension n

- Si $Q = RS$ alors $\det Q = (\det R)(\det S)$
- $\det Q = \det Q^T$
- Si Q est diagonale ou triangulaire alors $\det Q = Q_{11} * Q_{22} ... * Q_{nn}$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & ... & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & ... & r_{nn} \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & ... & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & ... & s_{nn} \end{pmatrix}$$

- $Q = RS$ alors q_{ij} est le résultat du produit de la ligne i de R avec la colonne j de S

$$q_{ij} = r_{i1}s_{1j} + r_{i2}s_{2j} + r_{i3}s_{3j} + ...r_{in}s_{nj}$$

- Si $v = Qu$ alors v_i est le résultat du produit de la ligne i de Q avec u

$$v_i = q_{i1}u_1 + q_{i2}u_2 + q_{i3}u_3 + ...q_{in}u_n$$

$$Ax = b$$

- Solution unique si A^{-1} existe
- Solution unique si $\det A \neq 0$

- Méthode efficace si
  - A est diagonale,
  - A est triangulaire inférieure (descente) ou supérieure (remontée)

- Toute matrice inversible peut s'écrire $A = PLU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.
- On suppose que la matrice P est l'identité (pas de permutation nécessaire)

- La décomposition n'est pas unique, en ajoutant
  - $U_{ii} = 1$ on a la décomposition de Crout
  - $L_{ii} = 1$ on a la décomposition de Doolittle.

- Basée sur la méthode d'élimination de Gauss on peut construire L et U.
- Dans la décomposition les lignes de L et U sont associés à la ligne de A correspondante

- Méthode de résolution par décomposition LU:
  1. Transformation de A en produit LU
  2. Résolution de Ly = b
  3. Résolution de Ux = y

Retour sur l'inversion de matrice: trouver la solution en faisant réellement $x = A^{-1}b$

- une opération en $\mathcal{O}(n^3)$ pour la décomposition LU
- n opérations en $\mathcal{O}(n^2)$ pour la remontée et la même chose pour la descente
- en additionnant les opérations, inverser une matrice c'est 3 opérations $\mathcal{O}(n^3)$.
- On fera ensuite un produit matrice vecteur qui est $\mathcal{O}(n^2)$

Il est clair que sauf pour de très petites dimensions cette façon de faire est excessivement inefficace.

Espace de stockage

- Pour une matrice A de dimension $n \times n$ on aura besoin de n^2 réels pour stocker toute la matrice.
- Pour la décomposition LU de A on aura besoin de $n^2 + n$.

- On « compacte » pour réduire l'espace requis
    - On ne stocke pas la diagonale de U pour Crout ou de L pour Doolittle (composée de 1 par définition)
    - Sauf dans de rare cas, on a pas besoin de A si on a L et U, on va donc ordonner les opérations dans la méthode de décomposition pour pouvoir remplacer les valeurs de A par les valeurs de L et U

Au final on utilisera seulement n^2 réels pour stocker L et U.

On peut encore exploiter des structures de matrices particulières pour améliorer l'efficacité de la résolution et le stockage.

Matrice triadiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice nulle en dehors de la diagonale principale et des deux sous diagonale adjacente.
On retrouve cette structure fréquemment, on peut optimiser la méthode de résolution et le stockage (p 122).

Matrice symétrique: matrice A telle que $a_{ij} = a_{ji}\ i,j = 1,...,n$

Matrice définie strictement positive: une matrice A telle que

$$Ax \cdot x > 0 \qquad \forall x \neq 0$$

Théorème (décomposition de Cholesky) Les propositions suivantes sont équivalentes

- A est symétrique et définie strictement positive
- les valeurs propres de A sont toutes réelles et positives
- le déterminant de A et de toutes ses sous-matrices diagonales sont strictement positifs
- il existe une décomposition dite **décomposition de Cholesky** de A:

$$A = LL^T$$

où L est triangulaire inférieure.

Pour certaines matrices symétriques, on pourra
- stocker uniquement leur partie inférieure
- dans la décomposition ne construire qu'une matrice triangulaire inférieure L

Remarques
- $A = LL^T$ alors $\det A = (\det L)(\det L^T) = (\det L)^2 = (l_{11} * l_{22} * ...l_{nn})^2$
- La décomposition de Cholesky n'est pas unique, pour obtenir l'unicité on ajoutera la condition

$$l_{ii} > 0$$

- Même si la méthode de décomposition de Cholesky s'apparente à la méthode pour la décompostion LU, elle sera différente puisque
    - on exige des conditions particulières sur A
    - dans Cholesky on a $U = L^T$ ce qui n'est jamais le cas pour une décomposition de Crout ou Doolittle (décomposition LU).

Comment reconnaitre une matrice symétrique définie strictement positive?

- la diagonale de A ne peut pas avoir de terme négatif car $a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} (l_{ik})^2 \geq 0$
- On évite de calculer les déterminants: sauf dans de très petits cas ou pour des matrices très simples

- On évite de calculer les valeurs propres: sauf dans de très petits cas ou pour des matrices très simples

Il ne nous reste plus que deux choix:

- Vérifier que la matrice est symétrique et définie strictement positive
- Vérifier si on peut le faire en le faisant: munir la méthode de décomposition d'un indicateur permettant d'arrêter la décomposition dès que l'on s'aperçoit que la matrice ne peut être décomposée par Cholesky!

Un résultat d'algèbre linéaire

Proposition Soit A une matrice vérifiant

- A est symétrique et $a_{ii} > 0$
- A est **à diagonale strictement dominante** c'est-à-dire que

$$|a_{ii}| > \sum_{j}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, ..., n$$

Alors A admet une décomposition de Cholesky.

Attention: cette proposition ne dit rien dans le cas où la matrice ne vérifie pas les conditions

Finalement, fréquemment la nature du problème nous menant à la construction de la matrice A peut nous indiquer si la matrice satisfait les conditions permettant une décomposition de Cholesky. Par exemple, l'application de méthode numérique sur les problèmes de thermique ou d'élasticité produisent en général des matrices symétriques et définies positives.