Université Ziane Achour Djelfa
Faculté des sciences exactes et informatique
3 année LMD-physique-

Physique numérique

Introduction :

Le but d'étudier la physique numérique est de résoudre les problèmes physiques à l'aide des programmes informatiques.

En physique il existe deux approches :

- L'approche théorique
- L'approche expérimentale

L'approche numérique est généralement considérée comme un complément à l'approche théorique et parfois comme pont entre l'approche théorique et expérimentale.

Chapitre I : interpolation polynomiale d'une fonction

1. Interpolation polynomiale

En physique numérique l'interpolation polynomiale est une technique d'interpolation d'un ensemble de donnée ou d'une fonction par polynôme .En autre terme, étant donnée un ensemble de point (par exemple à la suite d'une expérience).

On cherche un polynôme qui passe par tous les points. Etant donné un ensemble de n+1 points. On cherche un polynôme P de degré n qui vérifie :

$P(x_i) = y_i \,, i = 0, \dots, n.$

2. INTERPOLATION DE LAGRANGE

Théorème :

Etant données n+1 points $n_0, n_1, \dots . n_n$ et n+1 réel $y_0, y_1, y_2, \dots . y_n$

Il existe un polynôme $P \in P_n(\mathbb{R})$ et un seul tel que : $y_i = f(x_i)$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, L(x_i)$$

$$L(x_i) = \prod_{\substack{j \neq i \\ i=0}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Exemple :

Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 pour la fonction :

$f: n \to e^n$ Dans l'intervalle $[-1,1]$ avec les points d'interpolations $n_0 = -1, n_1 = 0, n_2 = 1$.

SOLUTION :

$n_0 = -1, n_1 = 0, n_2 = 1$

$$P(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{i=2} y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

x_i	$x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$
y_i	$y_0 = e^{-1}$	$y_1 = 0$	$y_2 = e$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = x^2 + 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x + 1)}{2}$$

$$P(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{i=2} y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = e^{-1} \times \frac{x(x - 1)}{2} + 0 \times (x^2 + 1) + e \times \frac{x(x + 1)}{2}$$

$P(x) = 0.542x^2 + 1.175x + 1$

3. Méthode de newton

Les polynômes $N_K(x)$ de la base de Newton sont définis comme suit :

$$\mathrm{N}_n(x) = \prod_{i=0}^{K-1} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{K-1}) \qquad K = 1, \ldots n$$

Avec :$N_0 = 1$

En outre

$N_1 = (x - x_0)$

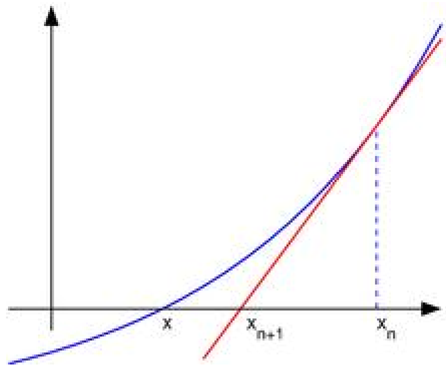
$N_2 = (x - x_0)(x - x_1)$

$N_3 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$\vdots$

$N_n = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$

L'ensemble forme une base de l'espace P_n des polynômes de degré au plus n, puisqu'il s'agit d'une famille de n+1 polynôme



Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $\{(x_0 - y_0), (x_1 -$ $y1,\ldots,(xn-yn)$s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{K=0}^{n} \alpha_K N_K(x)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Avec

$$P_n(x_i) = f(x_i), \forall\, i = 0, \ldots, n$$

Il faut alors déterminer les coefficients $(\alpha_K)_{0\leq K\leq n}$

DIFFERENCE DIVISEES

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n,$P_n(x)$ évalué en x_0 donne :

$$P_n(x_0) = \sum_{K=0}^{n} \alpha_K N_K(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

Dernière générale, on note

$$f[x_i] = f(x_i), \forall\, i = 0, \cdots, n$$

$f[x_0]$ est appelée différence divisée d'ordre 0

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n,$P_n(x)$ évalué en x_1 donne :

$$P_n(x) = \sum_{K=0}^{n} \alpha_n N_K(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = f[x_0] + \alpha_1(x_1 - x_0) = f[x_1]$$

D'où

$$\alpha_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_2} = f[x_0, x_1\,]$$

$f[x_0, x_1\,]$ *est appellée différence divisée d'ordre* 1

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré $n, P_n(x)$ évalué en x_2 donne :

$P_n(x) = \sum_{K=0}^{n} \alpha_n N_K(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 -$ *x0+α2x2−x0(x2−x1)=f[x2]*

on a alors :

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0) - f[x_1] + f[x_1]$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_1] + f[x_1] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_1] + (x_1 - x_0)f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_1] - (x_2 - x_0)f[x_0, x_1]$$

Donc

$$\alpha_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

$f[x_0, x_1, x_2]$ est appelée différence divisée d'ordre 2

On obtient alors par récurrence :

$$\alpha_K = \frac{f[x_1, \cdots, x_K] - f[x_0, \cdots, x_{K-1}]}{x_K - x_0} = f[x_0, \cdots, x_K]$$

$f[x_0, \cdots, x_K]$ est alors appelée différence divisée d'ordre K

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n s'écrit donc à l'aide des différences divisées successives :

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{K=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_K]\, N_K(x)$$

Exemple

Trouver le polynôme de newton de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Pour les points d'interpolations :$\boldsymbol{x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1}$

Solution

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0] = f[-1] = \frac{1}{2}$$

$$f[x_1] = f[0] = 1$$

$$f[x_2] = \frac{1}{2}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1}{2}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\frac{1}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)x$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

Nb :

Pour expliciter le processus récursif, les différences divisées peuvent être calculées en le disposant de la manière suivante dans un tableau :

x_0	$y_0 = [y_0]$	$[y_0, y_1]$		
x_1	$y_1 = [y_1]$	$[y_1, y_2]$	$[y_0, y_1, y_2]$	
x_2	$y_2 = [y_2]$	$[y_2, y_3]$	$[y_1, y_2, y_3]$	$[y_0, y_1, y_2, y_3]$
x_3	$y_3 = [y_3]$			

4. Interpolation polynomiale de Newton sur un pas constant : $h = x_n - x_{n-1}$

Une des premières formules d'interpolation, utilisée dès le 17e siècle, est la formule de Gregory Newton, l'interpolation est la technique d'estimation de la valeur d'une fonction pour toute valeur intermédiaire de la variable indépendante

❖ Les différences progressives(Forward Differences) :

la différence $y_1 - y_0, y_2 - y_1 \cdots y_n - y_{n-1}$ note par $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y \cdots$:

Forward difference table

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0					
		Δy_0				
x_1 $(= x_0 + h)$	y_1		$\Delta^2 y_0$			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2 $(= x_0 + 2h)$	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3 $= (x_0 + 3h)$	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
x_4 $= (x_0 + 4h)$	y_4		$\Delta^2 y_3$			
		Δy_4				
x_5 $= (x_0 + 5h)$	y_5					

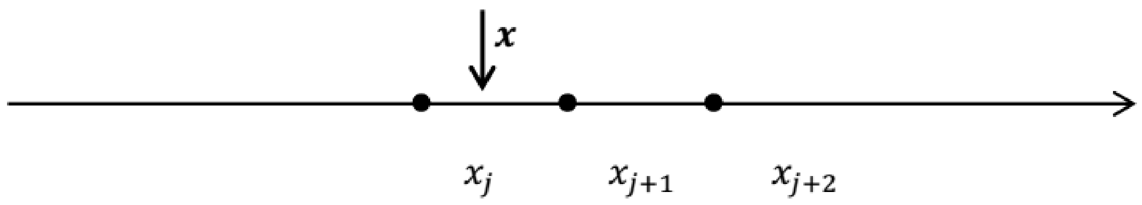
La formule de NEWTON'S GREGORY FORWARD INTERPOLATION (progréssive) :

$$f(a + hu) = f(a) + \frac{u}{1!}\Delta y + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y \cdots \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-(n-1))}{n!}$$

Cette formule est particulièrement utile pour interpoler les valeurs de f (x) près du début de l'ensemble de valeurs donné. h est appelé l'intervalle de différence et u = (x - a) / h, ici a est le premier terme.

$$\boldsymbol{h_1 = x_1 - x_0, h_2 = x_2 - x_1, \ldots}$$

Dans la formule progressive de Gregory-Newton on prend les points situés à droite du point considéré x_j



Pour calculer u :

u = (x - a) / h

$\boldsymbol{x_j < x < x_{j+1}}$

Donc $\boldsymbol{h = x_{j+1} - x_j}$

$$\boldsymbol{a = x_j}$$

Exemple :

Trouver la valeur de sin (47°) par la méthode NEWTON'S GREGORY FORWARD INTERPOLATION a partir des points d'interpolation suivants :

θ°	45°	50°	55°	60°
$sin\theta$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660

Solution :

$45° < x < 50°$

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$\Delta^2 y = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$	$\Delta^3 y = \Delta y_{n+1}^2 - \Delta y_n^2$
45°	0.7071			
50°	0.7660	0.0589		
55°	0.8192	0.0532	-0.0057	
60°	0.8660	0.0468	-0.0064	0.0007

$h = 50° - 45° = 5°$

$a = 50°$

$y = 0.7071, \Delta y = 0.0589, \Delta^2 y = -0.0057, \Delta^3 y = -0.0007$

$u = \frac{(x - a)}{h} = \frac{47 - 45}{5} = \frac{2}{5}$

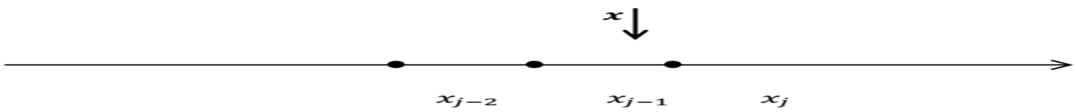
$$f(a + hu) = f(a) + \frac{u}{1!}\Delta y + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y$$

$$f\left(45 + \frac{2}{5} \times 5\right) = 0.7071 + \frac{2/5}{1!} \times (0.0589) + \frac{2/5(2/5-1)}{2!} \times (-0.0057) + \frac{2/5\,(2/5-1)(2/5-2)}{3!}(0.0007)$$

$f(47°) \approx 0.73$

❖ Les différences régressives(backward Differences) :

Dans la formule régressive de Gregory-Newton on prend les points situés à gauche du point considéré x_j



Backward difference table

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$	$\nabla^5 y$
x_0	y_0					
		∇y_1				
x_1 $(= x_0 + h)$	y_1		$\nabla^2 y_2$			
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$		
x_2 $(= x_0 + 2h)$	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$	
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$
x_3 $(= x_0 + 3h)$	y_3		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$	
		∇y_4		$\nabla^3 y_5$		
x_4 $(= x_0 + 4h)$	y_4		$\nabla^2 y_5$			
		∇y_5				
x_5 $(= x_0 + 5h)$	y_5					

NEWTON'S GREGORY BACKWARD INTERPOLATION FORMULA :

$$f(a + uh) = y + \frac{u}{1!}\nabla y + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y \cdots \frac{u(u+1)\cdots(u+(n-1)}{n!}$$

Exemple : Calculer sin(57°) à partir du tableau précédent.

Solution :

x	y	$\nabla y = y_n - y_{n-1}$	$\nabla^2 y = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$	$\nabla^3 y = \nabla y_n^2 - \nabla y_{n-1}^2$
45°	0.7071	0.0589	-0.0057	0.0007
50°	0.7660	0.0532	-0.0064	
55°	0.8192	0.0468		
60°	0.8660			

$h = 60° - 55° = 5°$

$a = 60°$

$y = 0.8660, \nabla y = 0.0468, \nabla^2 y = -0.0064, \nabla^3 y = 0.0007$

$$u = \frac{(x - a)}{h} = \frac{57 - 60}{5} = \frac{-3}{5}$$

$$f(a + uh) = y + \frac{u}{1!}\nabla y + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 y$$

$$f\left(55 - \frac{3}{5} \times 5\right) = 0.8660 + \frac{-3/5}{1!} \times 0.0468 + \frac{\left(-{}^3/_5\right)\left(\frac{-3}{5}+1\right)}{2!}(-0.0064) + \frac{\left(-{}^3/_5\right)\left(\frac{-3}{5}+1\right)\left(\frac{-3}{5}+2\right)}{3!}$$

$f(57°) = 0.83$

5. Les différences divisées de gauss régressives centrales et progressive centrales

Les polynômes d'interpolation progressive et régressive de Newton sont utilisés pour interpoler les valeurs de fonction au début ou à la fin des données respectivement. Nous voyons maintenant les formules de différence centrale qui conviennent le mieux à l'interpolation près du milieu d'un ensemble tabulé.

- Les différences divisées de gauss progressives centrées

Si x est situé au milieu de la table , on utilise la formule d'interpolation par les Différences centrées.

Si … . , $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ … ….sont des points d'interpolations avec une différence h correspondent aux points … , $y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2$ … ..alors que $f(x)$ être la fonction donnée par l'approximation suivante :

$$y_p = y_0 + p\,\Delta y_0 + \frac{p\,(p-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p\,(p-1)(p+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{p\,(p-1)(p+1)\,(p-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$p = \frac{x - x_0}{h}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$\vdots$	$\vdots$				
x_{-2}	y_{-2}				
		Δy_{-2}			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
$\boxed{x_0}$	y_0				$\Delta^4 y_{-2}$
			$\Delta^2 y_{-1}$		
x_1	y_1	Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
			$\Delta^2 y_0$		
x_2	y_2				
		Δy_{-1}			
$\vdots$	$\vdots$				

Tableau des différences divisées progressives centrées de gauss

- **Les différences divisées de gauss régressives centrées**

Si $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \ldots$ ….sont des points d'interpolations avec une différence h correspondent aux points $\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2 \ldots$ ..alors que $f(x)$ être la fonction donnée par l'approximation suivante :

$$y_p = y_0 + p\,\Delta y_{-1} + \frac{p\,(p+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p\,(p+1)(p-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{p\,(p+1)(p-1)\,(p+2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$p = \frac{x - x_0}{h}$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$\vdots$	$\vdots$				
x_{-2}	y_{-2}				
		Δy_{-2}			
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		
$\boxed{x_0}$	y_0	Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
			$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
x_1	y_1	Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
			$\Delta^2 y_0$		
x_2	y_2				
		Δy_{-1}			
$\vdots$	$\vdots$				

Tableau des différences divisées régressives centrées de gauss

Exemple :

Trouver la valeur de sin (56°) par la méthode d'interpolation de Gauss régressive et progressive a partir des points d'interpolation suivants :

θ°	45°	50°	55°	60°	65°
$sin\theta$	0.7071	0.7660	0.8192	0.8660	0.9063

Solution

x	y	$\Delta y = y_n - y_{n-1}$	$\Delta^2 y = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$	$\Delta^3 y = \nabla y_n^2 - \nabla y_{n-1}^2$	
45°	$0.7071 = y_{-2}$				
50°	$0.7660 = y_{-1}$	0.0589=Δy_{-2}	-0.0057= $\Delta^2 y_{-2}$		
55°	$0.8192 = y_0$	0.0532= Δy_{-1}	-0.0064= $\Delta^2 y_{-1}$	0.0007= $\Delta^3 y_{-2}$	-0.00060= $\Delta^4 y_{-2}$
60°	$0.8660 = y_1$	0.0468= Δy_0	-0.0065= $\Delta^2 y_0$	0.0001= $\Delta^3 y_{-1}$	
65°	$0.9063 = y_2$	0.0403= Δy_{-1}			

$$y_p = y_0 + p\,\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p(p-1)(p+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{p(p-1)(p+1)(p-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots$$

$$p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{56 - 55}{5} = \frac{1}{5}$$

$$f(56) = 0.8192 + \frac{1}{5} \times 0.0468 + \frac{1/5\,(1/5 - 1)}{2!} \times (-0.0064) + \frac{1/5\left(1/5 - 1\right)\left(1/5 + 1\right)}{3!} \times (0.0001) + \frac{1/5\left(1/5 - 1\right)(1/5 + 1)}{4!} \times (-0.0006)$$

$f(56) \approx 0.83$

x	y	$\Delta y = y_n - y_{n-1}$	$\Delta^2 y = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}$	$\Delta^3 y = \nabla y_n^2 - \nabla y_{n-1}^2$	
45°	$0.7071 = y_{-2}$	0.0589=Δy_{-2}			
50°	$0.7660 = y_{-1}$	0.0532= Δy_{-1}	-0.0057= $\Delta^2 y_{-2}$	0.0007= $\Delta^3 y_{-2}$	
55°	$0.8192 = y_0$	0.0468= Δy_0	-0.0064= $\Delta^2 y_{-1}$	0.0001= $\Delta^3 y_{-1}$	-0.00060= $\Delta^4 y_{-2}$
60°	$0.8660 = y_1$	0.0403= Δy_{-1}	-0.0065= $\Delta^2 y_0$		
65°	$0.9063 = y_2$				

$$y_p = y_0 + p\,\Delta y_{-1} + \frac{p(p+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p(p+1)(p-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{p(p+1)(p-1)(p+2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots$$

$$f(56) = 0.8192 + \frac{1}{5} \times 0.0532 + \frac{{}^1/_5\,({}^1/_5 - 1)}{2!} \times (-0.0064) + \frac{{}^1/_5\left({}^1/_5 - 1\right)\left({}^1/_5 + 1\right)}{3!} \times 0.0007 + \frac{{}^1/_5\left({}^1/_5 - 1\right)({}^1/_5 + 1)}{4!} \times (-0.0006)$$

$f(56) \approx 0.83$

- **Formule de stirling :**

$$\boldsymbol{y_p = y_0 + \frac{p}{1!}\left(\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2}\right) + \frac{p^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p(p^2-1)}{3!}\frac{(\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2})}{2} + \frac{p^2(p^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} \dots}$$

Exemple :

$$\boldsymbol{f(56) = 0.8192 + \frac{{}^1/_5}{1!}\left(\frac{0.0468 + 0.0532}{2}\right) + \frac{\left({}^1/_5\right)^2}{2!}(-0.0064) + \frac{{}^1/_5\left(\left({}^1/_5\right)^2 - 1\right)}{3!}\frac{(0.0001 + 0.0007)}{2} + \frac{\left({}^1/_5\right)^2\left(\left({}^1/_5\right)^2 - 1\right)}{4!}(-0.00060)}$$

$f(56) \approx 0.83$