Chapitre 1

Ensembles et applications

1.1 Ensembles

1.1.1 Définir des ensembles

Un ensemble est une collection d'éléments qui vérifient une propriété.
Exemples :
$\{x \in \mathbb{R}; |x-2| < 1\}, \mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}, \{0, 1\}$.

1.1.2 Inclusion,union,intersection, complémentaire

* **L'inclusion**. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall x \in E (x \in F)$. On dit alors que E est un sous ensemble de F ou une partie de F.
* **L'égalité**. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
* **Ensemble des parties de** E. En note $P(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$; $P(\{1, 2, 3\}) = \{\oslash, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

* **Complémentaire**. Si $A \subset E, C_E A = \{x \in E \diagup x \notin A\}$.
* **Union**. Pour $A, B, C, A \cup B = \{x \in E \diagup x \in A ou x \in B\}$.
* **Intersection**. $A \cap B = \{x \in E \diagup x \in A et x \in B\}$.

1.1.3 Régles de calculs

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.
$A \cap B = B \cap A$.
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
$A \cap \oslash = \oslash, A \cap A = A, A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.
$A \cup B = B \cup A$.
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
$A \cup \oslash = A, A \cup A = A, A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$C(CA) = A$ et donc $A \subset B \Longleftrightarrow CB \subset CA$.

$C(A \cap B) = CA \cup CB$.
$C(A \cup B) = CA \cap CB$.

1.1.4 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.
Exemple
$1/ \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$.
$2/ \ [0, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}.\}$
$3/ \ [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z)/0 \leq x \leq 1\}$

1.2 Application

1.2.1 Définitions

* **Une application (fonction)** est une relation entre deux ensembles pour lequel chaque élément du premier (appelé ensemble de départ) est relié à un unique élément du second (l'ensemble d'arrivée).
***Égalité**. Deux applications $f, g : E \longrightarrow F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E, f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.
***Le graphe** de $f : E \longrightarrow F$ est $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F/x \in E\}$.
* **Composition**. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ alors $g \bigcirc fE \longrightarrow F \longrightarrow G : g \bigcirc f = g(f(x))$.
***Image directe, Image réciproque.**
Soient E, F deux ensembles.
Définition1
Soit $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image directe de A par f est l'ensemble $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$.
Définition 2
Soit $B \subset F$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}.$$

***Antécédents**
Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un antéédent de y.
En terme d'image réciproque l'ensemble des antédents de y est $f^{-1}(\{y\})$
L'élément y admet 3 antécédents par f. Ce sont x_1, x_2, x_3.

1.2.2 Injection, surjection, bijection

*** Injection, surjection**
Soit E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition.
f est injective si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :

$$\forall x, x' \in E(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$

Définition.
f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F \exists x \in E(y = f(x)).$$

Remarque
Encore une fois ce sont des notions difficiles à appréhender. Une autre faon de formuler l'injectivité et la surjectivité est d'utiliser les antécédents.
* f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antédent(et éventuellement aucun).
* f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent.
Exemples
1. Soit $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Montrons que f_1 est injective : soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$. Alors $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+x'}$, donc $1 + x = 1 + x'$ et donc $x = x'$. Ainsi f_1 est injective.
2. Soit $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ d'éfinie par $f_2(x) = x^2$. Alors f_2 n'est pas injective. En effet on peut trouver deux éléments $x, x' \in \mathbb{Z}$ différents tels que $f_2(x) = f_2(x)$. Il suffit de prendre par exemple $x = 2, x' = -2$.
f_2 n'est pas non plus surjective, en effet il existe des élément $y \in \mathbb{N}$ qui n'ont aucun antécédent. Par exemple $y = 3$: si $y = 3$ avait un antécédent x par f_2, nous aurions $f_2(x) = y$, c'est-á-dire $x^2 = 3$, d'où $x = \underline{+}\sqrt{3}$. Mais alors x n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$. donc $y = 3$ n'a pas d'antécédent et f_2 n'est pas surjective.

*__Bijection__
Définition
f est bijective si elle est injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F \exists ! x \in E(y = f(x)).$$

L'existance du x vient de la surjectivité et l'unicité de l'injectivité. Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par f.

Proposition
Soit E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
1. L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = id_E$.
2. Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la bijection réciproque de f et est notée f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

1.3 Ensembles finis

1.3.1 Cardinal

Définition 6
Un ensemble E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, ..., n\}$. Cet entier n est unique et s'appelle le cardinal de E (ou le nombre d'éléments) et est noté Card$E$.
Remarques Par définition le cardinale l'ensemble vide est 0.
Quelque propriètès
1. Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors B est aussi un ensemble fini et $cardB \leq cardA$.
Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors $Card(A \setminus B) = CardA - CardB$. En particulier si $B \subset A$ et $cardA = cardB$ alors $A = B$.

1.3.2 Injection, surjection, bijection et ensembles finis

Proposition Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. Si

$$CardE = CardF$$

alors les assertions suivantes sont équivalentes :
i. f est injective,
ii. f est surjective,
iii. f est bijective.
Démonstration
Le schéma de la preuve est le suivant :nous allons montrer successivement les implications

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (i)$$

ce qui prouvera bien toutes les équivalences.
• $(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons f injective. Alors $Cardf(E) = CardE = CardF$. Ainsi $f(E)$ est un sous-ensemble de F ayant le même cardinal que F; cela entraîne $f(E) = F$ et donc f est surjective.
• $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Supposons f surjective. Pour montrert que f est bijective, il reste à démontrer que f est injective. Raisonnons par l'absurde et supposons f non injective. Alors $Cardf(E) < CardE$. (car au moins 2 éléments ont la même image). Or $f(E) = F$ car f surjective, donc $CardF < CardE$. C'est une contradiction, donc f doit être injective et ainsi f est bijective.
$(iii) \Longrightarrow (i)$. c'est clair : une fonction bijective est en particulier injective.