CHAPITRE III

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

I. DÉFINITIONS

Référentiel galiléen :
Un référentiel galiléen, ou référentiel d'inertie, est un référentiel animé d'une vitesse constante (en module et en direction $\vec{V} = \text{constante}$) donc il ne subit aucune accélération.

Tout référentiel ayant un mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi un référentiel galiléen.

Principe d'inertie :
Si une particule est isolée (la résultante des actions extérieures qu'elle subit est nulle) alors elle garde une vitesse constante en module et en direction $\left(\vec{V} = \text{constante}\right)$ par rapport à un référentiel galiléen.

Remarque :
D'un point de vue purement théorique, l'existence d'un référentiel galiléen absolu ne peut être prouvée car il n'existe pas de point dans tout l'univers pour lequel nous pouvons affirmer qu'il est fixe ou en mouvement de translation uniforme si ce n'est par rapport à un autre point qui lui-même n'est pas assuré d'être fixe.
D'un autre coté, nous pouvons définir un référentiel galiléen comme un référentiel où le principe d'inertie est valable, or ce même principe est basé sur la constance de la vitesse d'un corps libre par rapport à un référentiel galiléen supposé.

En définitive, l'existence d'un référentiel galiléen (au moins un) est supposée vraie et non démontrée, elle fait partie avec le principe d'inertie – qui lui aussi n'est pas démontré – des postulats de départ de la mécanique classique.

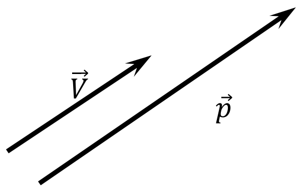
En pratique, certains référentiels sont considérés comme galiléens même s'ils ne le sont pas en toute rigueur.
C'est le cas pour le référentiel terrestre, la terre étant en mouvement de rotation autour d'elle-même (accélération normale de l'ordre de $0{,}034\ m/s^2$) et autour du soleil (révolution). Mais dans certains cas, les accélérations normales peuvent être négligées, le référentiel terrestre peut être assimilé à un référentiel galiléen.
Le référentiel géocentrique lié au centre de la terre et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines pouvant être considérées comme fixes, peut être considéré comme galiléen pour des expériences de durées très inférieures à la période de révolution de la terre, tout en négligeant l'accélération normale du mouvement de centre de masse de la terre (de l'ordre de $0{,}006\ m/s^2$).
Le référentiel héliocentrique (référentiel de Copernic) dont l'origine est confondue avec le centre de masse du soleil, ou bien encore, le référentiel de Kepler dont l'origine est placée au centre de masse du système solaire avec des axes orientés vers des étoiles lointaines fixes, constituent de meilleurs approximations pour un référentiel galiléen pour des expériences de durées inférieures à la durée de révolution du système solaire autour du centre de masse de la galaxie (accélération normale de l'ordre de $2 \times 10^{-10}\ m/s^2$).

II. QUANTITÉ DE MOUVEMENT

DÉFINITION

Nous appelons quantité de mouvement d'une particule de masse m et de vitesse $\vec{V}$ la grandeur :

$$\vec{p} = m.\vec{V}$$



D'où le nouvel énoncé du principe d'inertie : « Si une particule est isolée, alors elle se déplace avec une quantité de mouvement constante par rapport à un référentiel galiléen » et on note $\vec{p} = \text{constante}$.

CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

Si nous avons un système composé de N particules de masses m_i et de vitesses $\vec{V}_i$, alors la quantité de mouvement totale du système est donnée par :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N \qquad \text{ou} \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i.\vec{V}_i = m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 + \cdots + m_N.\vec{V}_N$$

Pour un système isolé cette quantité de mouvement est constante :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{Constante}$$

On dit que la quantité de mouvement est conservée.

Cas de deux particules en collision :

Soit un système de deux particules m_1 et m_2 .

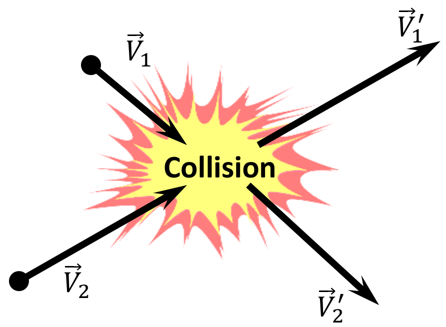
- Avant la collision les vitesses sont notées $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Après la collision les vitesses sont notées $\vec{V}_1'$ et $\vec{V}_2'$.

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Ou

$$m_1.\vec{V}_1 + m_2.\vec{V}_2 = m_1.\vec{V}_1' + m_2.\vec{V}_2'$$



Remarques :

- Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'a jamais été démontré théoriquement (c'est pour cela que nous l'appelons « principe »), mais il a été toujours vérifié expérimentalement.

- En réalité nous ne pourrons jamais trouver de système parfaitement isolés, mais si les forces extérieures sont négligeables par rapport aux interactions internes dans le système alors nous pourrons considérer le système comme *quasi-isolé*.

III. LOIS DE NEWTON

Puisqu'une particule qui ne subit aucune action extérieure (isolée) garde une quantité de mouvement constante, alors, si en observant une particule on remarque que sa quantité de mouvement change, on peut en déduire que cette même particule subit une action extérieur (n'est pas isolée). Et il est évident que cette action est d'autant plus forte quand la quantité de mouvement change dans un intervalle de temps de plus en plus petit.

D'où la définition d'une action mécanique, donnée par Newton et qu'il appelle « ***Force*** ».

- La force moyenne que subit une particule pendant un intervalle de temps Δt est égale à la variation du vecteur quantité de mouvement divisé par Δt :

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

- La force instantanée est donc donnée par la dérivée du vecteur quantité de mouvement par rapport au temps :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

D'où les trois lois de Newton :

Première loi Newton : C'est une autre formulation du principe d'inertie.
« Toute particule qui se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen ne subit aucune force extérieure »

$$\vec{p} = \text{Constante} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Deuxième loi de Newton : Ou Principe Fondamental de la Dynamique.
Pour un corps ayant une masse constante on a :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m.\vec{a}$$

Dans le cas où on aurait plusieurs forces, $\vec{F}$ est la résultante de toutes ces forces.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f_i} = m.\vec{a}$$

Troisième loi de Newton : Principe de l'action et de la réaction
Pour un système composé de deux particules isolée, nous écrivons la conservation de la quantité de mouvement totale.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps on trouve :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

$\vec{F}_{1/2}$ est la force appliquée à la particule 1 par la particule 2.
$\vec{F}_{2/1}$ est la force appliquée à la particule 2 par la particule 1.

Donc, dans un système isolé, la force qui s'exerce sur une particule est égale en module et de sens opposé à la force sur l'autre.

Remarque :
Les lois de Newton sont valables dans n'importe quel référentiel galiléen. En effet, la relation entre les accélérations dans deux référentiels galiléens (ayant des mouvements de translations uniformes l'un par rapport à l'autre) est donnée par :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Où

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\right)$$ Accélération d'entraînement

$$\vec{a}_c = 2.\vec{\omega} \times \vec{V}'$$ Accélération de Coriolis

$$\vec{\omega}$$ Vitesse angulaire de rotation des axes

Si les deux repères sont en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre alors

$$\vec{a}_e = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_c = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}' \quad \text{et} \quad \vec{F} = \vec{F}' = m.\vec{a}$$

Donc, deux observateurs placés dans les deux référentiels galiléens trouverons la même résultante des forces et pourrons écrire la même relation.

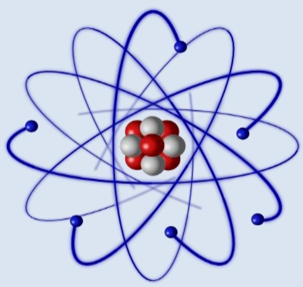
On dit alors que *le PFD est une loi de la nature ou que le PFD est une loi universelle*. Indépendante du référentiel (galiléen) où on se place.

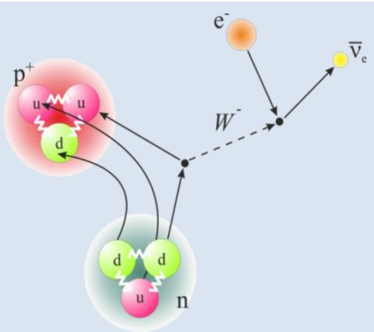
IV. LOIS DE FORCES

INTÉRACTIONS FONDAMENTALES

Interaction gravitationnelle
Elle apparait entre les corps ayant une masse. Attraction et mouvement des planètes, attraction terrestre.

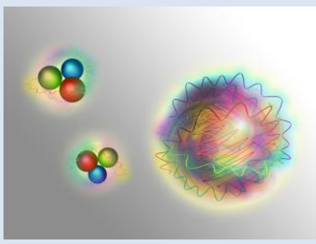
Interaction électromagnétique
Elle apparait entre les corps portant une charge électrique. Force de Lorentz, frottements, forces de contacts, liaisons atomiques, interactions intermoléculaires.





Interaction nucléaire faible
Réactions entres particules élémentaires.

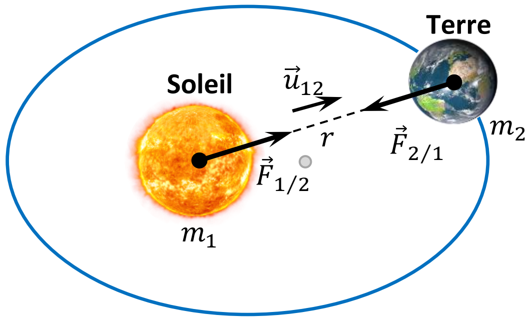
Interaction nucléaire forte
Elle apparait entre les corps portant une charge de couleur (quarks). Responsable de la cohésion du noyau.



FORCE GRAVITATIONNELLE

Loi d'attraction universelle :

D'après des observations astronomiques (orbites des satellites, lois de Kepler et de Tycho Brahé), Newton démontre notamment que : pour qu'une planète puisse décrire une trajectoire elliptique où le soleil constitue un des deux foyers, la force d'attraction entre la planète et le soleil doit être inversement proportionnelle à la distance entre les deux corps. Cette force est d'autant plus grande quand la masse de la planète est élevée.



Trajectoire (ellipse)

De plus, en utilisant le principe de l'action et de la réaction pour une planète et le soleil, Newton donne l'expression de la « *force d'attraction universelle* » entre deux masses (considérée comme ponctuelles) m_1 et m_2, séparés par une distance r, par la loi :

$$F = G\frac{m_1.m_2}{r^2}$$

Où $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ est une constante universelle.

Cette constante à été calculée expérimentalement pour la première fois par Cavendish en utilisant un pendule de torsion, dans le but de calculer la masse de la terre ($m_T \approx 6 \times 10^{24}\, kg$).

Expression vectorielle :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = -G\frac{m_1.m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

$\vec{F}_{1/2}$: Force d'attraction appliquée par la masse m_1 sur la masse m_2.

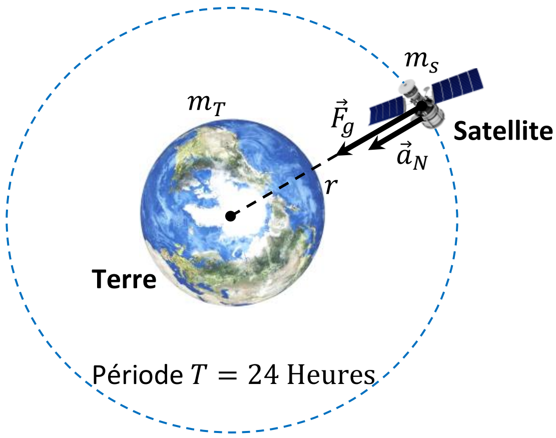
$\vec{F}_{2/1}$: Force d'attraction appliquée par la masse m_2 sur la masse m_1.

$\vec{u}_{12}$: Vecteur unitaire dans la direction de r et dirigé de m_1 vers m_2.

Exemple : *Mouvement d'un satellite autours de la terre – satellite géostationnaire :*

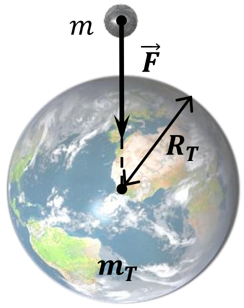
Soit un satellite de masse m qui décrit autours de la terre un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω et de rayon r.

Pour que le satellite soit géostationnaire (toujours au dessus du même point géographique) il faut lui donner une période de rotation égale à celle de la terre $T = 24$ Heures. D'où :
$r = 4{,}22 \times 10^7\, m$ et sa vitesse est $V = 3{,}08 \times 10^8\, m/s$.



Trajectoire circulaire

Cas au voisinage de la terre : (Poids d'un corps)



Au voisinage de la terre la loi d'attraction universelle entre un corps de masse m et la terre (de masse m_T et de rayon R_T) s'écrit :

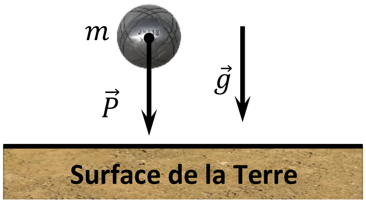
$$F = G\frac{m_T . m}{R_T^2}$$

On pose $g = G\frac{m_T}{R_T^2}$ d'où le force devient : $F = m.g$

C'est le poids d'un corps au voisinage de la terre $P = m.g$

Comme $(m_T = 5{,}9742 \times 10^{24}\ kg\ ;\ R_T = 6{,}371 \times 10^6\ m)$ on trouve :

$$g = 9{,}82\ m/s^2$$



Puisque la force est radiale elle est donc toujours perpendiculaire à la surface de terre. D'où $\vec{P}$ est toujours dirigé suivant la verticale (voir figure).

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

Exemple : *Projectile.*

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique

$$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

En projetant sur les axes (Ox) et (Oy) :

$$a_x = 0 \quad \text{et} \quad a_y = -g$$

Les équations horaires sont obtenues par intégration :

$$\begin{cases} V_x = V_{0x} = V_0.\cos\alpha \\ V_y = -g.t + V_{0y} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = (V_0.\cos\alpha).t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (V_0.\sin\alpha).t \end{cases}$$

Equation de la trajectoire $\big(y = f(x)\big)$:

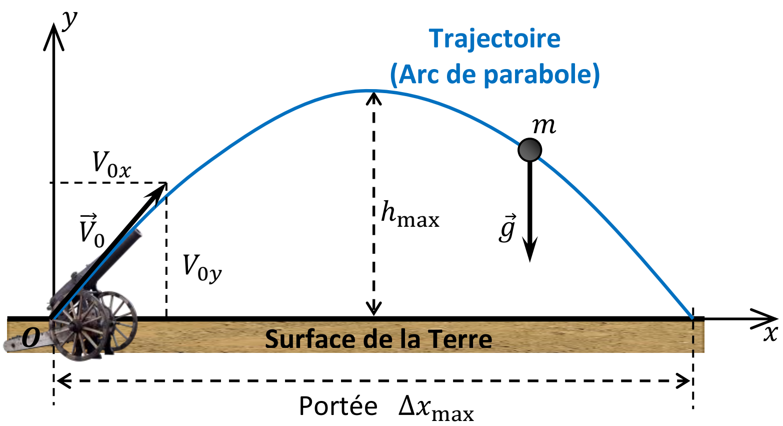
$$y(x) = -\frac{g}{2(V_0.\cos\alpha)^2}x^2 + (\tan\alpha).x$$

Le point le plus haut $\big(V_y = 0\big)$:

$$h_{\max} = \frac{(V_0.\sin\alpha)^2}{2g}$$

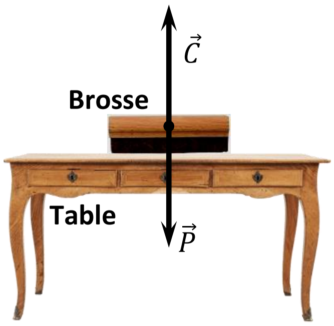
La portée $(y = 0)$:

$$\Delta x_{\max} = \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$



FORCES DE CONTACTS

- *Elles s'exercent entre deux surfaces matérielles en contact.*
- C'est une force d'origine électrique (répulsion entre électrons périphériques des atomes extérieurs des surfaces + principe d'exclusion de Pauli)
- *Elle est toujours perpendiculaire aux surfaces en contact.*



Cas statique :

Exemple : *Brosse posée sur une table.* $\vec{C} + \vec{P} = \vec{0}$

Remarque :

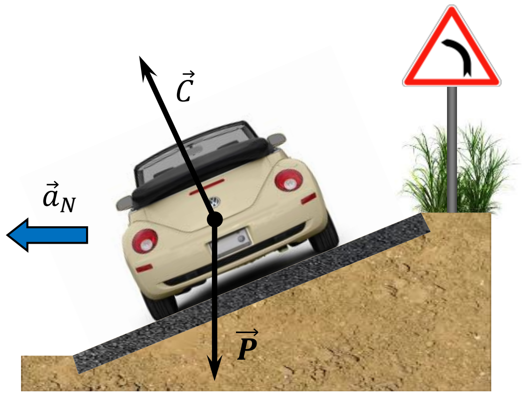
$\vec{C}$ n'est pas la réaction à $\vec{P}$ bien quelle soit du même module et de direction opposée à cette dernière (ce qui n'est pas toujours le cas, nous le verrons dans les exemples suivants). Par contre $\vec{C}$ est la *réaction à la force de contact appliquée par la* brosse sur la table que nous pourrons noter $\vec{C}'$. La réaction au poids $\vec{P}$ est *l'attraction de la terre par la brosse* notée $\vec{P}'$.

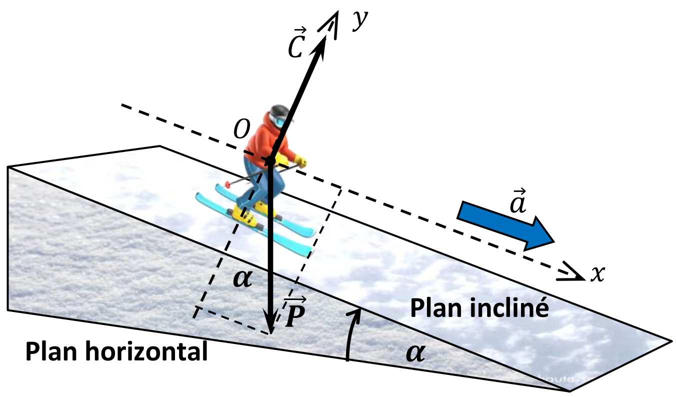
Cas dynamique :

Exemple 1 : *Plan incliné sans frottements.* $\vec{C} + \vec{P} = m.\vec{a}$

En projetant sur l'axe du mouvement rectiligne : $a = g.\sin\alpha$

En projetant sur l'axe perpendiculaire au mouvement rectiligne : $C = mg.\cos\alpha$





Exemple 2 : *Voiture dans un virage relevé.* $\vec{C} + \vec{P} = m.\vec{a} = m.\vec{a}_N$

En projetant sur l'axe normal au mouvement : $C.\sin\alpha = m.a_N$

En projetant sur l'axe vertical : $C.\cos\alpha = mg$

Donc

$$\tan\alpha = \frac{a_N}{g}$$

C'est l'angle d'inclinaison de la route nécessaire pour éviter les dérapages (glissement).

FORCES DE FROTTEMENTS

Frottements Solide–Solide :

- Elle s'exerce entre deux surfaces matérielles en contact et en mouvement l'une par rapport à l'autre.
- Elle est d'origine électrique : Forces d'attractions entre les atomes périphériques des deux surfaces (forces de Van Der Walls)

La force de frottement entre deux solides indéformables est proportionnelle à la force normale aux surfaces en contact, elle dépend aussi de la nature des surfaces, donc, on peut écrire :

$$F_f = \mu . C$$

Tel que, μ est un facteur qui dépend de la nature des surfaces. Il est appelé coefficient de frottement et il n'a pas d'unité.
C est la force normale aux surfaces (force de contact).

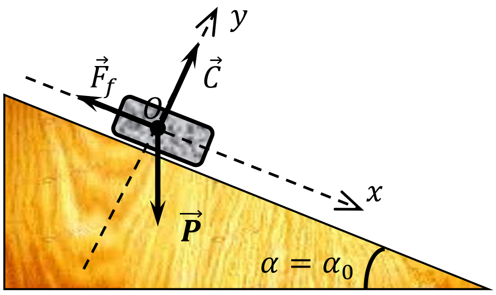
Remarque :

- La force de frottement ne dépend ni de l'aire des surfaces en frottement ni de leur forme.
- La force de frottement est toujours parallèle aux surfaces en contact et opposée au sens du mouvement.

Détermination du coefficient de frottement à l'aide d'un plan incliné :

On met une brosse sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal. On augmente l'angle α de façon infiniment lente à partir de 0. Quand on arrive à un certain angle la brosse commence à se déplacer dans ce cas on a $\sum \vec{f} = m.\vec{a}$ et on dit que l'équilibre des forces a été rompu. Si on considère la valeur de $(\alpha = \alpha_0)$ juste avant la rupture de l'équilibre, dans ce cas la brosse ne bouge pas et las forces qui lui sont appliquée sont en équilibre, alors on peut écrire :

$$\sum \vec{f} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_f = \vec{0}$$



En projetant sur l'axe parallèle à la surface de contact (Ox) et sur l'axe normal à la surface (Oy) :

$$\begin{cases} F_f = mg.\sin\alpha_0 \\ C = mg.\cos\alpha_0 \end{cases}$$

En divisant, il vient que

$$\mu = \frac{F_f}{C} = \tan\alpha_0$$

Remarque concernant le coefficient de frottement :

Dans la pratique (pour les ingénieurs) on distingue entre le coefficient de frottement statique μ_s (comme il est calculé plus haut) et le coefficient de frottement dynamique μ_g (calculé à partir du mouvement par la connaissance de a). Les valeurs de μ_s et de μ_g sont plus ou moins différentes suivant les matériaux en contact. Elles sont données par des tables d'ingénieurs. Mais d'un point de vue théorique rien ne permet de faire cette distinction (voir Les cours de physique de Feynman – Mécanique 01, page 163, Inter-édition 1982).

Frottements Solide–Fluide :

Un corps solide qui se déplace dans un fluide visqueux subit une force de frottement (résistance au mouvement) qui a les caractéristiques suivantes :

- Sa direction est parallèle à la direction du mouvement.
- Son sens est opposé au mouvement.
- Son module est proportionnel à : la vitesse du solide, sa forme et la viscosité du milieu.

La force de frottement d'un solide se déplaçant avec une vitesse $\vec{V}$ dans un fluide est donnée par la ***formule empirique*** suivante :

$$\vec{F}_f = -k\eta.\vec{V}$$

η est le coefficient de viscosité du milieu fluide.
k est un facteur exprimant la forme du corps solide.

Pour un ***corps solide sphérique*** de rayon R, $k = 6\pi.R$ et la force de frottement est appelée ***force de Stockes***

$$\vec{F}_f = -6\pi.R\eta.\vec{V}$$

Exemple : *Chute verticale d'un corps dans un fluide visqueux.*

Le Principe Fondamentale de la Dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{F}_f = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad mg - k\eta.V = m\frac{dV}{dt}$$

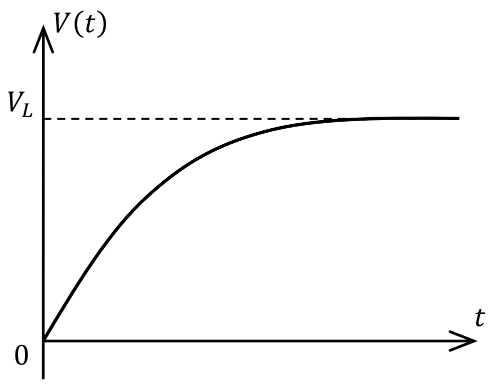
Equation différentielle du 1er ordre de la fonction $V(t)$.

L'intégration et les conditions initiales (vitesse initiale nulle) donnent :

$$V(t) = \frac{mg}{k\eta}\left(1 - e^{-\frac{k\eta}{m}t}\right)$$

La vitesse limite ($t \to +\infty$) :

$$V_L = \frac{mg}{k\eta}$$



Remarque :

1. Parfois on trouve la force de frottement sous la forme $\vec{F}_f = -K.\vec{V}$ avec $K = k\eta$.
2. La loi empirique précédente n'est valable que pour des vitesses réduites (quelques mètres par secondes), pour des vitesses plus grandes (quelques dizaines de mètre par secondes) l'expérience montre que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :
$$\vec{F}_f = -K.V^2.\vec{e}_T$$
3. Pour des vitesses encore plus grandes on adopte une loi sous la forme :
$$\vec{F}_f = -K.V^n.\vec{e}_T \qquad \text{avec} \qquad n \geq 2$$
4. L'origine de la force de frottement visqueux est électromagnétique. Elle est due, en premier lieu, aux collisions du corps solide avec les molécules du milieu visqueux (Voir : Théorie cinétique des gaz).

FORCES ÉLASTIQUES

Question : Quelle est l'expression de la force qui nous donne un mouvement sinusoïdal ?

Réponse : Si le mouvement est sinusoïdal alors :

$$\begin{cases} x(t) = x_0.\sin(\omega.t + \varphi) \\ V(t) = \omega.x_0.\cos(\omega.t + \varphi) \\ a(t) = -\omega^2 x_0.\sin(\omega.t + \varphi) = -\omega^2.x(t) \end{cases}$$

Et puisque :

$$F = m.a = -m\omega^2.x(t)$$

Donc

$$\vec{F}_{\text{élast}} = -k.\vec{x}$$

C'est l'expression de la force dite « élastique ».

k est appelé constante d'élasticité ou constante de raideur ($k > 0$). (Unité [MKSA] : N/m)

- La force élastique est toujours parallèle et de sens opposée à l'élongation. (origine des espaces est le point matériel quand le ressort est au repos)
- L'origine de la force élastique est électromagnétique (Liaison entre les atomes à l'intérieur du corps élastique)

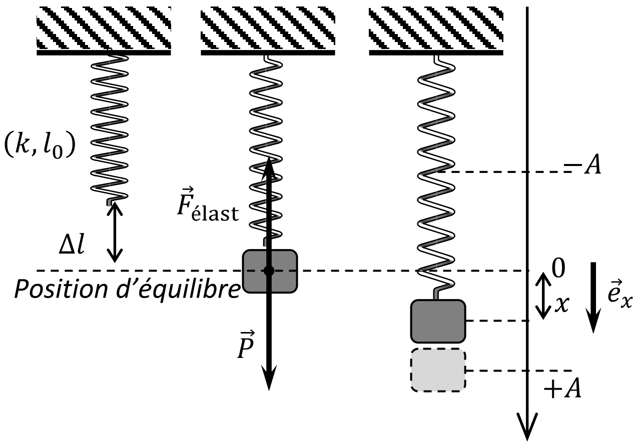
Calcul de constante de raideur :

<u>Détermination statique :</u> On accroche une masse m au bout d'un ressort en position vertical. Pour un système en équilibre

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

<u>Détermination dynamique :</u> Dans le cas d'un mouvement oscillatoire de période T.

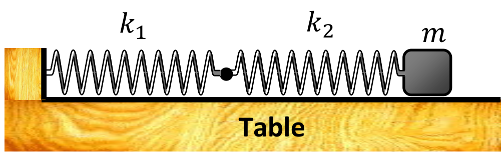
$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$



Association de ressorts :

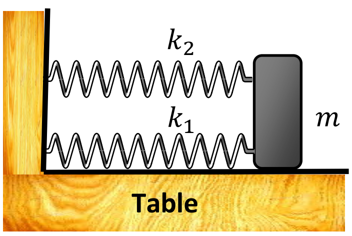
En série : (F est la même et $\Delta l = \sum \Delta l_i$)

$$\frac{1}{k} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$



En parallèle : (Δl est la même et $F = \sum F_i$)

$$k = \sum_i k_i$$

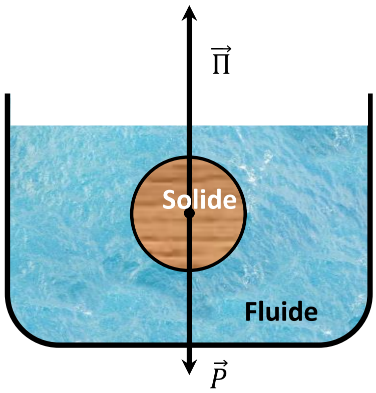


POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

« Si un corps solide est plongé dans un fluide au repos et soumis au champ gravitationnel terrestre, alors le corps en question subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale en module au poids du volume de fluide déplacé ».

Cette force est appelée poussée d'Archimède, en référence au savant grec Archimède (de 285 à 215 av. J.-C.) qui l'a formulé. Elle est due à la différence de pression entre la partie inférieure et la partie supérieure du corps.

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}}.\tau.\vec{g}$$



Où

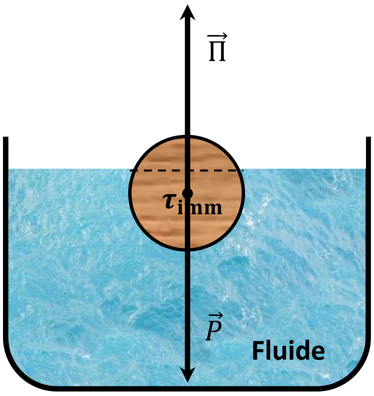
$\rho_{\text{fluide}} = m_{\text{fluide}}/\tau$ est le densité volumique de masse du fluide.
τ volume du fluide déplacé.

Dans le cas d'un corps complètement immergé dans le fluide (voir la figure ci-contre). Le volume du fluide déplacé est égal au volume du solide. Dans ce cas le poids et la poussée d'Archimède peuvent être regroupés en une seule expression appelée ***poids apparent***.

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = (\rho_{\text{solide}} - \rho_{\text{fluide}}).\tau.\vec{g}$$

Condition de flottabilité

Si $\rho_{\text{solide}} > \rho_{\text{fluide}}$ le corps descend vers le bas (il coule) et sa flottabilité est négative.
Si $\rho_{\text{solide}} < \rho_{\text{fluide}}$ le corps monte vers le haut (il flotte) et sa flottabilité est positive.
Si $\rho_{\text{solide}} = \rho_{\text{fluide}}$ le corps est en équilibre dans le fluide et sa flottabilité est nulle.



Si le corps est immergé en partie, la poussée d'Archimède varie avec la profondeur d'immersion. La condition de flottabilité s'écrit

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$$

Donc

$$\rho_{\text{fluide}}.\tau_{\text{imm}} = m$$

τ_{imm} étant le volume immergé du solide et m sa masse.

PSEUDO-FORCES OU FORCES D'INÉRTIE

On a vu que le principe fondamental de la dynamique est une loi universelle, c'est-à-dire, quelle est valable dans n'importe quel référentiel galiléen. Que devient alors cette loi dans un référentiel non galiléen ?

$(Oxyz)$ Référentiel galiléen : $\vec{F} = m.\vec{a}$
$(O'x'y'z')$ Référentiel non galiléen : $\vec{F} + \vec{F_i} = m.\vec{a}'$

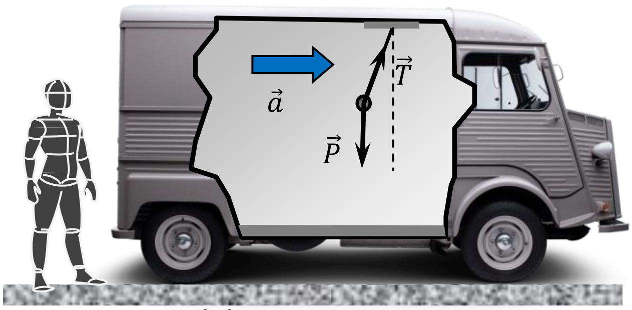
Mais puisque $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ donc $\vec{a}' = \vec{a} - (\vec{a}_e + \vec{a}_c)$
On a :

$$\vec{F_i} = -m.(\vec{a}_e + \vec{a}_c)$$

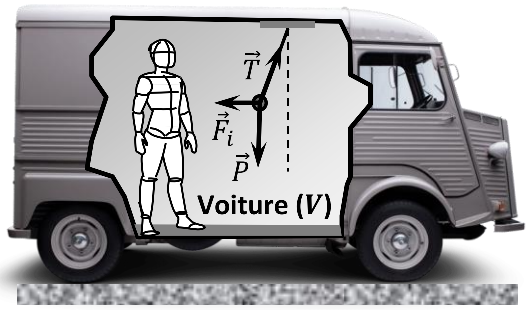
Remarque :
La force d'inertie $\vec{F_i}$ est non matérielle. Elle n'apparait que dans un repère non galiléen.

Exemples :
Pendule dans une voiture en mouvement de translation.

- Référentiel de la terre (T)= référentiel galiléen.
- Référentiel de la voiture (V)= référentiel non galiléen.



Terre (T)

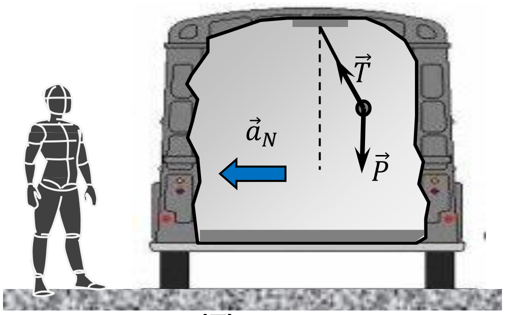


PFD dans le référentiel de la terre (T) :
$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$$

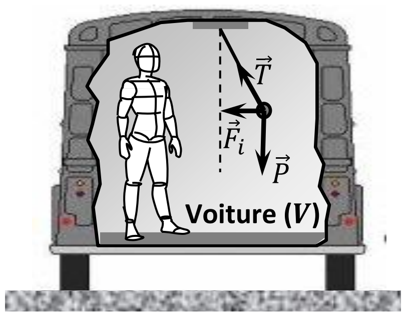
PFD dans le référentiel de la voiture (V) :
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\vec{F_i} = -m.\vec{a}$$

Pendule dans une voiture en mouvement de rotation uniforme (virage).



Terre (T)



PFD dans le référentiel de la terre (T) :
$$\vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_N$$

PFD dans le référentiel de la voiture (V) :
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}' = \vec{0}$$

$$\vec{F_i} = -m.\vec{a}_N$$

V. MOMENT CINÉTIQUE

INTRODUCTION A LA NOTION DE MOMENT DE FORCE

Mise en situation cas statique

Dans le cas d'un mouvement de rotation la position d'équilibre ou le cas statique ne dépend pas uniquement des forces. Un autre paramètre est à prendre en compte, qui est la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation.

Dans les trois figures ci-contre, l'axe de rotation est perpendiculaire au plan du dessin (la feuille) et passe par le point O.

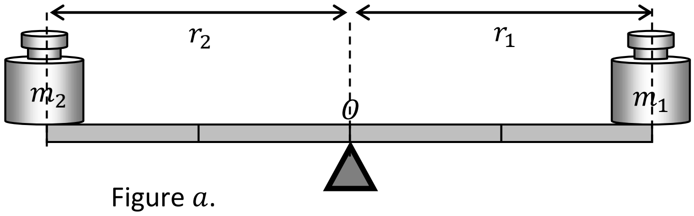


Figure a.

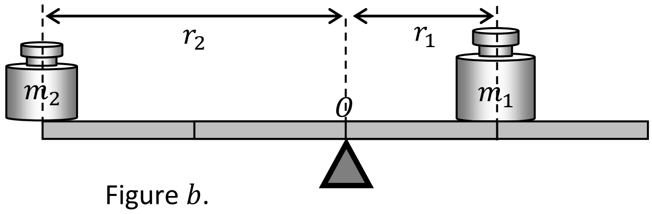


Figure b.

Dans la figure a. l'équilibre est obtenu car les deux corps ont la même masse $m_1 = m_2$ et sont à égale distance de l'axe de rotation $r_1 = r_2$.

Nous pouvons tout aussi bien obtenir l'équilibre dans la figure b . où la masse $m_1 = 2m_2$ est deux fois plus grande que la masse m_2 mais en même temps la distance $r_2 = 2r_1$ est deux fois pus grande que la distance r_1.

Dans le cas général, l'équilibre statique est obtenu si la condition $m_1.r_1 = m_2.r_2$ est réalisée (figure c.)

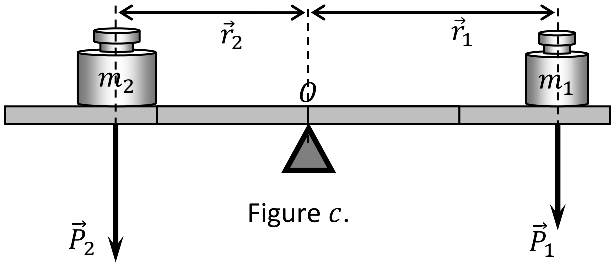


Figure c.

En utilisant les forces (les poids) nous pouvons écrire la condition d'équilibre statique

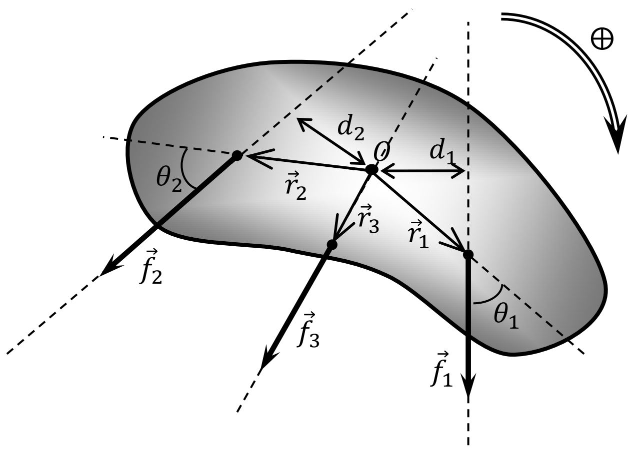
$$P_1.r_1 = P_2.r_2$$

Ou vectoriellement, ce qui nous permettra par la suite d'introduire la notion de vecteur moment de force

$$\vec{P}_1 \times \vec{r}_1 = -\vec{P}_2 \times \vec{r}_2$$

Moment de force, bras de levier d'une force

Une généralisation de la loi précédente dans le cas statique, consiste à prendre un corps solide indéformable quelconque pouvant tourner dans le plan, comme le montre la figure ci-contre. L'axe de rotation est dans ce cas la droite perpendiculaire au plan de rotation et passant par le point O reste invariant lors de la rotation du solide.



Les forces $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ sont appliquées respectivement aux points M_1, M_2, M_3, et nous notons les vecteurs

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1},\ \ \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2},\ \ \vec{r}_3 = \overrightarrow{OM_3}$$

La condition d'équilibre statique s'écrit alors

$$\sum_i \vec{f}_i \times \vec{r}_i = \vec{f}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{f}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{f}_3 \times \vec{r}_3 = \vec{0}$$

Si nous voulons écrire la relation entre les modules, nous choisissons d'abord un sens positif pour la rotation, *ce choix est arbitraire*. Nous remarquons alors les trois cas de figures suivants

- La force $\vec{f}_1$ fait tourner le corps solide dans le sens positif.
- La force $\vec{f}_2$ fait tourner le corps solide dans le sens négatif.
- La force $\vec{f}_3$ ne peut pas faire tourner le corps solide.

Donc, nous écrivons

$$f_1.r_1.\sin\theta_1 - f_2.r_2.\sin\theta_2 + f_3.r_3.\sin 0 = 0$$

Ou bien

$$f_1.d_1 - f_2.d_2 + f_3.0 = 0$$

Tel que

$$d_1 = r_1.\sin\theta_1 \quad ; \quad d_2 = r_2.\sin\theta_2 \quad ; \quad d_3 = r_3.\sin 0 = 0$$

Sont les bras de levier des forces respectives $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

La définition du bras de levier d'une force étant la distance entre la droite portant la force et l'axe de rotation.

Conclusion :

Nous appelons vecteur moment de la force $\vec{f}_i$ la ***grandeur vectorielle***

$$\vec{M}(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \times \vec{r}_i$$

Tel que $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ est la position du point d'application de la force $\vec{f}_i$ par rapport au point O par lequel passe l'axe de rotation.

Le module du moment de force s'écrit

$$M(\vec{f}_i) = f_i.d_i = f_i.r_i.\sin\theta_i$$

$d_i = r_i.\sin\theta_i$ est la distance entre la droite portant la force et l'axe de rotation appelé bras de force.

La condition d'équilibre statique s'écrit vectoriellement

$$\sum_i \vec{M}(\vec{f}_i) = \sum_i \vec{f}_i \times \vec{r}_i = \vec{0}$$

Et en valeurs algébriques

$$\sum_i M(\vec{f}_i) = \sum_i f_i.d_i = 0$$

Les moments de forces qui font tourner le solide dans le sens positif (choisi arbitrairement) sont comptés positivement et les moments des forces qui font tourner le solide dans le sens opposé sont comptés négativement.

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN POINT MATÉRIEL

Définition du moment cinétique :

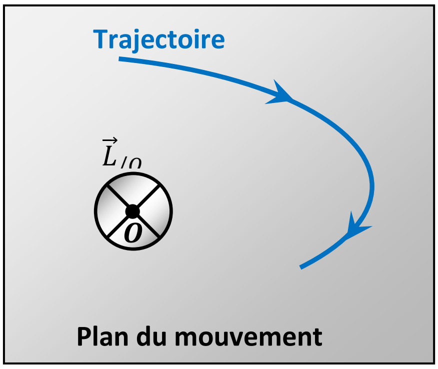
Soit une particule de masse m ayant un vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et une vitesse $\vec{V}$.
Le *vecteur moment cinétique* par rapport au point O est définit par :

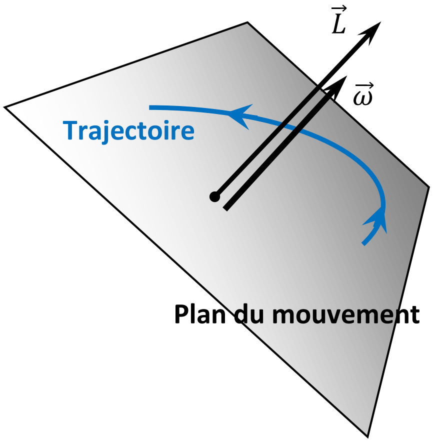
$$\vec{L}_{/O} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m.\vec{r} \times \vec{V} \qquad (1)$$

Propriétés :

$\vec{L}_{/O}$	Module : $L = mr.V.\sin\phi$ tel que ϕ est l'angle $(\vec{r}, \vec{V})$.
	Direction : perpendiculaire au plan du mouvement (plan $(\vec{r}, \vec{V})$).
	Sens : donné par la règle de la main droite (en suivant le sens du mouvement).

L'unité du moment cinétique dans le système [MKSA] est : $kg.m^2.s^{-1}$





Moment cinétique en fonction du vecteur vitesse angulaire :

Soit un point matériel se déplaçant dans le plan (Oxy). En utilisant les coordonnées polaires, on a : $\vec{r} = r.\vec{e}_r$ et $\vec{V} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta$.

Mais puisque : $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = \vec{0}$ et $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$. On a alors :

$$\vec{L} = m.r^2\vec{\omega} \qquad (2)$$

Tel que

$$\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_z$$

Est le *vecteur vitesse angulaire*.

Propriétés du vecteur vitesse angulaire :

$\vec{\omega} = \theta^{\bullet}.\vec{e}_z$	Module : $\omega = \lvert\theta^{\bullet}\rvert$
	Direction : perpendiculaire au plan du mouvement.
	Sens : donné par la règle de la main droite (en suivant le sens du mouvement).

Théorème du moment cinétique (dans le cas d'un mouvement circulaire) :

Si le mouvement est circulaire, alors $r = R = \text{constante}$.

Dérivons l'équation (1) :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V} + \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt}\right) = m(\vec{V} \times \vec{V} + \vec{r} \times \vec{a})$$

Comme $\vec{V} \times \vec{V} = \vec{0}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3)$$

Avec, le vecteur moment de force par rapport au point O.

	Module : $M(\vec{F}) = r.F.\sin\alpha$ tel que α est l'angle $(\vec{r}, \vec{F})$.
$\vec{M}_{/O} = \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$	Direction : perpendiculaire à $\vec{r}$ et à $\vec{F}$.
	Sens : donné par la règle de la main droite.

Dérivons l'équation (2) : Dans le cas d'un mouvement circulaire $r = R = \text{constante}$.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m.R^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = m.R^2 \vec{\gamma} \qquad (4)$$

Avec, le vecteur accélération angulaire.

	Module : $\gamma = \lvert\theta^{\bullet\bullet}\rvert$
$\vec{\gamma} = \theta^{\bullet\bullet}.\vec{e}_z$	Direction : perpendiculaire au plan de rotation.
	Sens : donné par le signe de $\theta^{\bullet\bullet}$.

Enfin en comparant les équations (3) et (4) on obtient le ***théorème du moment cinétique*** sous la forme :

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = I.\vec{\gamma}$$

$$I_{/O} = I = m.R^2$$

$I_{/O}$ est le moment d'inertie du point matériel en rotation par rapport au point O (unité dans le système $[\text{MKSA}] = kg.m^2$)

Remarque 1 :

Dans l'expression du moment de force représente la résultante de toutes les forces. Il est clair que le moment de cette résultante est égal à résultante de tous les moments :

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{M}\left(\sum_i \vec{f}_i\right) = \vec{r} \times \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{f}_i = \sum_i \vec{M}(\vec{f}_i)$$

On peut alors réécrire le théorème du moment cinétique sous la forme.

$$\sum_i \vec{M}(\vec{f}_i) = I.\vec{\gamma}$$

Remarque 2 :

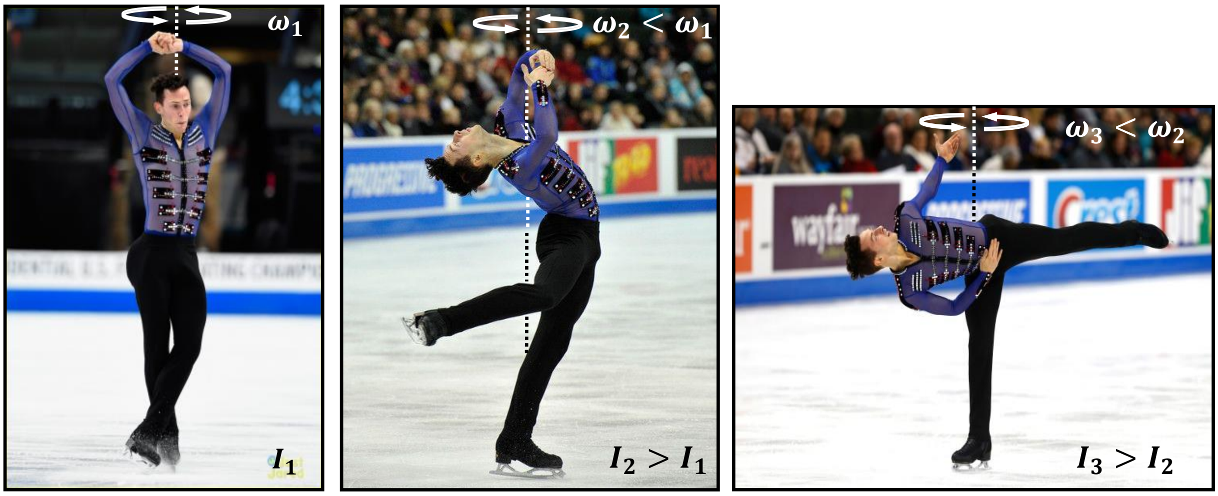
Dans le cas d'une force centrale (dirigée vers l'origine) $\vec{F}$ est parallèle à $\vec{r}$.

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{Constante}$$

Remarque 3 :

Le moment d'inertie représente la résistance du corps à son propre mouvement de rotation. En effet, pour une force constante plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire est faible (exemple du patineur figure ci-dessous).

De la même manière *la masse m représente la résistance du corps à son propre mouvement de translation*. En effet, pour une force constante plus la masse est grande, plus l'accélération est faible. C'est pour cette raison que la masse est aussi appelée masse d'inertie.



THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE POUR UN SOLIDE INDÉFORMABLE

Dans le cas de la rotation d'un solide indéformable autour d'un axe (Δ) (de symétrie) ***passant par son centre de masse***, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\sum \vec{M}(\vec{f}_i) = I_{(\Delta)}.\vec{\gamma}$$

Où $I_{(\Delta)}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ).

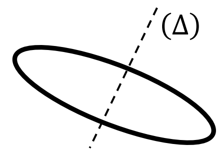
***Théorème de* Huygens :**

Le moment d'inertie d'un solide indéformable de masse m par rapport à un axe (Δ') ***parallèle*** à un axe de symétrie (Δ) *passant par son centre de symétrie* est donné par :

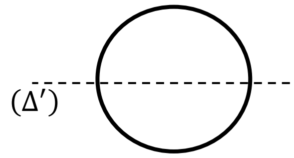
$$I_{(\Delta')} = I_{(\Delta)} + m.D^2$$

Tel que $D = \text{distance}\left(I_{(\Delta)}, I_{(\Delta')}\right)$ est la distance séparant les deux axes parallèles.

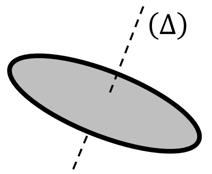
Moment d'inertie pour quelques solides usuels :



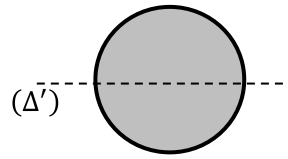
Anneau (M, R) : $I_{(\Delta)} = M.R^2$



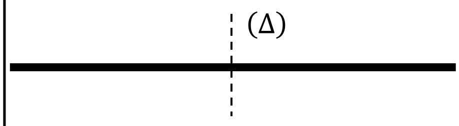
Anneau (M, R) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{2}M.R^2$



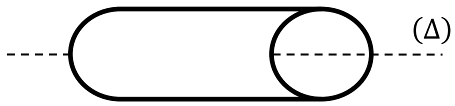
Disque (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2}M.R^2$



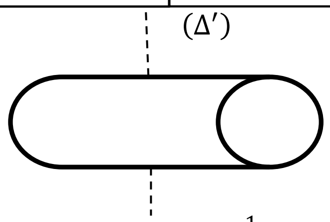
Disque (M, R) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{4}M.R^2$



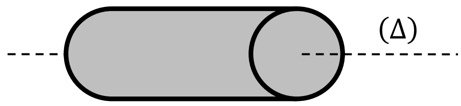
Tige (M, L) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{12}M.L^2$



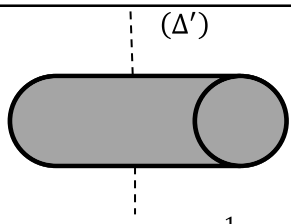
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta)} = M.R^2$



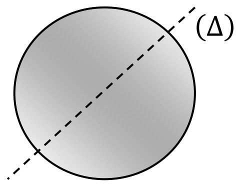
Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{2}M.R^2 + \frac{1}{12}M.L^2$



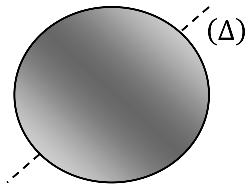
Cylindre plein (M, R, L) : $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2}M.R^2$



Cylindre creux (M, R, L) : $I_{(\Delta')} = \frac{1}{4}M.R^2 + \frac{1}{12}M.L^2$



Sphère creuse (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{2}{3}M.R^2$



Sphère pleine (M, R) : $I_{(\Delta)} = \frac{2}{5}M.R^2$

Remarque :

Dans le cas général, le solide ne tourne pas autour d'un axe en particulier. Le théorème du moment cinétique, dans ce cas, reste le même, sauf que le moment d'inertie du solide n'est plus un scalaire $I_{(\Delta)}$ mais un tenseur $\mathbb{I}$ appelé tenseur d'inertie. Les éléments diagonaux de ce tenseur sont appelés moments d'inerties et les éléments non diagonaux sont appelés produits d'inertie.