RÉSUMÉ DU COURS

TRAVAIL ET ÉNERGIE

TRAVAIL D'UNE FORCE :

$$\boxed{dW = \vec{F}\bullet d\vec{l}} \quad \text{et} \quad \boxed{W_A^B = \int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{l}}$$

PUISSANCE :

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

ENERGIE CINETIQUE :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m.V^2}$$

Energie cinétique de rotation

$$\boxed{E_{cr} = \frac{1}{2} I.\omega^2}$$

ENERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE :

$$\boxed{E_p = -G\frac{M.m}{r}}$$

ENERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE (au voisinage de la terre) :

$$\boxed{E_p = m.g.h}$$

ENERGIE POTENTIELLE ELASTIQUE :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k.x^2}$$

ENERGIE MECANIQUE TOTALE :

$$\boxed{E_T = E_c + E_p = \text{Constante}}$$

TRAVAIL DE LA RESULTANTE DES FORCES :

$$\boxed{W_A^B\left(\vec{F}_{\text{résultante}}\right) = \Delta E_c = \frac{1}{2} m.V_B^2 - \frac{1}{2} m.V_A^2}$$

UNITES : [MKSA]

$$[W_A^B] = [E_T] = [E_c] = [E_p] = N.m = Joule$$

$$[P] = N.m.s^{-1} = Watt$$

FORCE DÉRIVANT D'UN POTENTIEL

$$\boxed{E_T = E_c + E_p = \text{Constante}}$$

$$\boxed{W_A^B = \Delta E_c = -\Delta E_p} \qquad \text{et} \qquad \boxed{dW = dE_c = -dE_p}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p}$$

Propriété des forces conservatives : $\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}}$

DISCUSSION DES COURBES D'ENERGIE POTENTIELLE : (Forces conservatives)

Points d'équilibre :

$$\boxed{F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0}$$

Minimas $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0\right)$: Points d'équilibre stable, la force tend à ramener le mobile vers la position d'équilibre.

Maximas $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0\right)$: Points d'équilibre instable, la force tend à éloigner le mobile de la position d'équilibre.

$$\boxed{E_T - E_p = E_c = \frac{1}{2}m.V^2 \geq 0}$$

FORCES NON CONSERVATIVES :

$$\boxed{W_A^B(\vec{F}_{\text{ncv}}) = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_T} \qquad et \qquad \boxed{dW(\vec{F}_{\text{ncv}}) = dE_c + dE_p = dE_T}$$

SÉRIE DE TD N° 04

EXERCICE 01:

Montrez que dans le cas où la force est parallèle au déplacement :

- L'aire sous la courbe $F(t)$ mesure la variation de la quantité de mouvement.
- L'aire sous la courbe $F(x)$ Mesure la variation de l'énergie cinétique.

EXERCICE 02:

Le mouvement rectiligne d'un point matériel de masse $m = 3\ kg$, subissant une force $\vec{F}$, est donné par l'équation du mouvement : $x(t) = 3t - t^2 + t^3$ tel que x en mètre et t en secondes.

1. Calculez le travail W de la force $\vec{F}$ durant les quatre premières secondes.
2. Quelle est alors la puissance P (en fonction du temps) produite par $\vec{F}$?

EXERCICE 03(*):

Une locomotive ayant une puissance effective de 1,5 MW est utilisée pour tirer une série de wagons sur une ligne droite, on remarque alors que leur vitesse passe de $10\ m/s$ à $25\ m/s$ en 6 minutes.
En négligeant les frottements.

1. Calculez la masse du train.
2. Donnez l'expression de la vitesse $V(t)$ (à $t = 0$, $V_0 = 10\ m/s$)
3. Donnez l'expression de la force $\vec{F}(t)$.
4. Quelle est la distance parcourue par le train durant ces 6 minutes ?

EXERCICE 04:

Un corps de masse 20 kg est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de $50\ m/s$ calculez :

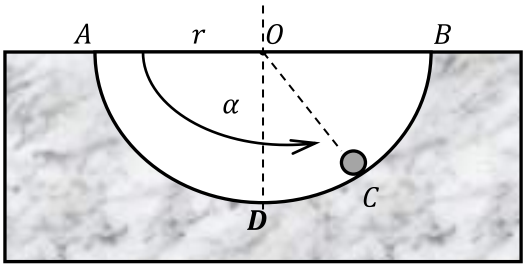
1. Les valeurs initiales de E_c, E_p et E_T. (En prenant comme référentiel le sol)
2. Les valeurs de E_c et E_p à $t = 3\ s$; $t = 5\ s$ et $t = 8\ s$.
3. Les valeurs de E_c et E_p à une altitude de $100\ m$; à $125\ m$.
4. L'altitude du corps quand E_c et réduite à $80\ \%$ de sa valeur initiale.

On néglige la résistance de l'air.

EXERCICE 05:

Une petite boule de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface circulaire ADB (figure ci-contre). Quand la boule est au point C, montrez que sa vitesse angulaire et la force exercée par la surface sont :

$$\omega = \sqrt{\frac{2g.\sin\alpha}{r}} \quad \text{et} \quad F = 3mg.\sin\alpha$$



EXERCICE 06:

La vitesse de libération est la vitesse minimum avec laquelle un corps doit être lancé de la surface de la terre pour échapper à l'attraction terrestre, c'est-à-dire pour atteindre l'infini avec une vitesse nulle.
Evaluez cette vitesse de libération en négligeant les frottements avec l'atmosphère terrestre et les interactions avec les autres corps célestes.
On donne : $M_T = 6 \times 10^{24}\ kg$ et $R_T = 6{,}38 \times 10^6\ m$.

EXERCICE 07(*):

Un pendule simple est constitué d'une masse de $500\ gr$ accrochée à une ficelle de longueur $1\ m$. On abandonne la masse sans vitesse initiale, la ficelle faisant un angle de $60°$ avec la verticale. Déterminez l'énergie cinétique et la vitesse de la masse lorsque:

- La ficelle passe par la verticale.
- La ficelle fait un angle de $30°$ du coté opposé.

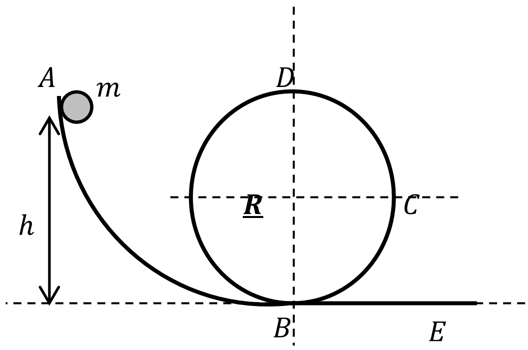
EXERCICE 08:

Considérons le système masse ressort à l'horizontale, en tirant la masse d'une distance d puis en la lâchant sans vitesse initiale. Si $\vec{F} = -k.\vec{x}$ est une force dérivant d'un potentiel calculez :

1. L'énergie potentielle de la masse à une distance x de la position d'équilibre.
2. Le travail de $\vec{F}$ entre $x = d$ et $x = 0$.
3. L'énergie cinétique au point $x = 0$ (pas de frottements).
4. Dans le cas où on aurait des forces de frottements constants, donnez l'expression du travail de ces forces.

EXERCICE 09:

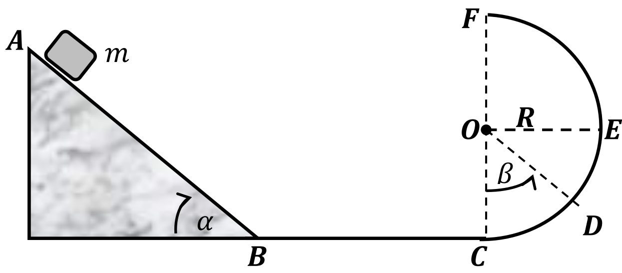
Une masse ponctuelle m glisse sans frottements sur la piste $ABCDE$ comme le montre la figure ci-contre, en partant de A sans vitesse initiale.



1. Déterminez la hauteur minimum h d'où nous devons lâcher la masse m pour qu'elle puisse suivre la piste au complet sans décoller. Le rayon de la partie circulaire de la piste est noté R.
2. Pour une masse $m = 1\ kg$ et un rayon $R = 1\ m$: Déterminez la force de contact qu'exerce la piste sur la masse aux points B, C, D et E.

EXERCICE 10(*):

On laisse glisser un corps de masse $m = 2\ kg$ sans vitesse initiale à partir du point A sur un plan incliné AB de pente $\alpha = 30°$, de longueur $AB = 20\ m$, et n'offrant aucun frottement (figure ci-contre).



1. Calculez la vitesse du corps au point B.

Le corps continu son mouvement sur le plan horizontal BC, il arrive alors au point C avec une vitesse $V_C = 10\ m/s$. sachant que la longueur de la partie $BC = 5\ m$.

2. Calculez la valeur de la force de frottement – considéré constante – appliquée au corps.

A partir du point CEF le corps suit une piste circulaire de rayon R, il arrive au point E à mi-hauteur avec une vitesse $V_E = 8\ m/s$, en négligeant les frottements de cette partie.

3. Calculez le rayon de la partie circulaire CEF.
4. Calculez la vitesse du corps au point D tel que OD fait un angle $\beta = 60°$ avec la normale.
5. Calculez la force exercée par la piste sur le corps au point D.
6. Calculez la vitesse du corps et la force exercée par la piste sur le corps au point le plu haut F.

<u>EXERCICE 11</u>:

Une masse m se déplace dans le plan (OXY) sous l'influence d'une force

$$\vec{F} = (x - a.y).\vec{e}_x + (3y - 2x).\vec{e}_y$$

1. Calculez en fonction de (a) le travail nécessaire pour déplacer m de $O(0,0)$ à $A(2,4)$ suivant une ligne droite.
2. Même question pour le trajet ABO tel que $B(2,0)$.
3. Même question pour un tour complet (dans le sens trigonométrique) sur une trajectoire circulaire d'origine O et de rayon $R = 2$.
4. On donne la condition pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$. Donnez alors la valeur de a réalisant cette condition. Que peut-on en conclure au sujet du travail effectué.

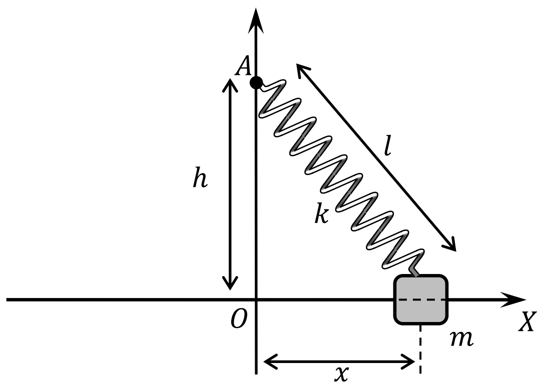
<u>EXERCICE 12:</u>

Un point matériel de masse 3 kg se déplace dans le plan (OXY) en étant soumis à un champ de force dérivant d'un potentiel $E_p(x,y) = -9x^2 + 12y$ (E_p en joules ; x et y en mètre). En $t = 0s$ le point matériel se trouve immobile au point dont la position est donnée par le vecteur $\vec{r}_0 = 10.\vec{e}_x - 10.\vec{e}_y$.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement ainsi que les conditions initiales.
2. Calculez l'expression de la position du point à un instant t quelconque.
3. Calculez l'expression de la vitesse à un instant t quelconque.

<u>EXERCICE 13:</u>

Un point matériel de masse m, est astreint à se déplacer sans frottements le long d'un axe (OX), comme le montre la figure ci-contre. Il est relié à un point A immobile de hauteur h par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 tel que $(l_0 > h)$.



1. Calculez l'expression de l'énergie potentielle du système $E_p(x)$ en fonction de la coordonnée x.
2. Quels sont les points d'équilibre stables et instables de la masse m.

Si x_1 est une des positions d'équilibre stable $(x_1 > 0)$ nous pouvons écrire l'énergie potentielle $E_p(x)$ au voisinage de x_1 en première approximation :

$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_1}.x^2 = \frac{1}{2}Kx^2$$

3. Déterminez la valeur de K en fonction de k, l_0 et h.
4. Quelle est alors la période des petites oscillations de m autours de cette position d'équilibre.

<u>EXERCICE 14(*)</u>:

Une balle de masse $500\ gr$ est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de $20\ m/s$, elle atteint alors une altitude de $15\ m$.

1. Calculez la perte d'énergie due à la résistance de l'air et évaluez la force moyenne de frottement.
2. En admettant que les forces restent les mêmes lorsque la balle redescend, déterminez la vitesse de la balle lorsqu'elle revient au sol.
3. Cette hypothèse sur les frottements vous semble-t-elle admissible ou non ? Expliquez.

EXERCICE 15:

Un corps de masse $10\ kg$, animé d'une vitesse de $3\ m/s$, glisse sur une surface horizontale jusqu'à ce que le frottement provoque son arrêt.
Déterminez la quantité d'énergie transférée aux mouvements internes moléculaires aussi bien du corps que de la surface, exprimée en Joules et en Calories. Peut-on dire que cette énergie a été transférée sous forme de chaleur ? ($1\ \text{Joule} = 0{,}24\ \text{Calories}$)
Si le corps s'arrête sur une distance de $1\ m$, déterminez le coefficient de frottement sur le plan.

EXERCICE 16:

Une automobile de masse $1200\ kg$ monte une rampe inclinée de $5°$ avec une vitesse constante de $18\ km/h$.
Son énergie mécanique totale est-elle constante ?
En négligeant certains frottements, calculez la puissance développée par le moteur.