# Relations binaires

## 1 Généralités

**Définition 1.1 Relation binaire**

On appelle **relation binaire** sur un ensemble E toute partie $\mathcal{R}$ de $E^2$. Pour $(x, y) \in E^2$, la proposition $(x, y) \in \mathcal{R}$ se notera alors plutôt $x\mathcal{R}y$ et on dira dans ce cas que $x$ est en relation avec $y$.

**Point de vue «naïf»**

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E peut également être vue comme une propriété que chaque couple $(x, y) \in E^2$ est susceptible d'avoir ou non. C'est souvent le point de vue qu'on adopte en pratique.

**Exemple 1.1**

- $<, >, \leq, \geq$ définissent des relations binaires sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- La relation de divisibilité $|$ est une relation binaire sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.
- Soit $p \in \mathbb{Z}$. La relation $\equiv_p$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \equiv_p y \iff p|x - y$ est une relation binaire sur $\mathbb{Z}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. La relation $\equiv_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \equiv_a y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = x + ka$ est une relation binaire sur $\mathbb{R}$.

**Définition 1.2**

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.

- On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive** si pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $(x\mathcal{R}y \text{ ET } y\mathcal{R}x) \implies x = y$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $(x\mathcal{R}y \text{ ET } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

**Exemple 1.2**

- Les relations $\leq, \geq$ sont réflexives, antisymétriques et transitives sur $\mathbb{R}$.
- Les relations $<, >$ sont transitives sur $\mathbb{R}$.
- La relation $\mid$ est réflexive sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, antisymétrique sur $\mathbb{N}$ et non sur $\mathbb{Z}$, et transitive sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
- La relation $\equiv_p$ est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathbb{Z}$.
- La relation $\equiv_a$ est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathbb{R}$.
- La relation «être équivalent en $a$» est une relation réflexive, symétrique et transitive sur les fonctions définies au voisinage de $a$.
- La relation «être négligeable en $a$» est une relation transitive sur les fonctions définies au voisinage de $a$.
- La relation «être dominée en $a$» est une relation réflexive et transitive sur les fonctions définies au voisinage de $a$.
- Les relations $\subset, \supset$ sont des relations réflexives, antisymétriques et transitives sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ où E est un ensemble.

# 2 Relation d'équivalence

**Définition 2.1 Relation d'équivalence**

On appelle **relation d'équivalence** sur un ensemble E toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

**Exemple 2.1**

- La relation $\equiv_p$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
- La relation $\equiv_a$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
- La relation «être équivalent en $a$» est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage de $a$ (elle porte donc bien son nom).

**Définition 2.2 Classe d'équivalence**

Soient E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $a \in \mathrm{E}$.
On appelle **classe d'équivalence** de $a$ l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $a\mathcal{R}x$.

**Exemple 2.2**

Si $\mathbb{Z}$ est muni de la relation d'équivalence $\equiv_p$ et si $a \in \mathbb{Z}$, alors la classe d'équivalence de $a$ est $\{a + kp, k \in \mathbb{Z}\}$.

**Proposition 2.1 Partition d'un ensemble en classes d'équivalence**

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors les classes d'équivalences forment une **partition** de E, c'est-à-dire que

- toute classe d'équivalence est non vide ;
- la réunion des classes d'équivalence est égale à E ;
- deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit confondues.

# 3 Relation d'ordre

**Définition 3.1 Relation d'ordre**

On appelle **relation d'ordre** sur un ensemble E toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

**Exemple 3.1**

- Les relations $\leq, \geq$ sont des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- La relation $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ et non sur $\mathbb{Z}$.
- Les relations $\subset, \supset$ sont des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

**Remarque.** Si $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur un ensemble E. La relation binaire $\succcurlyeq$ définie sur E par $\forall(x,y) \in \mathrm{E}^2, x \succcurlyeq y \iff y \preccurlyeq x$ est également une relation d'ordre.

**Définition 3.2 Ordre total ou partiel**

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$. On dit que E est totalement ordonné par $\preccurlyeq$ (ou que l'ordre défini par $\preccurlyeq$ est total) si $\forall(x,y) \in \mathrm{E}^2$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Sinon on dira que E est partiellement ordonné par $\preccurlyeq$ (ou que l'ordre défini par $\preccurlyeq$ est partiel).

**Exemple 3.2**

- $\leq$ et $\geq$ définissent un ordre total sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
- $|$ définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
- $\subset, \supset$ définissent un ordre partiel sur $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dès que $\mathrm{card}(\mathrm{E}) \geq 2$.

**Définition 3.3 Majorant,minorant**

Soit A une partie d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$. Soit $m \in \mathrm{E}$.

- On dit que $m$ est un **minorant** de A si $\forall x \in \mathrm{A}$, $m \preccurlyeq x$. On dit alors que A est minorée.
- On dit que $m$ est un **majorant** de A si $\forall x \in \mathrm{A}$, $x \preccurlyeq m$. On dit alors que A est majorée.
- On dit que A est bornée si elle est minorée et majorée.

**Définition 3.4 Plus petit élément, plus grand élément**

Soit $\mathrm{A}$ une partie d'un ensemble $\mathrm{E}$ muni d'une relation d'ordre. Soit $m \in \mathrm{E}$.

- On dit que $m$ est un **plus petit élément** ou un **minimum** de $\mathrm{A}$ si $m$ est un minorant de $\mathrm{A}$ et si $m \in \mathrm{A}$.
- On dit que $m$ est un **plus grand élément** ou un **maximum** de $\mathrm{A}$ si $m$ est un majorant de $\mathrm{A}$ et si $m \in \mathrm{A}$.

**Proposition 3.1 Unicité du minimum et du maximum**

Soit $\mathrm{A}$ une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

- Si $\mathrm{A}$ admet un minimum, il est unique : on le note $\min \mathrm{A}$.
- Si $\mathrm{A}$ admet un maximum, il est unique : on le note $\max \mathrm{A}$.

**Exemple 3.3**

Si on considère la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, 0 est le maximum de $\mathbb{N}$ (aussi surprenant que cela puisse paraître) et 1 est le minimum de $\mathbb{N}$. La partie $\{2, 3\}$ n'admet ni maximum, ni minimum.

**Attention !** Une partie d'un ensemble ordonné n'admet pas toujours de maximum ou de minimum. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leq$, $[0, 1[$ admet 0 pour plus petit élément mais n'admet pas de plus grand élément.

**Définition 3.5 Borne inférieure et borne supérieure**

Soit $\mathrm{A}$ une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

- Si l'ensemble des minorants de $\mathrm{A}$ admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de $\mathrm{A}$ et on le note $\inf \mathrm{A}$.
- Si l'ensemble des majorants de $\mathrm{A}$ admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de $\mathrm{A}$ et on le note $\sup \mathrm{A}$.

**Exemple 3.4**

Dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre $\leq$, $]1, +\infty[$ admet 1 pour borne inférieure mais n'admet pas de borne supérieure.
On munit $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ de la relation d'ordre $\subset$ et on se donne $\mathcal{X}$ une partie de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. Alors $\inf \mathcal{X} = \bigcap_{\mathrm{A} \in \mathcal{X}} \mathrm{A}$ et $\sup \mathcal{X} = \bigcup_{\mathrm{A} \in \mathcal{X}} \mathrm{A}$.

Soit $\mathrm{A}$ une famille finie de $\mathbb{N}$ que l'on munit de la relation d'ordre de la divisibilité. Alors $\inf \mathrm{A}$ est le pgcd des éléments de $\mathrm{A}$ tandis que $\sup \mathrm{A}$ est le ppcm de ces eléments.

**Proposition 3.2**

Soit $\mathrm{A}$ une partie d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

- Si $\mathrm{A}$ admet un minimum, alors il admet une borne inférieure et $\min \mathrm{A} = \inf \mathrm{A}$.
- Si $\mathrm{A}$ admet un maximum, alors il admet une borne supérieure et $\max \mathrm{A} = \sup \mathrm{A}$.