Probabilités et variables aléatoires

Ce chapitre introduit les concepts essentielles des modèles probabilistes afin d'aborder l'inférence statistique. Définition d'un événement aléatoire, des probabilités discrètes ou continues, des probabilités conditionnelles et de la notion d'indépendance en probabilités. Après avoir défini la notion de variable aléatoire, celles de lois les plus utilisées sont décrites : discrètes de Bernoulli ; Binomiales, Géométrique, de Poisson ; continues Uniforme , exponentielle, Gamma, Normale, du Chi-deux, de Student et de Fisher. Espérance et variance d'une variable aléatoires sont définies.

1- *Introduction :*

Dans des domaines très différents comme les domaines scientifique, sociologique ou médical, on s(intéresse à de nombreux phénomènes dans lesquels apparaît l'effet du hasard. C'es phénomènes sont caractérisés par le fait que les résultats des observations varient d'une expérience à l'autre.

Une expérience est appelée « aléatoire » s'il est impossible de prévoir à l'avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différentes :

- *Succession d'appels à un standard téléphonique non surchargé ;*
- *Observation de la durée de vie d'un individu anonyme dans une population ;*
- *Observation de la durée de fonctionnement sans panne d'appareil ;*
- *Jeu de pile ou face.*

2- *Notion de probabilité :*

1- *évenement :*

Définition 1 **:** *on appelle univers associé à une expérience aléatoire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette expérience.*

Le choix de l'ensemble Ω comporte une part d'arbitraire. Il dépend de l'idée que l'on a, a priori, sur les résultats de l' expérience aléatoire. Donnons quelques exemples :

1. *On lance une pièce de monnaie l'ensemble, Ω= { pile , face}.*
2. *On s'intéresse à l'état de fonctionnement d'un système. Dans ce cas Ω ={ 0, 1}avec la convention 0 si système est en panne et 1 s'il fonctionne.*
3. *Le résultat de l' expérience aléatoire est le nombre de tirages nécessaires dans un jeu de pile ou face jusqu'à l'obtention du premier « pile ». dans ce cas Ω={ 1,2,3,4, . . .} = IN.*

Définition 2 : Etant donnée une expérience aléatoire, un événement aléatoire est une partie de l'ensemble des résultats possibles de l'expérience, c'est donc un sous-ensemble A de l'univers Ω. On dit que l'événement A est réalisé si le résultat ω de l' expérience appartient à A.

On sait que l'événement A est réalisé seulement une fois l' expérience aléatoire réalisée.

Exemples :

- *Si l'on s'intéresse à l'événement : » on a obtenu un chiffre pair lors d'un lancer d'un dé à 6 faces », on introduit A={ 2 , 4, 6}, qui est un* sous-ensemble de *Ω={ 1,2,3,4,5,6}.*

* *Si l'on s'intéresse à l'événement suivant: » la durée de vie d'un composant est supérieur à 1000 heurs», A=[1000 , +∞] est un* sous-ensemble de *Ω= IR.*

L'ensemble Ø est appelé l'événement impossible et Ω est appelé l'événement certain.

2- *Opération sur les événements :*

Les l'événement aléatoires étant des ensembles, introduisons les opérations ensemblistes classiques de la théorie des ensembles.

Définition 3 : *on appelle l'événement contraire de A, noté $\bar{A}$ ou A^c, le complémentaire de A dans Ω.*

$A^c = \{ \omega \in \Omega : \omega \not\subset A \}$. l'événement contraire $\bar{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

Exemple : Si A est l'événement suivant: » la durée de vie d'un composant est supérieur à 1000 heurs», A=[1000 , +∞] alors $\bar{A}$ = [0 , 1000[(la durée de vie du composant est inferieur à 1000 heurs

Définition 4 *: Soient A est b deux événements d'un univers Ω.*

* *L'événement « A et B » est celui qui est réalisé si A et B sont réalisés. C'est l'intersection*

$$A\cap B= \{ \omega \in \Omega : \omega \in A \text{ et } \omega \in B \}.$$

* *L'événement « A ou B » est celui qui est réalisé si A ou Best réalisé(l'un des deux). C'est l'union*

$$AUB= \{ \omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \}.$$

* *L'inclusion A **C** B signifie que l'événement A ne peut se réalisé sans que B le soit.*

Définition 5 *: Deux événement A et B sont dits incompatibles si la réalisation de l'un implique la non réalisation de l'autre.*

Dans l'espace Ω, deux événements sont incompatibles sont représentés par deux parties disjointes, Si A∩B=Ø alors A et B sont incompatibles. IL est clair que A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

3- *Probabilité :*

Définition 6 *: Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et soit A l'ensemble des parties de Ω. Une probabilité **P** sur l'espace (Ω,A) est une application de A dans [0 , 1] telle que :*

1. **P**(Ω) = 1
2. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une famille d'événements de A 2 à 2 incompatibles,

$$\boldsymbol{P}(U A_n) = \sum \boldsymbol{P}(A_n)$$

*Le triplet (Ω, A, **P**) est appelé espace de probabilité.*

Proposition 1*: Soient A et B deux événements aléatoires.*

1. ***P(Ø) = 0***
2. $\boldsymbol{P}(U A_n) \leq \sum \boldsymbol{P}(A_n)$
3. *Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles,* $\boldsymbol{P}(U A_n) = \sum \boldsymbol{P}(A_n)$

4. *$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$*

5. *Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$*

6. ***P**(AUB) = **P**(A) + **P**(B) – **P**(A∩B)*

7. *Si Ω est fini ou dénombrable, alors pour tout événement A, P(A) =∑ **P**({ω})*

Exemple probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini : $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Pour tout i∈{1 , 2 , …..,n}, on pose

$\boldsymbol{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ alors pour toute partie A de *Ω* , on a

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{card(A)}}{\mathrm{card}(\Omega)}$$

Dans le cas de lancer de dé à 6 face pour tout *ω ϵ{1 , 2 ,3 , 4 , 5 , 6},*

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Sin on note l'événement « on a obtenu un chiffre pair » par A={2 , 4 , 6}, alors $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4- ***Probabilités Conditionnelles***

Dans la partie précédente, on a parlé de la probabilité d'un événement sans tenir compte de la réalisation d'autres événements. En pratique on peut considérer plusieurs événements, certains pouvant avoir une influence sur la réalisation d'autres événements.

Exemple : *on lance deux dé, soient les événements A= { la somme est ≥11} et B ={ le lancer du 1er dé donne 6}. Il est clair que la réalisation de B influe sur la réalisation de A.*

Supposons que l'on s'intéresse à la réalisation d'un événement A , tout en sachant qu'un événement B est réalisé . si A et B sont incompatible, alors la question est réglée ; A ne se réalise pas. Mais si *A∩B≠Ø il est possible que A se réalise, cependant, l'espace des événements possible n'est plus Ω tout entier, mais il est restreint à B. en fait, seul nous intéresse la réalisation de A à l'intérieur de B, c'est-à-dire A∩B par rapport à B.*

Définition 7 *: Soit (Ω,A,**P**) un espace de probabilité. Soient A et B deux événements aléatoires tels que P(B) ≠0. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B la quantité*

$$PA/B) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(B)}$$

Remarque : on a les égalités suivantes :

*Si **P**(B) > 0 , **P**(A∩B) = **P**(A/B) * **P**(B)*

*Si **P**(A) > 0 , **P**(A∩B) = **P**(B/A) * **P**(A)*

Proposition 2: *(formule des probabilités totales)*

Soit $(A_i)_i$ est une famille d'événements formant une partition de *Ω :*

$\cup A_i = \Omega$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout i et j et on suppose que ***P***(A_i) *> 0 pour tout i Alors :*

$$P(A) = \sum P(A/A_i)\, P(A_i)$$

Proposition 3: *(formule de Bayes) Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, on a*

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{Ai}) = \frac{\mathrm{P(A/Ai)\ P(Ai)}}{\sum \ \mathrm{P(A/Ai)\ P(Ai)}}$$

5- ***Indépendance :***

Définition 8 : *Soit (Ω,A,**P**) un espace de probabilité. Soient A et B deux événements aléatoires. On dit que A et B sont indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A) \ * \ P(B)$$

Remarque : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A/B) = P(A)$. *cette condition signifie que la probabilité de réalisation de A n'est pas modifiée par une information concernant la réalisation de B.*

Proposition 4 : *Si A et B sont deux événements indépendants alors :*

$\bar{A}$ et B sont indépendants.

A et B^c sont indépendants.

A^c et B^c sont indépendants.

Définition 9 : *Soit (Ω,A,**P**) un espace de probabilité. Pour n > 2 soient A_1 , A_2 , ….,A_n des événements aléatoires ces événements sont deux à deux indépendants si pour tout (i , j) avec i≠j on a $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)*P(A_j)$*

3- Notion de variable aléatoire

Dans de nombreuses expériences aléatoires. On n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience . mais par une certaine fonction de ce résultat. Considérons par exemple l'expérience qui consiste à observer pour chacune des n pièces produites par une machine , si la pièce est défectueuse ou non. Nous attribuerons la valeur 1 à une pièce défectueuse et la valeur 0 à une pièce en bob état. L'univers associé à cette expérience est *Ω= {0 , 1}. Ce qui intéresse le fabriquant est la proportion des pièces* défectueuses produites par la machine, Introduisant une fonction de *Ω dans IR qui à tout ω={ ω_1 , ω_2 , … , ω_n} de Ω associe le nombre*

$$X(\omega) = \sum \frac{\omega_i}{n}$$

Qui correspond à la proportion des pièces défectueuses associée à l'observation de *ω. Une telle fonction définie sur Ω et à valeurs dans IR s'appelle une variable aléatoire réelle.*

Définition 10 : *Etant donné un univers Ω une variable aléatoire réelle (v.a.r) est une application de Ω Dans R :*

$$X : \omega \in \Omega \longrightarrow X(\omega) \in IR$$

Loi de probabilité

Définition 11 : *Soit Ω un univers muni d'une probabilité **P**, et soit X une v.a.r On appelle loi de probabilité de X, notée P_x , l'application qui à toute partie A de R associe*

$$P_x(A)=P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in A\}).$$

Remarque : Dans la suite, on utilisera la notion abrégée :

$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$. De même, on notera $P(X = x)$ la probabilité $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$.

<u>Proposition 5 :</u> *L'application P_x définit une probabilité sur IR.*

Fonction de répartition

<u>Définition 12 :</u> *La fonction de répartition de la v.a.r X est définie par*

$$F_x(x) = P(X \leq x),\ x \in IR.$$

Propriétés de la fonction de répartition :

1- $0 \leq F_x \leq 1$
2- **F_x tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$**
3- **F_x est croissante**
4- **F_x est continue à droite.**

<u>Proposition 6 :</u> *On a l'identité*

$$P(a < X < b) = F_x(b) - F_x(a) \quad \forall\ a < b$$

<u>Variables aléatoires réelles discrètes</u>

<u>Définition 13</u> *: une v.a.r X à valeurs dans un ensembles B fini ou dénombrable est appelée v.a.r. discrète dans ce cas. La loi de X est déterminée par l'ensemble des probabilités : $P_x(x)=P(X = x)$, $x \in B$*
ainsi, pour toute partie A de Ω. On a alors : $P_x(A)=P(x \in A) = \sum P(X = x)$, $x \in A$.

Exemple : soit X une v.a.r. discrète prenant ses valeurs dans un ensemble$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, éventuellement infini. Alors la loi de X est caractérisée par l'ensemble des probabilités $P(X=x)$, c'est –à-dire les nombres réels positifs p_i tels que $P(X = x) = p_i$ avec $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum p_i = 1$

<u>Variables aléatoires réelles continues</u>

<u>Définition 14</u>*: Soit X une v.a.r qui prend un nombre infini non dénombrable de valeurs . si F_x est une fonction continue on dit que, on dit que X est une v.a.r. continue dans ce cas, la loi de X est déterminée par l'ensemble de probabilités $P(a < X < b)$, pour tout $a < b$.*

Remarque : notons que l'on peut mettre < ou ≤ dans ce qui précède car la variable étant continue on a $P(X = x)=0$ pour tout $x \in IR$.

Exemple : soit $\lambda > 0$. Une v.a.r. X de fonction de répartition

$$F_x(x) = \begin{cases} 1- \exp(-\lambda) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Définition 15*:* *si l'on peut écrire la fonction de répartition d'une variable continue sous la forme :*

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^{t} f_x(x)\,dx$$

Ou f_x est une fonction de IR dans IR, alors on dit que f_x est la densité de probabilité de la v.a.r. X. ceci implique que l'on a pour tout $a < b$:

$$P(a < X < b) = Fx(b) - Fx(a) = \int_{a}^{b} f_x(x)\,dx$$

Cet intégrale étant positive pour tout $a < b$ *et en résulte que* $f_x \geq 0$ *de plus puisque*

$$\lim_{t \to +\infty} F_x(t) = 1 \ on\ a \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = 1$$

Une densité de probabilité est donc une fonction positive ou nulle d'intégrale 1, et qui caractérise la loi d'une v.a.r. continue. De plus en tout point $x_0 \in$ IR ou Fx est dérivable, on a $f_x(x_0) = F_x'(x_0)$.