Université Ziane Achour Djelfa
Faculté des sciences exactes et informatique
3 année LMD-physique-

Chapitre 3 : Résolution numérique des équations différentielles à conditions initiales

Une équation différentielle est une équation qui dépend d'une variable t et une fonction $x(t)$ et qui contient des dérivées de $x(t)$ .elle s'écrit :

$$f\left(t, x(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) = 0$$

Ou $x^n(t) = \frac{d^m x}{dt^m}$ ....(1)

La solution du problème consiste à trouver une fonction $x(t)$ sur l'intervalle fini de $t \in [t_0, t_0 + T]$ de $\mathbb{R}$

$t: temps\ , t_0: instant\ initial$

Les conditions initiales sont :$x(t_0), x^1(t_0), \ldots \ldots, x^{m-1}(t_0)$

1. Problème de cauchy

La plupart des méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles s'appliquent à des problèmes du type problème de cauchy suivant le nom donné par les mathématiciens. Ce problème se formule de la manière suivante :

Trouver $y(t)$ définie et dérivable sur $[t_0, t_0 + T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t)\right) & \forall t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$ ....(2)

$y(t)$ est un vecteur de m

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$y_0 = y(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_m(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ \vdots \\ y_{0,m} \end{bmatrix}$$ ....(3)

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = f(t, y(t)) \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \text{..........(4)}$$

Solution peut être exprimée analytiquement pour déterminer la fonction $y(t)$ par méthodes numériques.

2. Transformations vers un problème de cauchy

Dans matlab,la résolution de l'équation différentielle existe sous le nom ODES(ordinary differential equation solvers),ils résolvent le système d'équations (2)

Exemple :

%systeme d'équation%

Function dy_dt=exemple(t,y)

dy(1)=y(2) ;

dy(2)=2*y(2)-5*.y(1) ;

dy_dt=[dy(1) ;dy(2)]

3. TRAITEMENT d'une équation différentielle

Une équation en problème de cauchy sous la forme :

$$x^m(t) = \frac{dx^{(m-1)}}{dt} = \varphi(t, x(t), x^1(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \text{.............(5)}$$

$$y_1(t) \equiv x(t), y_2(t) \equiv x^{(1)}(t), \dots, y_m(t) \equiv x^{(m-1)}(t) \text{........(6)}$$

L'équation (5) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{m-1}(t)}{dt} = y^{(m)}(t) \\ \dfrac{dy_m(t)}{dt} = \varphi(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{cases} \text{..................(7)}$$

Ce système a donc la forme d'un problème de cauchy :

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{m-1}(t) \\ y_m(t) \end{cases} \qquad \text{et} \quad f\big(t, y(t)\big) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \\ y(t, y_1, \dots, y_m \end{bmatrix} \qquad (8)$$

L'équation (5) s'écrira :

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\big(t, y(t)\big) \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + T]$$

Il faut spécifier les conditions initiales $\big(y_1(t_0), y_0(t_0), \dots, y_m(t_0)\big)$

Formule générale :

$$\frac{d}{dt} y(t) = f(t, y(t))$$

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} dy = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big) ds$$

$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big) ds$………(9)

Donc la solution s'écrit sous la forme :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big) ds$$

4. Méthode itérative de PICARD

Dans la méthode de picard on peut itérer l'équation (9) afin de générer une série d'approximation à $y(t)$ dénoté $y_1(s), y_2(s), \dots, y_k(s), on\ utilise\ \ y(t_0) \approx y_0$

Sous l'intégrale :

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0) ds$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1) ds$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_2)ds$$
$$\vdots$$

$$y_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{k-1})ds$$

Exemple :

Trouver la solution analytique de l'équation $\frac{d}{dt}y(t) = t - y(t)$ pour condition limite (0,1)

Solution :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = t - y(t) \\ y(t_0 = 0) = 1 \end{cases}$$

Problème de Cauchy

Par la méthode de picard :

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)ds$$

$$y_1(t) = 1 + \int_{0}^{t} (s-1)ds = 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_1)ds$$

$$y_2(t) = 1 + \int_{t_0}^{t} \left[s - (1 - s + \frac{s^2}{2} \right] ds$$

$$y_2(t) = 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{6}$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} f(s, y_2)ds$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t \left[s - \left[1 - t + t^2 + \frac{t^3}{6} \right] \right] \mathrm{ds}$$

$$y_3(t) = 1 - t + t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24}$$

5. Solution d'une équation différentielle à l'aide de la série de taylor :

LA Forme générale de la série de taylor au point (x_0, y_0)

$$y(x) = y(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \cdots$$

Exemple :

Trouver la solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = x - y^2, on\ donne\ y(0) = 1$

SOLUTION

$$y(x) = y(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \cdots$$

$y' = x - y^2$

$y'' = 1 - 2yy'$

$y''' = 0 - 2(y'y' + yy'') = -2y'^2 - 2yy''$

Pour la condition initiale (0,1)

$y'(0,1) = 0 - 1^2 = -1$

$y''(0,1) = 1 - 2 \times (1)(-1) = 1 + 2 = 3$

$y''' = -2(-1)^2 - 2 \times 1 \times 3 = -8$

$$y(x) = 1 + \frac{(x - 0)}{1!} \times (-1) + \frac{(x - 0)^2}{2!} (3) + \frac{(x - 0)^3}{3!} (-8)$$

$$y(x) = 1 - x + \frac{3}{2} x^2 - \frac{8}{6} x^3$$

6. SOLUTION ANALYTIQUE PAR LA METHODE RUNGE –KUTTA

Les méthodes de RUNGE KUTTA sont bien utilisées dans la pratique, car elles présentent plusieurs avantages : facilite de programmation, stabilité de solution …

- **Méthode RUNGE KUTTA d'ordre 2 :**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + h) \end{cases}$$

Exemple :

Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On veut approcher la solution en h=0.2

SOLUTION :

$x_0 = 0, y_0 = 1, f(x_0, y_0) = 1, f(x, y) = y - \frac{2x}{y}, h = 0.2$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

$K_1 = 0.2f(x_0, y_0) = 0.2f(0,1) = 0.2(1 - \frac{0}{1}) = 0.2$

$K_2 = 0.2f(x_0 + 0.2, y_0 + 0.2) = 0.2f(0.2,1.2) = 0.2\left(1.2 - \frac{2(0.2)}{1.2}\right) = 0.173$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0.2 + 0.173) = 1.186$$

- **Méthode RUNGE KUTTA d'ordre 4**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \end{cases}$$

Exemple précédent :

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$K_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2f(0{,}1) = 0.2 \times 1 = 0.2$

$K_2 = 0.2f(0.1{,}1.1) = 0.183$

$K_3 = 0.2f(0.1{,}1.091) = 0.181$

$K_4 = 0.2f(0.2{,}1.181) = 0.168$

$$y(0.2) = y_0 + \frac{1}{6}(0.2 + 2 \times 0.183 + 2 \times 0.181 + 0.168) = 1.182$$

REMARQUE :

La méthode RUNGE KUTTA d'ordre 4 on doit évaluer f en 4 pas différents à chaque itération tandis que la méthode de RUNGE KUTTA d'ordre 2 nécessite seulement 2 évaluations à chaque étape .Ainsi, RUNGE KUTTA d'ordre 4 est plus précis que d'ordre 2