RÉSUMÉ DU COURS

LOIS FONDAMENTALES (LOIS DE NEWTON)

1ère loi : $\boxed{\vec{p} = m.\vec{V}}$

Pour un système isolé il y a conservation de la quantité de mouvement $\vec{p} = constante$

2ème loi : (Principe Fondamental de la Dynamique) $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m.\vec{a}}$

3ème loi : (Principe de l'action et de la réaction) dans un système isolé de N corps $\boxed{\vec{F}_1 = -\sum_{i=2}^{N} \vec{F}_{i1}}$

LOIS DE FORCES

Force gravitationnelle :

Au voisinage de la terre $\boxed{\vec{P} = m.\vec{g}}$ avec $g = g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$

(Direction : verticale. Sens : vers le bas)

Où G est la constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ (MKSA)

Loi d'attraction universelle (deux corps séparés par une distance r) $\boxed{F = G\frac{m_1.m_2}{r^2}}$

Pour un satellite en orbite circulaire $\vec{F} = m.\vec{a} = m.\vec{a}_N$ et $a_N = V^2/r$

Force de contact :

Elle est due à la répulsion entre électrons (origine électrique)

(Direction : perpendiculaire aux surfaces en contact. Sens : vers l'extérieur)

Forces de frottements :

Frottements solide–solide : $\boxed{F_f = \mu.C}$ μ : est le coefficient de frottement (sans unité)

(Direction : parallèle aux surfaces en contact. Sens : opposé au sens du mouvement)

Frottements solide–fluide : (Force visqueuse) $\boxed{\vec{F}_f = -k.\eta.\vec{V}}$

(Direction : parallèle à la vitesse. Sens : opposé au sens du mouvement)

η : coefficient de viscosité du milieu

k : est un facteur exprimant la forme du corps solide

Pour un corps de forme sphérique de rayon R : $k = 6\pi R$ et $\vec{F}_f = -6\pi R.\eta.\vec{V}$ (Force de STOCKES)

Force élastique :

$\boxed{\vec{F}_{\text{élast}} = -k.\vec{x}}$ $(k > 0)$ mouvement oscillatoire

(Direction : parallèle à l'axe du ressort. Sens : opposée à l'élongation du ressort)

Association de ressorts : En série : $\frac{1}{k} = \sum_i \frac{1}{k_i}$ En parallèle : $k = \sum_i k_i$

Pseudo force d'inertie :

Dans un repère non galiléen $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ et $\vec{F} = m.\vec{a}$ d'où $\vec{F} + \vec{F}' = m.\vec{a}'$

$\boxed{\vec{F}' = -m.(\vec{a}_e + \vec{a}_c)}$ $\vec{F}'$ est d'origine non matérielle

MOMENT CINETIQUE

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m.\vec{r} \times \vec{V}}$$

$\boxed{\vec{L} = I.\vec{\omega}}$ où I est le moment d'inertie et $\vec{\omega}$ le vecteur vitesse angulaire.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ $\vec{M}(\vec{F})$: est le moment de la résultante de toutes les forces

$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I.\vec{\gamma}$ $\vec{\gamma}$: est le vecteur accélération angulaire.

D'où le théorème du moment cinétique : $\boxed{\vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = I.\vec{\gamma}}$

Cas d'une force centrale ($\vec{F}$ parallèle à $\vec{r}$) $\vec{M}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ d'où $\vec{L} = \text{Constante}$.

SÉRIE DE TD N° 03

EXERCICE 01:

Un corps de masse 3,2 kg se déplaçant vers l'ouest avec une vitesse de 6 m/s, entre en collision avec un autre corps de masse 1,6 kg ayant une vitesse 5 m/s dans la direction nord, après la collision le premier mobile se déplace vers le nord-est en faisant un angle de $30°$ avec l'axe nord-sud et une vitesse de 3 m/s, trouvez :

1. Le sens et la valeur de la vitesse du deuxième mobile.
2. La quantité de mouvement totale des deux corps avant et après la collision.
3. La variation de la quantité de mouvement de chaque corps.
4. La variation de vitesse de chaque corps.

EXERCICE 02 :

Après un accident de voiture (une deux chevaux de masse $m = 500\,kg$, avec un camion de masse $M = 2$ tonnes), les traces de pneus indiquent que les deux mobiles ont pris la même direction à $45°$ de leurs trajectoires initiales (les deux trajectoires étaient perpendiculaires l'une par rapport à l'autre). Un témoin assure que la vitesse du camion était d'au moins 80 km/h, peut-on croire ce témoignage ?

EXERCICE 03(*):

Une balle de $10\,g$ ayant une vitesse de $850\ m/s$ est freinée dans un sac de sable après l'avoir pénétré de $20\,cm$.

1. Quel est la valeur de la force considérée constante appliquée à la balle ?
2. Quel est le temps nécessaire à l'arrêt ?

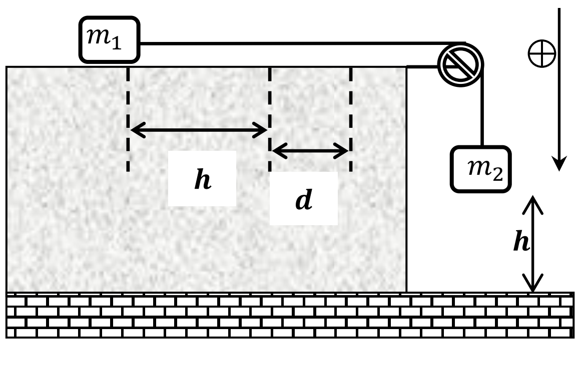
EXERCICE 04 :

Un astronome observe un satellite naturel qui décrit autour d'une planète une orbite circulaire de rayon r avec une période T.

1. Quelle est la masse de la planète en fonction de r et T ?
2. Quelle est l'accélération du satellite ?
3. Quelle est la force de gravitation qui s'exerce sur lui ?
4. Si le rayon de la planète vaut $1/10$ de r, quelle est l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la planète ?
5. On sait qu'un satellite fait le tour de la terre en 98mn à une altitude moyenne de $500\,km$, peut-on en déduire la masse de la terre ? On donne $R_T = 6{,}38 \times 10^6\ m$.

EXERCICE 05 :

Soit le système composé d'une masse m_1 qui glisse sur un plan horizontal ayant un coefficient de frottement μ , cette masse est attachée à une masse m_2 qui pend librement au bout d'un fil inextensible et de masse négligeable, comme le montre la figure ci-dessous (la masse de la poulie étant négligeable). Nous libérons le système sans vitesse initiale, durant la première phase du mouvement les deux masses parcourent une distance $\boldsymbol{h}$ chacune, mais quand la masse m_2 touche le sol, la masse m_1 continue son mouvement sur une distance $\boldsymbol{d}$ puis s'arrête.

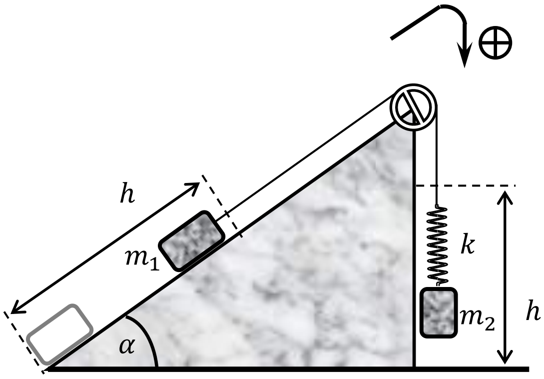


Donnez l'expression du coefficient de frottement μ en fonction de m_1 , m_2 , h et d.

EXERCICE 06 :

On laisse glisser – à partir du repos – un bloc le long d'un plan incliné de $45°$ par rapport à l'horizontale. On constate qu'il met deux fois plus de temps à descendre sur ce plan que sur un autre plan ayant la même inclinaison mais n'offrant aucun frottement. Quel est alors le coefficient de frottement μ entre le bloc et le premier plan (non lisse) ?

EXERCICE 07 (*):

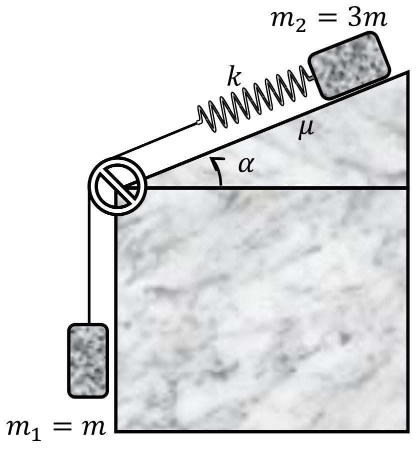


Soit le système représenté par la figure ci-contre. Le plan incliné fait un angle α par rapport à l'horizontale. Le ressort lié à la masse m_2 à une constante de raideur k, sa masse étant négligeable. Les masses de la poulie et du fil sont négligeables, et le fil est inextensible.
Le coefficient de frottement entre le plan et la masse m_1 est noté μ.
On libère le système *sans vitesse initiale*, la masse m_2 étant à située à une hauteur h du sol.
On considère que *l'élongation du ressort* Δl *est constante*, donc les accélérations des deux masses sont égales en module ($a_1 = a_2 = a$).

1.a. Montrer que pour des masses égales ($m_1 = m_2 = m$) le système se déplace dans le sens positif indiqué par la figure.
1.b. Calculer, dans ce cas, l'accélération du système a et l'élongation du ressort Δl.
2.a. A l'instant où la masse m_2 touche le sol le fil reliant les deux masses est coupé. Calculer alors, l'accélération a' de la masse m_1.
2.b. Ecrire l'équation horaire du mouvement de la masse m_1 durant cette étape (on prend comme origine des espaces la position de m_1 quand l'ensemble est lâché).
2.c. Calculer la position maximum $x_{\max}$ atteinte par la masse m_1.

Remarque : toutes les valeurs demandées doivent être calculées en fonction de m , α , k , μ , g , h.

EXERCICE 08 :

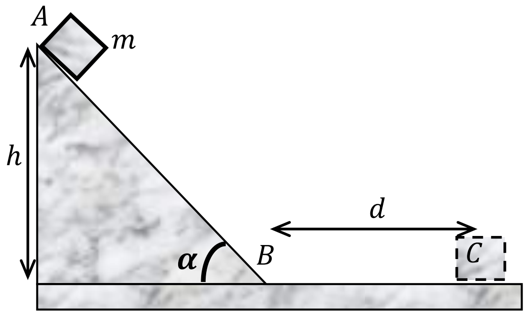


Soit le dispositif de la figure ci-contre. La masse de la poulie est négligeable et le fil est inextensible et de masse négligeable. Le coefficient de frottement du plan incliné est noté μ. L'élongation du ressort reste constante et $a_1 = a_2 = a$.
On libère le système sans vitesse initiale.

1. Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique et représenter les forces agissantes sur les deux masses.
2. Quelle est la valeur limite μ_{lim} du coefficient de frottement, pour que le système soit en équilibre ?
3. Pour $\mu < \mu_{\text{lim}}$,Trouver l'accélération des deux masses. Quelle est la nature du mouvement ?
4. Calculer l'élongation du ressort Δl.
5. Application numérique : $k = 60\ N/m$; $\mu = 0,4$; $m = 300\ g$; $\alpha = 30°$; $g = 9,81\ m/s^2$.

<u>EXERCICE 09 :</u>

Un corps de masse m assimilé à un point matériel se trouve au point A en haut d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et ayant un coefficient de frottement μ (constant).
La hauteur du point A par rapport au niveau du sol est notée h.



1. Calculer la valeur limite μ_{lim} pour laquelle la masse m est en équilibre (cas statique).
2. Pour $\mu < \mu_{\text{lim}}$ calculer l'accélération a de la masse m.
3. Quelle est la nature du mouvement ?
4. Si la masse m est lâchée à partir du point A sans vitesse initiale. Calculer la vitesse V_B au niveau du sol (point B).
5. Quel est le temps t_B mis par la masse pour atteindre le point B ?
6. La masse m continue son mouvement sur un plan horizontal ayant le même coefficient de frottement μ. Quelle est la distance d parcourue par la masse avant de s'arrêter au point C ?
7. Application numérique : (pour toutes les questions) $\alpha = 30°$; $\mu = 0{,}2$; $h = 2\ m$ et $g = 10\ m/s^2$.

Remarque : Donner tous les résultats en fonction de α, μ, h et g (accélération de la pesanteur).

<u>EXERCICE 10 :</u>

A l'instant $t = 0$ un parachutiste de masse m se trouve en $z = 0$ et se déplace verticalement vers le bas avec une vitesse $V_0 = 0$. En supposant que la force exercée par la résistance de l'air sur le parachute est proportionnelle à la vitesse instantanée $\vec{F}_f = -\beta . V . \vec{e}_z$, ($\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire suivant l'axe vertical OZ et dirigé vers le bas). Calculez :

1. La vitesse $V(t)$ à un instant t quelconque.
2. La position $z(t)$ et l'accélération $a(t)$ à un instant quelconque $t > 0$.
3. Montrez que la vitesse du parachutiste tend vers une limite $V_L = m.g/\beta$.

<u>EXERCICE 11 (*):</u>

Un corps se déplace sous l'action d'une force F constante, à travers un fluide qui oppose au mouvement une force proportionnelle au carré de la vitesse, c'est-à-dire $\vec{F}_f = -k.V^2.\vec{e}_x$.

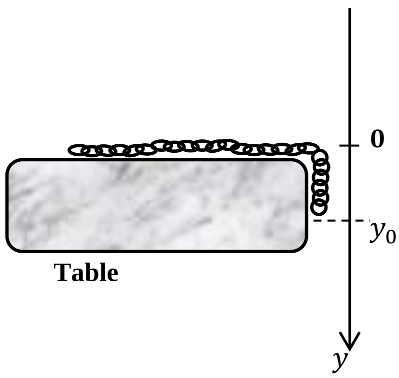
1. En écrivant le PFD, démontrez que la relation entre la vitesse et la distance X est (V_0 est la vitesse initiale)

$$V^2 = \left(\frac{F}{k}\right) + \left(V_0^2 - \frac{F}{k}\right).e^{-2(k/m).X}$$

2. Représentez V^2 en fonction de X pour $V_0 = 0$.
3. Montrez que le corps ne peut pas dépasser une vitesse limite V_L tel que : $V_L = \sqrt{F/k}$
4. Si on supprime F la force après que le corps ait atteint sa vitesse limite, montrez que la vitesse devient égale à V_L/e après que le corps ait parcouru une distance m/k.

<u>EXERCICE 12</u> :

Une chaîne de longueur l et de masse linéique λ constante ($\lambda = M/L$), peut glisser sans frottement sur le rebord d'une table. Initialement, une extrémité de la chaîne de longueur y_0, est verticale (voir la figure ci-contre). L'autre extrémité est retenue par un expérimentateur. Celui-ci libère la chaîne sans vitesse initiale.



1. En appliquant le PFD trouvez l'équation différentielle du mouvement de l'extrémité de la chaîne.
2. Si la solution de cette équation est du type

$$y(t) = A.e^{\omega.t} + B.e^{-\omega.t}$$

Déterminez les valeurs de a , b , et ω (position initiale $y(t = 0) = y_0$)

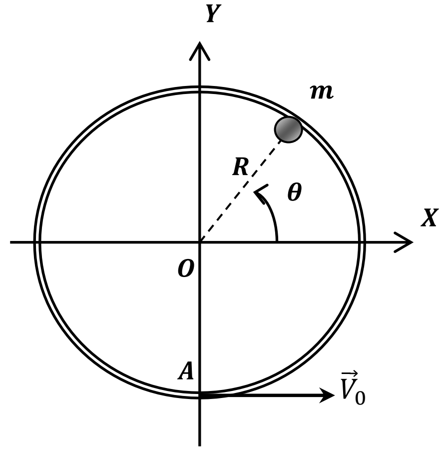
3. Déterminez le temps τ, mis par la chaîne pour quitter la table.

On donne : $g = 9{,}81\ m/s^2$ $l = 20\ cm$ $y_0 = 1\ cm.$

EXERCICE 13 (*):

Nous étudions le mouvement d'une masse ponctuelle m se déplaçant dans le plan vertical XOY à l'intérieur d'un cercle vertical de rayon R centré en O et n'offrant aucun frottement (figure ci-contre).
A l'instant initial, nous lançons la masse m du point le plus bas du cercle A avec une vitesse $\vec{V}_0 = V_0.\vec{e}_x$ $(V_0 > 0)$
En utilisant le principe fondamental de la dynamique, puis en projetant suivant les axes polaires.

1. Trouvez l'équation différentielle du mouvement.
2. Calculez l'expression de la vitesse $V(Y)$ en fonction de la hauteur Y.
3. En déduire l'expression de la force $C(Y)$ exercée sur la masse m par le cercle.
4. Pour $V_0 = \sqrt{g.R}$, trouvez la hauteur Y_M où la vitesse est nulle. Quelle est alors la nature du mouvement ? quelle est l'expression de C ? peut-elle s'annuler ?
5. Pour quelle vitesse initiale V_0 la masse peut-elle suivre toute la piste sans décoller.



EXERCICE 14 (*):

Soit une masse M pouvant glisser sans frottement le long d'une tige droite. Nous faisons tourner la tige dans le plan **horizontal** (XOY) avec une vitesse angulaire constante $\omega_0 > 0$.

1. Trouvez les équations différentielles du mouvement suivants les axes polaires du mouvement.
2. Si la solution de l'équation radiale est de la forme
$$r(t) = A.e^{\omega.t} + B.e^{-\omega.t}$$
Trouvez A, B et ω, sachant qu'à $t = 0$, $r = R_0$ et $V_0 = 0$.
3. Quelle est l'expression de la force appliquée par la tige sur la masse ?

EXERCICE 15 (*):

Soit un ressort de constante de rappel (k) et de longueur (l), on fixe à son bout une masse (m). Qu'elle est la nouvelle longueur du ressort ?

I- On tire la masse vers le bas d'une distance d puis on la libère sans vitesse initiale.

1. En écrivant le PFD donnez l'équation différentielle du mouvement (on rappelle que $\vec{F} = -k.\vec{x}$ où $\vec{x}$ est le vecteur position par rapport à la position d'équilibre)
2. Si $x(t) = A.\sin(\omega.t) + B.\cos(\omega.t)$ est la solution de cette équation déterminez A, B et ω.
3. Quelle sont les expressions de la vitesse et de l'accélération ? Pour quels temps la vitesse (l'accélération) est-elle nulle ? Pour quels temps le module de la vitesse (l'accélération) est-il maximal ?

II- Etudiez le système masse-ressort quand il est horizontal.

III- Application numérique : $k = 10\ N/m$; $l = 0{,}2\ m$; $m = 50\ g$; $d = 3\ cm$. L'origine des temps est considérée comme étant le moment où la masse est libérée. (La résistance de l'air est négligée)

EXERCICE 16 :

I. Soit le système décrit par la figure 01. Le ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 est enroulé autour de la tige AB , on fixe une de ses extrémités au point A et à l'autre extrémité on fixe une masse m pouvant glisser librement suivant la droite AB. La tige AB est fixée à l'axe OA parallèle à la normale et l'angle (OA, AB) est égal à $(\pi/2)$.
On fait tourner le système très lentement autours de l'axe OA pour atteindre une vitesse angulaire constante ω. Dans ce cas le ressort s'allonge, mais après un certain temps, on constate que sa longueur devient constante.

1. Trouvez la longueur l du ressort en fonction de k , l_0 , m et ω.
2. Calculez la tension T du ressort.
3. Pour quelle valeur ω_1 nous avons une résonance mécanique ($l \to +\infty$).
4. Calculez le moment cinétique L de la masse m par rapport au point A.

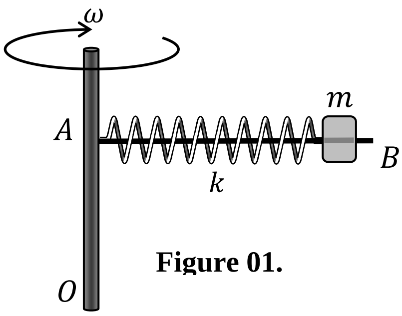


Figure 01.

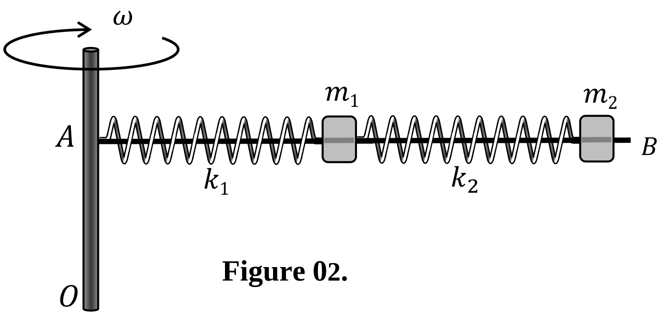


Figure 02.

<u>**II.**</u> Dans la figure 2. on ajoute au système un autre ensemble masse-ressort ***identique au premier*** ($m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$) et on le fait tourner avec la même vitesse angulaire ω.

5. Calculez les longueurs l_1 et l_2 des deux ressorts en fonction de , l_0 , m et ω.

<u>**III.**</u> On arrête la rotation de l'axe OA de la figure 02. ($\omega = 0$) et on fixe la masse m_2 à une distance ($2l_0$) de A. Puis, on tire la masse m_1 d'une distance d ($d < l_0$) dans la direction de A, et on lâche la masse m_1 sans vitesse initiale.

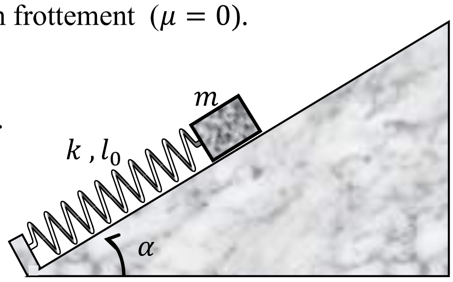
6. Trouvez l'équation différentielle du mouvement de la masse m_1. (On appelle x_1 la position de la masse m_1 par rapport à l'équilibre)
7. En déduire l'équation du mouvement x_1 de la masse m_1.

<u>EXERCICE 17 (*):</u>

Soit le système représenté par la figure ci-contre. Il est composé d'une masse ponctuelle m relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'ensemble masse-ressort est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et n'offrant aucun frottement ($\mu = 0$).

1. Trouver la longueur l du ressort quand le système est à l'équilibre.

A un instant $t_0 = 0$ considéré comme origine des temps, on donne à la masse m à l'équilibre une vitesse initiale V_0 parallèle au plan incliné.



2. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, trouver l'équation différentielle du mouvement de m à un instant t.
3. Si la solution de cette équation est de la forme

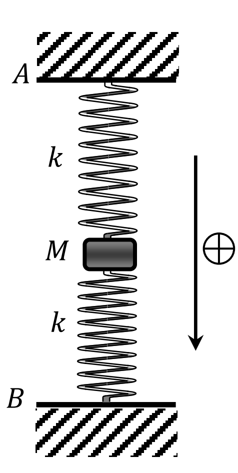
$$x(t) = A.\sin(\omega.t + \varphi)$$

a. Trouver ω, A et φ.

b. En déduire l'expression de la vitesse $V(t)$ et de l'accélération $a(t)$ de la masse m.

<u>EXERCICE 18 :</u>

Entre deux points A et B , sont tendus deux ressorts identiques, ayant chacun une longueur à vide l_0 , et une constante de raideur k. On place entre les deux ressorts un point matériel M de masse m, le système étant contenu dans le plan vertical, comme le montre la figure ci-contre.



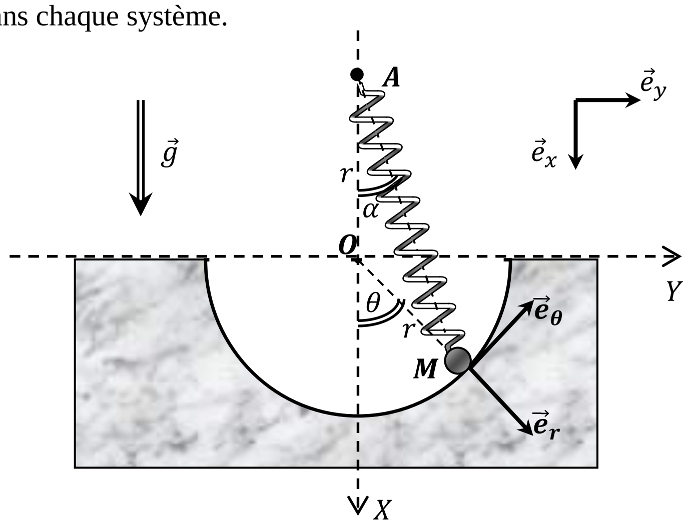
1. Déterminez l'élongation x_A et x_B des deux ressorts *quand le système est en équilibre*.
2. La masse est écartée de sa position d'équilibre, puis elle est relâchée sans vitesse initiale. Déterminez la nature et la période T du mouvement.
3. <u>Application Numérique :</u> $AB = 45\ cm$; $l_0 = 15\ cm$; $k = 20\ N/m$; $m = 100\ g$ et $g = 10\ m/s^2$.

EXERCICE 19 (*):
Un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige de masse négligeable de longueur L dont l'autre bout est attaché à l'axe de rotation.
I- En utilisant le Principe Fondamental de la Dynamique :
1. Donnez l'équation différentielle du mouvement dans le cas où la masse oscille autours de sa position d'équilibre après qu'on lui ai donné une vitesse initiale V_0.
2. Si la solution de cette équation pour des angles assez petits est du type $\theta(t) = \theta_0.\sin(\omega.t + \varphi)$.
   a) Déterminez la valeur de la pulsation ω et de la période T.
   b) Que représente la valeur θ_0 ? Calculer θ_0.
   c) Quelle est l'expression de la vitesse et de l'accélération angulaires?
   d) Pour quels temps la vitesse (l'accélération) est-elle maximale en module?
   e) Pour quels temps la vitesse (l'accélération) est-elle nulle?

II- En utilisant le théorème du moment cinétique retrouvez l'équation différentielle du mouvement.
III- A N : $L = 19\, m$; $V(t=0) = V_0 = 0{,}5\ m/s$ et on néglige la résistance de l'air.

EXERCICE 20 (*):
1. Calculez les composantes du moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dans système de coordonnées cartésiennes pour un corps de masse m de position $\vec{r}$ et de vitesse $\vec{V}$, se déplaçant dans le plan (XOY).
2. Montrez que $\vec{L}(t)$ est perpendiculaire au plan contenant $\vec{r}$ et $\vec{V}$, donnez alors les composantes de $\vec{L}(t)$ dans système de coordonnées cylindriques.
3. Calculez $\vec{L}(t)$ pour les systèmes (terre, soleil) et (électron, noyau H^+) de trajectoires circulaires. On donne :
   $R(\text{Terre} - \text{Soleil}) = 149 \times 10^6\, km$; $M_{Terre} = 6 \times 10^{24}\, kg$.
   $R_{\text{électron}} = r_0 = 5{,}3 \times 10^{-11}\, m$; $M_{\text{électron}} = 9{,}1 \times 10^{-31}\, kg$; $\omega_{0\,\text{é}} = 4{,}1 \times 10^{11}\ rad/s$.
4. Calculez le moment de force appliqué aux mobiles dans chaque système.

EXERCICE 21 :
Soit un ressort de constante de raideur (de rappel) $\boldsymbol{k}$ et de longueur à vide $\boldsymbol{l_0}$, on fixe à son bout une bille $(\boldsymbol{M})$ de masse $\boldsymbol{m}$, l'autre extrémité étant liée à un point $\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r}, \boldsymbol{0})$. La bille se déplace sans frottement sur un demi-cercle fixe contenu dans le plan vertical (XOY), le rayon du cercle est égal à $\boldsymbol{r}$ et son centre se trouve à l'origine O. (voir figure ci-contre)



Le système est placé dans le champ de pesanteur constant $(g = \text{Constante})$ de la terre .
La position de M dans le système de coordonnées polaires est données par l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$.

1. En écrivant que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$ donnez l'expression du vecteur $\overrightarrow{MA}$ dans le système de coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ en fonction de r et de θ.
2. En déduire que son module est donné par l'expression : $MA = 2r.\cos(\theta/2)$.
3. Trouver les composantes de la tension $\vec{T}$ du ressort dans le système de coordonnées polaires en fonction de r , l_0 et θ.

Remarque : On utilise $1 + \cos\alpha = 2.\cos^2(\alpha/2)$ et $\sin(2\alpha) = 2.\sin\alpha.\cos\alpha$

La réaction du cercle sur la bille est notée $\vec{C}$ et son module est noté C .

4. Trouver la résultante des forces appliquée sur la bille $\vec{F}$ en fonction de $r, k,\ l_0, m, C$ et θ.
5. Trouver l'équation différentielle du mouvement de la bille M.
6. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{L}_0$ de M par rapport au point O en fonction de r, m et $\theta^\bullet$.
7. En utilisant le théorème du moment cinétique, retrouvez l'expression de l'équation différentielle du mouvement de M .