

Lois classiques

- Loi Binomiale
- Loi de Poisson
- Loi Normale et dérivées
- Loi de Student
- Loi du Khi 2
- Loi du F de Fisher Snedecor

Loi Binomiale

- **Épreuve de Bernoulli :**
 - Soit deux événements mutuellement exclusifs A et son contraire B (pile/face; garçon/fille; résultat positif/négatif). Toute réalisation de l'expérience aura comme résultat A ou B.
 - Cette épreuve est appelée épreuve de Bernoulli.
- **A chaque épreuve on associe X telle que :**
 - $X = 1$ quand A est réalisé
 - $X = 0$ quand B est réalisé
 - La loi de probabilité de X est
 - $P(X=1) = p$
 - $P(X=0) = q = 1-p$
 - $E(x) = \sum P_i x_i = 1 * p + (1-p)*0 = p$
 - $\text{Var}(X) = p * (1-p) = pq$

On peut répéter n fois une épreuve de Bernoulli.

- On appelle k le nombre de réalisation de A. C'est le nombre de réalisation de A parmi n épreuves. k est une réalisation de K et peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n.
On montre facilement que :

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Distribution asymétrique sauf pour $p = q = 0,5$

- Cette loi de probabilité est appelée loi Binomiale (binôme de Newton)
 - $E(K) = n \cdot p$
 - $\text{Var}(K) = n \cdot p \cdot q$
- Si l'on ne considère plus la fréquence absolue k mais la fréquence relative (pourcentage) $f = k/n$ et F une réalisation de f; on a :
 - $E(F) = p$
 - $\text{Var}(F) = \frac{p \cdot q}{n}$
- Formule de récurrence

$$P(K = k+1) = \frac{p \cdot (n-k)}{q \cdot (k+1)} \cdot P(K=k)$$

Loi Binomiale : Résumé

- Variable binaire
- 2 paramètres
 - n : nombre de répétitions
 - p : probabilité de l'événement
- Loi
 - $P(K=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
 - Distribution asymétrique sauf pour $p=q=0,5$

- Formule de récurrence

$$P(K = k+1) = \frac{p * (n-k)}{q * (k + 1)} * P(K=k)$$

- Moyenne $E(K) = n * p$
- Variance $Var(K) = n * p * q$
- Si l'on considère $f = k/n$; on a :
 - $E(F) = p$
 - $Var(F) = \frac{p * q}{n}$

Exemple de distribution binomiale

- Nombre de garçons dans les familles de 4 enfants sachant que $p = 0,5$

$$p = 0,5$$

$$q = 0,5$$

$$P(K=0) = C_4^0 0,5^0 * 0,5^4 = 0,0625$$

$$P(K=1) = \frac{0,5 * (4-0)}{0,5 * (0+1)} * P(K=0) = 0,25$$

$$P(K=2) = 0,375$$

$$P(K=3) = 0,25$$

$$P(K=4) = 0,0625$$

- Nombre d'examens positifs sans qu'il y aie de maladie dans un bilan de 10 paramètres sachant que la spécificité est de 95 %

$$p = 0,05$$

$$q = 0,95$$

$$P(K=0) = C_{10}^0 0,05^0 * 0,95^{10} = 0,599$$

$$D'où P(K>0) = 1 - 0,598 = 0,401$$

Loi de Poisson

- Variable discontinue pouvant prendre toutes les valeurs entières positives (0, + infini)
- Cas limite des distributions binomiales quand p est petit et n grand. Dans ce cas $n \cdot p$ tend vers m.

- $$P(K=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{tend vers } e^{-m} \cdot \frac{m^k}{k!}$$

- Loi caractérisée par un seul paramètre $m = np$. La moyenne m est égale à la variance.
- On emploie la loi de Poisson tant que np (nq) est inférieur à 5; quand np et nq sont supérieur à 5 on utilise la loi normale

- Formule de récurrence :

$$P(K = k+1) = P(K=k) \cdot \frac{m}{k+1}$$

- Loi tabulée, 1 ou 2 modes, forme en i
- Loi des événements rares
 - Désintégration nucléaire
 - Mort d'un individu dans un intervalle de temps
 - Théorie des catastrophes, recherche opérationnelle (sortie des ambulances...)

Table de la loi de Poisson

$$\Pr(X = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

a \ k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368	0,135
1	0,090	0,164	0,222	0,268	0,303	0,329	0,348	0,359	0,366	0,368	0,271
2	0,005	0,016	0,033	0,054	0,076	0,099	0,122	0,144	0,165	0,184	0,271
3	-	0,001	0,003	0,007	0,013	0,020	0,028	0,038	0,049	0,061	0,180
4	-	-	-	0,001	0,002	0,003	0,005	0,008	0,011	0,015	0,090
5	-	-	-	-	-	-	0,001	0,001	0,002	0,003	0,036
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,012
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,003
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001

a \ k	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	14,0	18,0
0	0,082	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	-	-	-	-	-
1	0,205	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	-	-	-
2	0,257	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002	-	-
3	0,214	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008	-	-
4	0,134	0,168	0,195	0,175	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019	0,001	-
5	0,067	0,101	0,156	0,175	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038	0,004	-
6	0,028	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063	0,009	0,001
7	0,010	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090	0,017	0,002
8	0,003	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113	0,030	0,004
9	0,001	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125	0,047	0,008
10	-	0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125	0,066	0,015
11	-	-	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114	0,084	0,025
12	-	-	0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095	0,098	0,037
13	-	-	-	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073	0,106	0,051
14	-	-	-	-	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052	0,106	0,066
15	-	-	-	-	-	0,003	0,009	0,019	0,035	0,099	0,079
16	-	-	-	-	-	0,001	0,005	0,011	0,022	0,087	0,088
17	-	-	-	-	-	0,001	0,002	0,006	0,013	0,071	0,094
18	-	-	-	-	-	-	0,001	0,003	0,007	0,055	0,094
19	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,004	0,041	0,089
20	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,002	0,029	0,080
21	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,019	0,068
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,012	0,056
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,007	0,044
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,004	0,032
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,002	0,024
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,016
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001	0,011
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,007
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,004
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,003
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,002
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,001

Loi Normale

Loi de Laplace-Gauss

- Variable continue, définie de - infini à + infini par sa densité de probabilité.

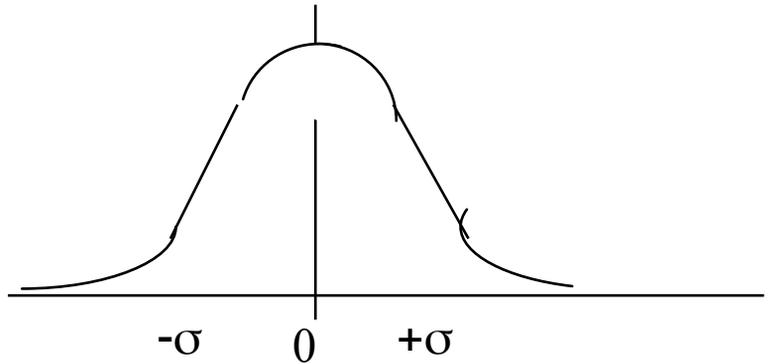
- $$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- 2 paramètres μ et sigma (moyenne et écart type)
- Toutes les lois normales se ramènent à la loi normale centrée réduite de moyenne 0 et d'écart type 1.
- Loi symétrique, mode = moyenne = médiane
- Deux points d'inflexion pour $u = \pm 1$

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2}$$

Loi Normale (suite)

- Représentation de $f(u)$

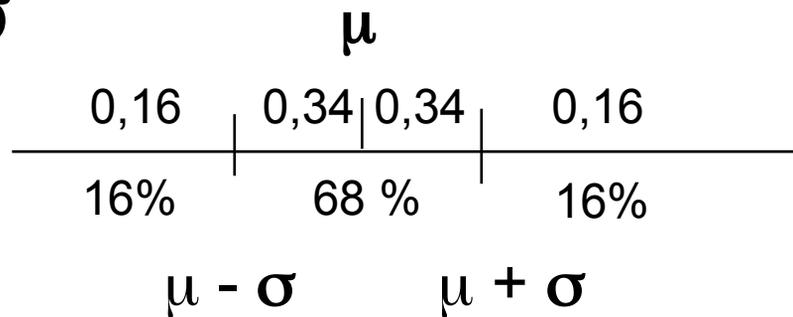


- Importance de la loi normale

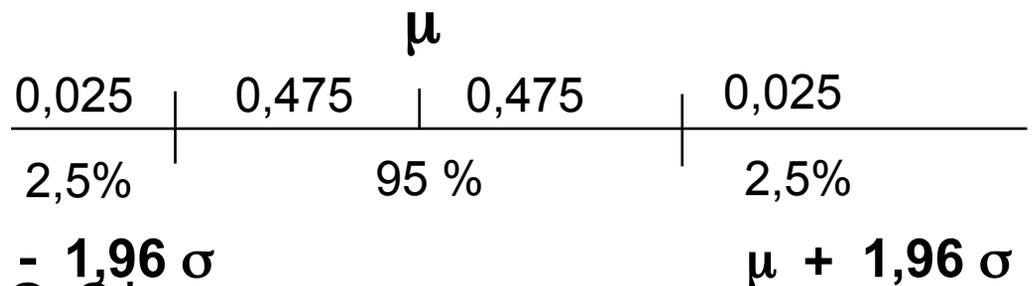
- Loi limite des lois binomiales et de poisson ($np > 5$ et $nq > 5$ (10 pour certain)).
- Loi très fréquente dans les phénomènes biologiques et médicaux.
- Si des variables sont gaussiennes (L. Normale = L. de Laplace Gauss) il en est de même de leur somme et de leur différence.
- Attention, le mélange de deux groupes dans lesquels une variable suit une loi normale ne donne pas une distribution normale sauf si les deux groupes sont issus de distribution ayant même moyenne et même écart type.
- La moyenne de n variables non gaussienne indépendantes tend à devenir gaussienne quand n ($n > 10$) est grand.
- Souvent une transformation simple (log, racine...) permet de mener à une distribution normale (loi log normale).

Loi Normale : valeurs remarquables

- $\mu \pm \sigma$



- $\mu \pm 1,96 * \sigma$



- $\mu \pm 2,6 * \sigma$

