Algèbre de Boole

1 Objectifs

- Connaitre les lois fondamentales de l'algèbre de Boole ainsi que les deux théorèmes de De Morgan,
- Savoir définir les trois opérations de base : Négation, ET (intersection), OU (union).
- Connaitre la table de vérité de chacune de ces opérations et leur porte logique.
- Savoir dresser la table de vérité d'une fonction logique et savoir l'implanter.
- Savoir donner une définition sous forme algébrique ou d'une table de vérité des opérations NON-OU, OU exclusif et NON-ET.
- savoir simplifier algébriquement une fonction logique

2 Introduction

L'algèbre de Boole est une algèbre binaire mise en œuvre par le mathématicien anglais **George BOOLE** (1815- 1864) pour étudier la logique. D'importantes applications du domaine des ordinateurs et des appareils numériques reposent sur elle [12],[13].

3 Terminologie

soit ρ un ensemble de variables à deux états, de valeurs de vérité 1 (vrai), 0 (faux), muni d'un nombre limité d'opérateurs : NON(¯), ET(X) , OU (+). ρ est une algèbre de Boole si les postulats suivants sont vérifiés : Soit a, b et c trois variables booléennes

Loi de Commutativité

$a + b = b + a$

$a \times b = b \times a$

Associativité

$a.(b.c) = (a.b).c = a.b.c$

$a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$

Distributivité

$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Identité (élément neutre)

$a + 0 = a$

$a \times 1 = a$

Complémentarité

$a + \bar{a} = 1$

$a \, x \, \bar{a} = 0$

$\bar{a}$ est le complément de a

Idempotence

$a + a = a$

$a \times a = a$

Absorption

$a + 1 = 1$

$a \times 0 = 0$

Lois de Morgan

$\overline{a + b} = \bar{a} \,.\, \bar{b}$

$\overline{a \,.\, b} = \bar{a} + \bar{b}$

Loi d'involution

$\overline{\overline{a}} = a$

4 Les opérations de base

4.1 NON (Négation)

• NON : est un opérateur unaire (une seule variable) qui à pour rôle d'inverser la valeur d'une variable. NON(X) est appelé aussi le complément de x. il est noté $\bar{X}$. La table de vérité de NON (x) est donnée par la table de vérité suivante[1].

X	$\bar{X}$
0	1
1	0

4.2 ET (AND)

Le ET est un opérateur binaire (deux variables) , à pour rôle de réaliser le Produit logique entre deux variables booléennes. il est aussi noté par : X.Y. La table de vérité de X.Y est donnée par le tableau 16.

X	Y	X.Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tableau 19 : Table de vérité de la fonction X.Y

4.3 OU (OR)

Le OU est un opérateur binaire (deux variables) , à pour rôle de réaliser la somme logique entre deux variables logiques. Il est aussi noté par : X + Y. La fonction X + Y est représentée par la table de vérité suivante (voir tableau 17).

X	Y	X+ Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tableau 20 : Table de vérité de la fonction X+Y

4.4 OPÉRATEURS NAND ET NOR

Ces deux fonctions sont utilisées pour générer toutes les fonctions booléennes possibles. Ils sont aussi appelés « Eléments de connexion universels », ils sont définis comme suit :

$$\text{NAND}(X, Y) = \overline{X \cdot Y} \quad , \quad \text{NOR}(X,Y) = \overline{X + Y}$$

[1] On expliquera plus tard comment obtenir une table de vérité à partir d'une fonction.

Les deux fonctions $\overline{X\,.Y}$ et $\overline{X+Y}$ sont représentées par la table de vérité suivante (voir tableau 18).

X	Y	X+Y	X.Y	$\overline{X+Y}$	$\overline{X.Y}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Tableau 21 : Table de vérité des fonctions NAND (X, Y) et NOR (X,Y)

4.5 Opérateur (OU exclusif) :

Il est définit par la fonction algébrique f :

$$f = x \oplus y = x\overline{y} + \overline{x}\,y$$

Cette expression nous permet de dresser la table de vérité du OU exclusif plus simple (voir tableau 19).

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tableau 22 : Table de vérité de la fonction OU exclusif.

Sa fonction inverse est donnée par :

$\overline{x \oplus y}$=$xy + \overline{x}\,\overline{y}$ cette fonction vaut 1 si et seulement si les deux entrées sont égales.

5 Dualité de l'algèbre de Boole :

Chaque axiome et chaque postulat possède un équivalent dual, où les éléments 0 sont remplacés par des 1, les 1 par des 0, les (·) par des (+) et vice et versa. Aussi, tout théorème de l'algèbre de Boole a son équivalent dual. Le théorème dual est formulé à partir du théorème de base en remplaçant les éléments 0 par des 1 (respectivement, les 1 par des 0) et les (·) par des (+) (respectivement, les (+) par des (·)) [14]. Voici quelques exemples :

$x.y + x.\overline{y} = x$, sa fonction dual est : $(x + y).(x + \overline{y}) = x$
$x + x.y = x$, sa fonction dual est $x.(x + y) = x$
$x + \overline{x}.y = x + y$, sa fonction dual est : $x.(\overline{x} + y) = x.y$

6 FONCTIONS BOOLÉENNES

Dans le cas général, on appelle fonction booléenne ou fonction logique toute combinaison de variables booléennes reliées par les opérateurs NON et OU. La valeur d'une fonction logique est égale à 1 ou 0 également.

Exemples :

$F2=\overline{(A+\overline{B})+\overline{A}.B}$

$F3=\overline{\overline{A+B}} + \overline{(\overline{\overline{A}+B)}+\overline{A}.B})$

$F4=xy+\overline{x}y\overline{z}+yz$

6.1 Les tables de vérité

Si une fonction logique possède N variables logiques, ça implique qu'il peut y avoir 2^n combinaisons de ses variables, donc cette même fonction peut avoir 2^n valeurs. Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle table de vérité.

Exemple : vérifions par exemple la loi d'associativité a.(b.c)=(a.b).c, déjà vu dans la section 3 de ce chapitre.

Solution: nous avons trois variables a, b et c, donc $2^3=8$ combinaisons possibles. D'où la table de vérité illustrée par le tableau 20:

a	**b**	**C**	(b.c)	a.(b.c)	(a.b)	(a.b).c
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Entrées en binaire naturel

Identité des colonnes a.(b.c) et (a.b).c

Tableau 23 : Table de vérité à 03 variables

6.2 Extraction de la fonction logique à partir de la T.V (FORMES CANONIQUES)

Une fonction peut être exprimée sous sa forme canonique à partir de sa propre table de vérité.

On appel forme canonique d'une fonction logique, la forme qui permette de localiser chaque ligne d'une table de vérité comportant un 1 ou 0. Il existe plusieurs formes canoniques : les plus utilisées sont la première et la deuxième forme.

6.2.1 *Première forme canonique (forme disjonctive)*

C'est la forme exprimée en somme de produits (SOP) (ou somme des **mintermes**). On dit aussi que c'est une disjonction de conjonctions. Cette forme est la forme la plus utilisée.
Le principe est de localiser toutes lignes dont la variable de sortie vaut 1 (supposons qu'il y a p lignes). Pour chaque ligne, faire correspondre un produit de tous les variables d'entrée sous la forme normale si la variable d'entrée est à 1, sous la forme complément si la variable d'entrée est à 0. Faire ensuite la somme logique de ces p produits.

Exemple:
Trouver la 1ère forme canonique S.O.P de la fonction à partir de la table de vérité suivante (tableau 21) :

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tableau 24 : Extraction des formes canoniques à partir de la table de vérité

Dans ce cas la forme canonique de F est : $\left(\bar{a}\,.\,\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.b.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.c\right)$.

6.2.2 *Deuxième forme canonique (conjonctive):*

C'est la forme exprimée en produit de sommes (POS) (ou produit des **maxtermes).**
Le principe est de localiser toutes lignes dont la variable de sortie vaut 0 (supposons qu'il y a g lignes). Pour chaque ligne, faire correspondre une somme de tous les variables d'entrée sous la forme normale si la variable d'entrée est à 0, sous la forme complément si la variable d'entrée est à 1. Faire ensuite le produit logique de ces g produits.

Exemple :
Prenons la table de vérité ci-dessus, la 2ème forme canonique POS de la fonction F est :

$$F_{SOP} = (a + b + \bar{c})\left(a + \bar{b} + c\right)\left(\bar{a} + \bar{b} + c\right)(\bar{a} + b + \bar{c})$$

Remarque *:*
On peut toujours ramener n'importe qu'elle fonction logique à l'une des formes canoniques.

Cela revient à rajouter les variables manquants dans les termes qui ne contiennent pas toutes les variables (les termes non canoniques). Cela est possible en utilisant les postulats de l'algèbre de Boole :

Exemple :
Mettre la fonction f= $xy+\overline{x}y\overline{z}+yz$ sous la première forme canonique.

Solution :
Nous remarquons qu'il manque la variable z dans le premier terme et la variable x dans le troisième terme.
Appliquons la loi Complémentarité *:*
$z+\overline{z} = 1$ *et* $x+\overline{x} = 1$
Alors f= $xy(z+\overline{z}) + \overline{x}y\overline{z}+ (x+\overline{x})yz$
Faisons la distribution
F= $xyz+ xy\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}+ xyz + \overline{x}yz$
D'après l'idempotence :
$xyz + xyz = xyz$

f devient : $xyz + xy\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}+\overline{x}yz$. Cette expression représente la première forme canonique de f.

6.3 Simplification algébrique des fonctions booléennes :

Simplifier une fonction revient à l'exprimer à l'aide d'un nombre minimum de termes. Pour cela il faut d'abord la développer, effectuer des mises en facteur et ensuite simplifier en utilisant les lois fondamentales et les relations démontrées. Néanmoins, les méthodes algébriques de simplification présentent un inconvénient majeur puisque elles ne sont pas systématiques, et leur efficacité dépend donc largement du savoir-faire de la personne qui les applique. Il existe d'autres méthodes de simplification comme la simplification par la table de karnaugh et la simplification par la méthode de Quine Mc-Cluskey. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux nombreuses références sur le sujet [12-15].

Exemple :
Simplifiez par la méthode algébrique les fonctions suivantes :
F1=$(x+y)(\overline{y} + z)(\overline{x} + z)$

Solution
Appliquons la distribution du premier terme sur le deuxième

F1= $(x\,\overline{y} + xz + y\overline{y} + yz)(\overline{x} + z)$
$y\,\overline{y} = 0$ (d'après le théorème de la complémentarité)

F1= $(x\,\overline{y} + xz + yz)(\overline{x} + z)$

Appliquons les lois de distributivité, commutativité et de l'associativité des opérateurs logiques, nous obtenons :

F1= $x\,\overline{x}\,\overline{y} + x\,\overline{y}z + x\,\overline{x}z + xzz + \overline{x}yz + yzz$

Sachant zz=z (d'après l'idempotence)
F1= $x\,\overline{y}z + xz + \overline{x}yz + yz$

D'après la distribution : F1= $xz(\overline{y}+1) + (\overline{x}+1)yz$
Sachant que $\overline{x}+1 = 1$ (loi d'élément absorbant) alors F1=xz+ yz

7 Circuits logique :

7.1 Définition

Un circuit logique est un ensemble de portes logiques reliées entre elles pour répondre à une expression algébrique [16].

7.2 Portes logiques

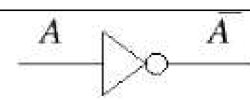
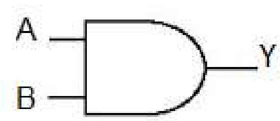
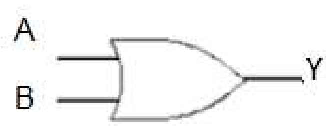
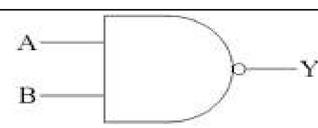
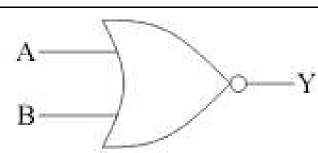
Opérateurs	Fonctions élémentaires	Portes
NOT (Inverseur)	$\overline{x}$	
AND	A.B (A∧B)	
OR	A+B (A∨B)	
NAND	$\overline{x.y}$ $\overline{(A\wedge B)}$	
NOR	$\overline{x+y}$ $\overline{(A\vee B)}$	
XOR	A⊕B	

Tableau 25 : Les portes logiques.

Une porte logique est un circuit électronique élémentaire qui permet de réaliser la fonction d'un opérateur logique de base. Le tableau 22 résume les portes logiques existantes :

7.3 Logigramme d'une fonction

C'est la traduction de la fonction logique en un schéma électronique. Connaissant les portes logiques, on peut construire immédiatement le logigramme de la fonction. Les variables d'entrées correspondent aux fils (lignes) électriques.

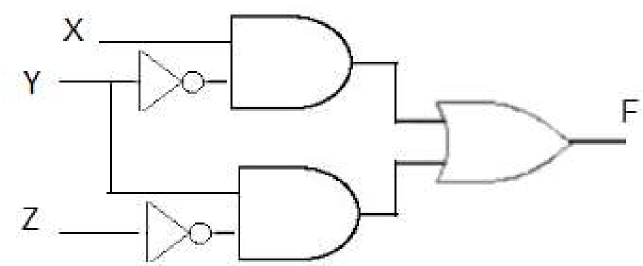
Exemple : Soit la fonction algébrique **F(X,Y,Z)** donnée par :

$$\mathbf{F(X,Y,Z)} = X\overline{Y} + Y\overline{Z}.$$

Donner le logigramme de F.

Solution

Il existe 03 variables d'entrées donc 3 lignes dans le logigramme, la variable Y est inversé dans le premier terme et relié avec x avec une porte AND ainsi que Z est inversé dans le deuxième terme et relié avec Y avec une porte AND. Les deux termes sont reliés par une porte OU . Le schéma en dessous représente le logigramme de la fonction F.



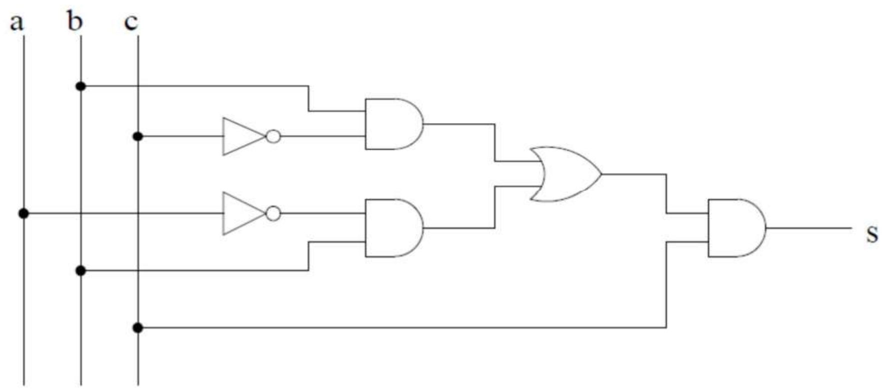
7.4 Étapes de conception et de réalisation d'un circuit logique

Pour faire l'étude et la réalisation d'un circuit logique, il faut suivre les étapes suivantes :

- Il faut définir les variables d'entrée.
- Il faut définir les variables de sortie.
- Etablir la table de vérité.
- Ecrire les équations algébriques des sorties (à partir de la table de vérité).
- Effectuer des simplifications.
- Faire le schéma avec un minimum de portes logiques.

Exemple

Soit le circuit logique de la fonction de sortie S :



1. Dresser la table de vérité correspondante à S.
2. Donner la première forme canonique de S (SOP).
3. Simplifier la forme canonique de s
4. Tracer le logigramme de S simplifiée

Solution

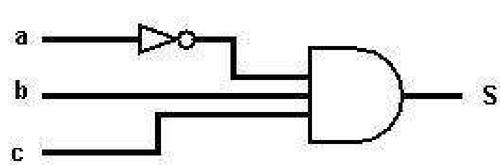
1. On doit d'abord extraire la forme algébrique de S à partir du circuit logique.

$$S = (b\bar{c} + \bar{a}b).c$$

La table de vérité de S est donnée par le tableau suivant. Nous avons 03 variables d'entrées ce qui donne 8 lignes dans la table de vérité.

A	b	C	$\bar{a}$	$\bar{c}$	$b\bar{c}$	$\bar{a}b$	$b\bar{c}+\bar{a}b$	S
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

2. Nous remarquons qu'il y a une seule ligne dont S=1, ce qui fait que la forme SOP (S) contient seulement un terme. donc, SOP(S)= $\bar{a}b.c$
3. La fonction simplifiée = SOP(S) = $\bar{a}b.c$
4. Logigramme de S simplifiée est donné par le schéma suivant



8 Exercices

1. Simplifiez algébriquement les fonctions booléennes suivantes avec un nombre minimum d'opérateurs :

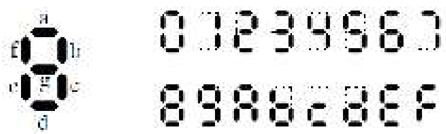
$$F(A,B,C,D)=\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}+\bar{A}.B.\bar{C}.D+A.B.C.D+A.\bar{B}.C.\bar{D}$$

$$G(A,B,C,D)=A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}+A.B.\bar{C}.D+\bar{A}.B.C.D+\bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D}$$

$$H(A,B,C,D)=F(A,B,C,D)+G(A,B,C,D)$$

$$K(A,B,C,D)=F(A,B,C,D).G(A,B,C,D)$$

2. On cherche à réaliser un circuit afficheur hexadécimal pour une calculette. L'entrée est un nombre n en binaire sur 4 bits : b0, b1, b2, b3. Les 7 sorties sont appelées a, b, c, d, e, f, g. Une sortie est à 1 si le segment correspondant est noir.



   - Ecrire les tables de vérité des 7 sorties..
   - En déduire le circuit correspondant.

3. Soient les deux fonctions algébriques F1 et F2

$$F1 = (X+Y)(XY+\bar{Z})Z$$
$$F2 = XY + ZT + X(\bar{Y}T+X) + \bar{X}T$$

   - Établir les tables de vérité des deux fonctions.
   - Ecrire F1 et F2 sous les deux formes canoniques SOP et POS.
   - Simplifier les deux fonctions par la méthode algébrique.
   - Soit la fonction algébrique **F(X,Y,Z)** donnée par :

4. Soit la fonction F tel que : $F(X,Y,Z) = [(X+Y)(XY+\bar{Z})]Z + \bar{X}Z$
   - Établir la table de vérité de **F(X,Y,Z)**.
   - Ecrire **F(X,Y,Z)** sous la forme **SOP** puis la forme **POS**.
   - Simplifier **F(X,Y,Z)** en utilisant la méthode algébrique.
   - Tracer le logigramme de la fonction **F(X,Y,Z)** simplifiée, en utilisant uniquement les portes **NAND.**

5. Considérons la fonction définie par la table de vérité suivante :

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

   a) Donnez la première forme canonique de **F (S.O.P)**
   b) Faire le schéma logique de la première forme canonique de **F(S.O.P)**
   c) Simplifiez la première forme canonique de **F(S.O.P)** par la méthode algébrique
   d) Faire le schéma logique de cette première forme canonique de **F(S.O.P)** simplifiée
   e) Donnez la deuxième forme canonique de **F(P.O.S)**

6. Soit le circuit logique suivant :
   - Donner la fonction logique de sortie.