Logique, Raisonnements et Quantificateurs

Logique et Raisonnement

Assertions

Une assertion est une phrase soit vrai,soit fausse, pas les deux en même temps.
Exemple
"Je suis plus grand que toi."
"1+2=3."
"2*5=11."
"pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z| = 1$."
$*$ **L'opérateur logique "et"**
L'assertion "P et Q" est vraie si P est vraie et Q est vrai.
L'assertion "P et Q est fausse sinon."
On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	F	F
V	F	F
F	V	F

Exemple
Si P est l'assertion "Cette carte est un as" et Q l'assertion "cette carte est coeur " alors l'assertion "P et Q " est vraie si la carte est l'as de coeur et est fausse pour toute autre carte.
$*$**L'opération logique "ou"**
L'assertion "P ou Q" est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion "P ou Q" est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.
On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$*$**La négation "non"**
L'assertion "non P" est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	non P
V	F
F	V

$*$ **L'implication** $\Longrightarrow$

La définition math'ematique et la suivante :

L'assertion "(non P)ou Q" est notée $P \Longrightarrow Q$.

Sa table de vérité est donc la suivante

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

*L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence est définie par "$P \Longleftrightarrow Q$" est l'assertion "$(P \Longrightarrow Q)$et $(Q \Longrightarrow P)$."

Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

P	Q	$p \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	v	F

Proposition

Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Longleftrightarrow$ (non(non$P$))
2. (P et Q)$\Longleftrightarrow$ (Q et P)
3. (P ou Q)$\Longleftrightarrow$ (Q ou P)
4. non(P et Q)$\Longleftrightarrow$ (non P) ou (non Q)
5. non(P ou Q) $\Longleftrightarrow$ (non$P$)et (non$Q$)

6.(P et (Q ou R)) $\Longleftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)

7. (P ou (Q et R)$\Longleftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)
8. ($P \Longrightarrow Q$)$\Longleftrightarrow$ (non(Q)$\Longrightarrow$ non(P))

Démonstration : je vais démontrer 1 et 2 et je vais laisser le reste pour l'étudiant :

1) La table de vérité de P

P	F	V

La table de vérité de non$P$

non$P$	V	F
non(non$P$)	F	V

Puisque les tables de vérité sont égales donc les deux assertions sont équivalentes.

2) La table de vérité de ($PetQ$)

P	Q	P et Q
V	F	F
F	V	F
V	V	V
F	F	F

.

La table de vérité de (Q et P)

P	Q	Q et P
F	V	F
V	F	F
V	V	V
F	F	F

.

Puisque les tables de vérité sont égales donc les deux assertions sont équivalentes.

Quantificateurs

$*$ **Le quantificateur $\forall$:"pour tout"**

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x, par exemple "$x^2 \geqslant 1$", l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.

L'assertion "$\forall x \in E\ P(x)$" est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Exemple

"$\forall x \in [1, +\infty[\ (x^2 \geqslant 1)$" est une assertion vraie.

"$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geqslant 1)$ est une assertion fausse".

$*$**Le quantificateur $\exists$: "il existe"**

l'assertion : $\exists x \in E\ P(x)$. est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

$*$ **La négation des quantificateurs**

La négation de "$\forall x \in EP(x)$" est "$\exists x \in E$ non $P(x)$".

Exemple

La négation de "$\forall x \in [1, +\infty[\ x^2 \geqslant 1$" est "$\exists\ x \in [1, +\infty[\ x^2 < 1$".

La négation de "$\exists x \in EP(x)$" est "$\forall x \in E$ non $P(x)$".