Polycopié de cours

RELATIVITÉ RESTREINTE

Licence 3 Physique Fondamentale

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE II

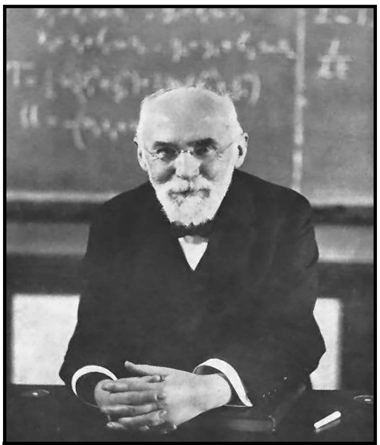
TRANSFORMATIONS DE LORENTZ–POINCARÉ

TRANSFORMATION DE LORENTZ–POINCARÉ

I. INTRODUCTION

« A problem well stated is a problem half solved» Charles F. Kettering

Les transformations de Lorentz sont des transformations linéaires d'un point dans l'espace-temps à quatre dimensions de Minkowski. Pour expliquer le résultat de l'expérience de Michelson et Morley, Hendrik A. Lorentz introduit en 1902 ces transformations et explique l'absence de déphasage dans l'expérience par la contraction *réelle* de l'espace dans la direction de déplacement de la terre par rapport à l'éther.

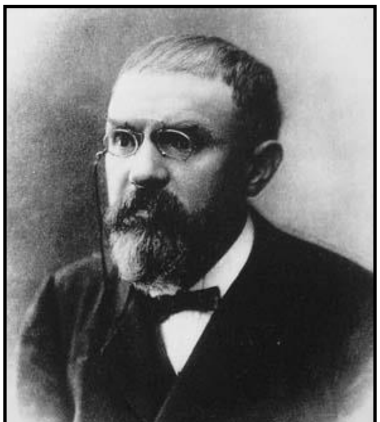


Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

En 1905 Henri Poincaré donne la forme finale de ces transformations, qu'il attribue à Lorentz, car les deux savants étaient en correspondance et avaient connaissance de leurs travaux respectifs. Poincaré montre alors l'invariance des équations de Maxwell par la transformation de Lorentz dans le cas de référentiels galiléens.

Les transformations de Lorentz-Poincaré sont un sous-groupe du groupe de transformations de Poincaré dont l'un des invariants est la vitesse de la lumière. A cette époque ces transformations étaient considérées comme une rotation de l'espace et du temps qui induisait une contraction physique de l'espace et une dilatation du temps, toutes les deux réelles selon Poincaré et Lorentz, en gardant le temps et le référentiel absolus de l'éther.

Par la suite et durant la même année 1905, Albert Einstein partant du principe d'équivalence entre tous les référentiels galiléens, et en prenant comme postulat de départ l'invariance de la vitesse de la lumière (dans le vide) pour tous ces référentiels, montre que l'existence du référentiel absolu de l'éther n'est plus nécessaire pour expliquer les résultats de l'expérience de Michelson et Morley.

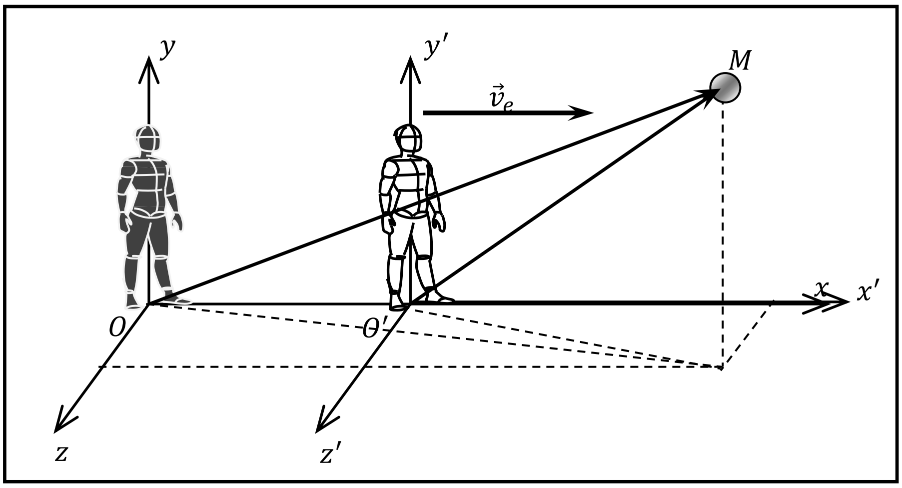


Henri Poincaré (1854-1912)

Dans la théorie de la relativité restreinte d'Einstein la contraction des espaces et la dilatation des durées entre deux événements *ne sont pas absolues* mais dépendent du référentiel dans lequel un observateur donné effectue la mesure.

II. TRANSFORMATION DE LORENTZ-POINCARÉ

Soit deux observateurs liées à deux référentiels galiléens $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ en translation uniforme d'une vitesse $\vec{v}_e = v_e.\vec{e}_x$ l'un par rapport à l'autre. Les axes respectifs $(Ox),(Oy),(Oz)$ et $(O'x'),(O'y'),(O'z')$ des deux référentiels étant toujours parallèles.
Pour simplifier, nous supposerons qu'à l'instant initial les origines O et O' étaient confondu.



La transformation de Lorentz, que nous allons montrer, se base sur l'invariance de la vitesse de la lumière dans les deux référentiel, bien que historiquement Lorentz avait cherché une transformation qui laisse invariantes les équations de Maxwell. Mais puisque l'équation de propagation de l'onde électromagnétique découle directement de ces équations, alors l'invariance des équations de Maxwell implique l'invariance de la vitesse de la lumière pour tous les référentiels galiléens.
La distance parcourue par un rayon lumineux n'étant pas la même dans les deux référentiels alors que la vitesse de la lumière doit être invariante, il est donc évident que les intervalles de temps mesurés entre deux événements ne seront pas absolus mais varieront d'un observateur à un autre $\Delta t \neq \Delta t'$. Le temps doit donc subir une transformation comme les variables d'espace.

Les deux référentiels étant confondus à un instant initial commun $(t_0 = t'_0 = 0)$, **les transformations de Lorentz s'écrivent** :

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v_e^2/c^2)}}\left(\dfrac{v_e}{c^2}x' + t'\right) \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v_e^2/c^2)}}(x' + v_e.t') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ct = \gamma_e(\beta_e.x' + ct') \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e.ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Tel que

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} \qquad \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-(v_e^2/c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$$

β_e et γ_e sont des constantes. Il est clair que pour que le facteur relativiste (ou facteur de Lorentz) γ_e reste toujours réel il faut que $\beta_e < 1$ et $v_e < c$.

Etablissement

Linéarité : La transformation da Lorentz est une transformation linéaire.

$$\begin{cases} ct = m.x' + n.ct' \\ x = k.x' + l.ct' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Pour trouver la transformation de Lorentz il faut trouver les facteurs : k, l, m, n.

Réciprocité

Si nous nous plaçons à l'origine O' nous aurons $x' = 0$ et $x = v_e.t$ car l'origine O' se déplace à une vitesse v_e par rapport au référentiel lié à l'origine O. Ce qui donne :

$$\begin{cases} ct = n.ct' & (1) \\ v_e.t = l.ct' & (2) \end{cases}$$

En divisant les deux équations nous trouvons $l = \beta_e.n$

D'autre part, si nous nous plaçons à l'origine O nous aurons $x = 0$ et $x' = -v_e.t'$ car l'origine O se déplace à une vitesse $-v_e$ par rapport au référentiel lié à O'. Ce qui donne :

$$\begin{cases} ct = -m.v_e.t' + n.ct' & (3) \\ k.v_e.t' = l.ct' & (4) \end{cases}$$

De l'équation (4) nous avons $l = \beta_e.k$ ou $k = n$

Donc les équations de la transformation s'écrivent

$$\begin{cases} ct = m.x' + k.ct' \\ x = k.(x' + \beta_e.ct') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Invariance de la vitesse de la lumière

Un rayon lumineux se propage du point O au point M avec une vitesse c. L'équation donnant le déplacement du front d'onde du rayon est

$$r = ct \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (5)$$

De la même manière, le même rayon se propage du point O' au point M avec la même vitesse c. Ici nous avons considéré que le rayon est émis à l'instant initial $(t_0 = t'_0 = 0)$ alors que les deux origines O et O' coïncident. Dans ce cas, l'équation de déplacement du front d'onde est donnée par

$$r' = ct' \qquad \text{ou} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad (6)$$

En remplaçant x et ct trouvés précédemment dans l'équation (5) nous trouvons.

$$(k^2 - m^2)\,x'^2 + y^2 + z^2 + 2k(k\beta_e - m).x'.ct' = k^2(1 - \beta_e^2).c^2t'^2$$

En comparant avec l'équation (6) avec $y = y'$ et $z = z'$, il vient que

$$(k^2 - m^2) = 1 \quad ; \quad k^2(1 - \beta_e^2) = 1 \quad ; \quad 2k(k\beta_e - m) = 0$$

Et donc

$$k = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} = \gamma_e \quad \text{et} \quad m = k\beta_e$$

D'où la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(\beta_e.x' + ct') \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e.ct') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Forme vectorielle.

En posant $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$; $\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$ et $\vec{\beta}_e = \vec{v}_e/c$

L'expression vectorielle de la transformation de Lorentz pour deux référentiels galiléens en translation uniforme d'une vitesse v_e dans une direction quelconque $\vec{n} = \vec{v}_e/v_e$.

$$\begin{cases} ct = \gamma_e\left(ct' + \vec{\beta}_e \bullet \vec{r}'\right) \\ \vec{r} = \vec{r}' + \left(\dfrac{\gamma_e - 1}{\beta_e^2}\right)(\vec{\beta}_e \bullet \vec{r}')\vec{\beta}_e + \gamma_e\vec{\beta}_e.ct' \end{cases}$$

Forme hyperbolique.

On définit la rapidité $r_e = \operatorname{arctanh}\beta_e$ donc $\beta_e = \tanh r_e$ et $\gamma_e = \cosh r_e$.

La transformation de Lorentz s'écrit alors sous la forme.

$$\begin{cases} ct = \sinh r_e\,.\,x' + \cosh r_e\,.\,ct' \\ x = \cosh r_e\,.\,x' + \sinh r_e\,.\,ct' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Propriétés des transformations de Lorentz-Poincaré

Comme nous l'avons vu précédemment

a. *La transformation de Lorentz est linéaire.*

b. *La transformation de Lorentz est réciproque.*

Les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont équivalents par rapport à la transformation. Nous pouvons donc obtenir les relations donnant les coordonnées d'un point dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction de ces coordonnées dans le référentiel $\mathcal{R}$ en inversant la transformation ou en changeant simplement v_e en $-v_e$ (ou bien remplacer β_e en $-\beta_e$).

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(\beta_e.x' + ct') \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e.ct') \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Il en découle qu'il n'ya pas de référentiel absolu ou préférentiel et que tous les référentiels galiléens sont équivalents dans cette transformation.

c. *La vitesse de la lumière est invariante par la transformation de Lorentz dans tous les référentiels galiléens. Elle constitue une vitesse limite pour tous les référentiels* $(v_e < c)$.

d. *La grandeur* (s) *définie par :* $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ *est invariante par la transformation de Lorentz pour tous les référentiels galiléens.*

En remplaçant x, y, z et ct par la transformation de Lorentz, nous avons

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \gamma_e^2(1 - \beta_e^2).c^2{t'}^2 - \gamma_e^2(1 - \beta_e^2)\,{x'}^2 - {y'}^2 - {z'}^2$$

Ce qui donne

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2{t'}^2 - {x'}^2 - {y'}^2 - {z'}^2 \quad \text{et} \quad s^2 = {s'}^2$$

III. ESPACE-TEMPS, ÉVÉNEMENTS ET INTERVALLES

En mécanique classique le mouvement d'un corps par rapport à un référentiel donné est défini par les équations du mouvement en fonction un temps (équations horaires, vitesses, accélérations ou équations différentielles). D'un autre coté, le mouvement relatif est une étude comparative de ces équations dans différents référentiels (galiléens dans notre cas), ceci revient à trouver les lois de transformations des positions des vitesses et des accélérations, le temps étant le même, absolu dans tous les référentiels.

Comme la relativité restreinte présuppose que le temps mesuré dépend du référentiel d'étude, le temps est alors considéré comme une quatrième dimension, on introduit ainsi une quatrième coordonnée (ct) et l'étude du mouvement ne passe plus par les équations horaires mais par la notion d'événement.

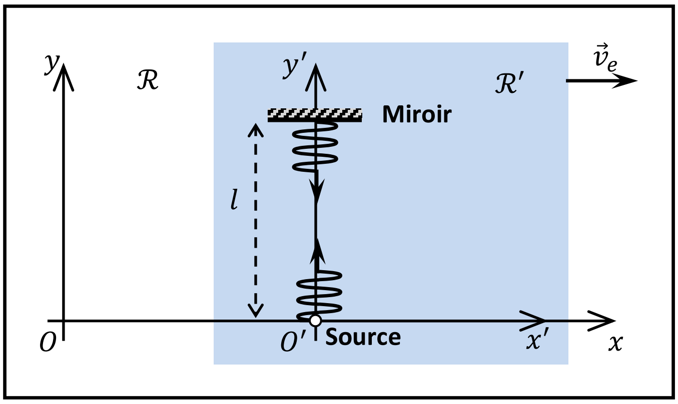
Evénement

Un événement est un phénomène mécanique (lié au mouvement) qui se produit à *une position donnée* et à *un instant donné, par rapport à un référentiel* préalablement définit. Un événement est donc *représenté par un point dans l'espace-temps à quatre dimensions* de Minkowski.

Lors d'un changement de référentiel galiléen et en utilisant la transformation de Lorentz, il est clair que la « position » du point représentant l'événement change d'un référentiel à un autre. Repérer un événement E dans l'espace-temps par ses coordonnées (ct_E, x_E, y_E, z_E) veut dire qu'un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}$ verra le phénomène (événement) se produire au point (x_E, y_E, z_E) et à l'instant t_E. Par contre un autre observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$ verra le même événement se produire au point (x'_E, y'_E, z'_E) à l'instant t'_E et par conséquent il va le représenté par ses coordonnées $(ct'_E, x'_E, y'_E, z'_E)$ dans l'espace-temps à quatre dimensions. Les coordonnées $(ct'_E, x'_E, y'_E, z'_E)$ étant reliées aux coordonnées (ct_E, x_E, y_E, z_E) par la transformation de Lorentz.

Exemple

Prenons l'exemple d'un rayon lumineux qui se propage à partir d'une source placée au point O' du référentiel $\mathcal{R}'$ et qui se déplace avec ce dernier avec une vitesse d'emportement $\beta_e c$. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ le rayon se propage parallèlement à l'axe $(O'y')$ pour atteindre un miroir placé sur cet axe à une distance l de O'. le rayon lumineux se réfléchit ensuite sur le miroir et fait le trajet inverse suivant l'axe $(O'y')$ pour revenir au point O'.



Ecrivons les coordonnées des événements suivants par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$.

Evénement E_0 : Emission du rayon lumineux par la source en O' $(t'_0 = 0)$.
Evénement E_1 : Le rayon lumineux atteint le miroir en $y'_1 = l$ $(t'_1 = l/c)$.
Evénement E_2 : Le rayon lumineux revient au point O' $(t'_2 = 2l/c)$.

D'où

$$E_0\begin{pmatrix} ct'_0 = 0 \\ x'_0 = 0 \\ y'_0 = 0 \\ z'_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad ; \quad E_1\begin{pmatrix} ct'_1 = l \\ x'_1 = 0 \\ y'_1 = l \\ z'_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad ; \quad E_2\begin{pmatrix} ct'_2 = 2l \\ x'_2 = 0 \\ y'_2 = 0 \\ z'_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

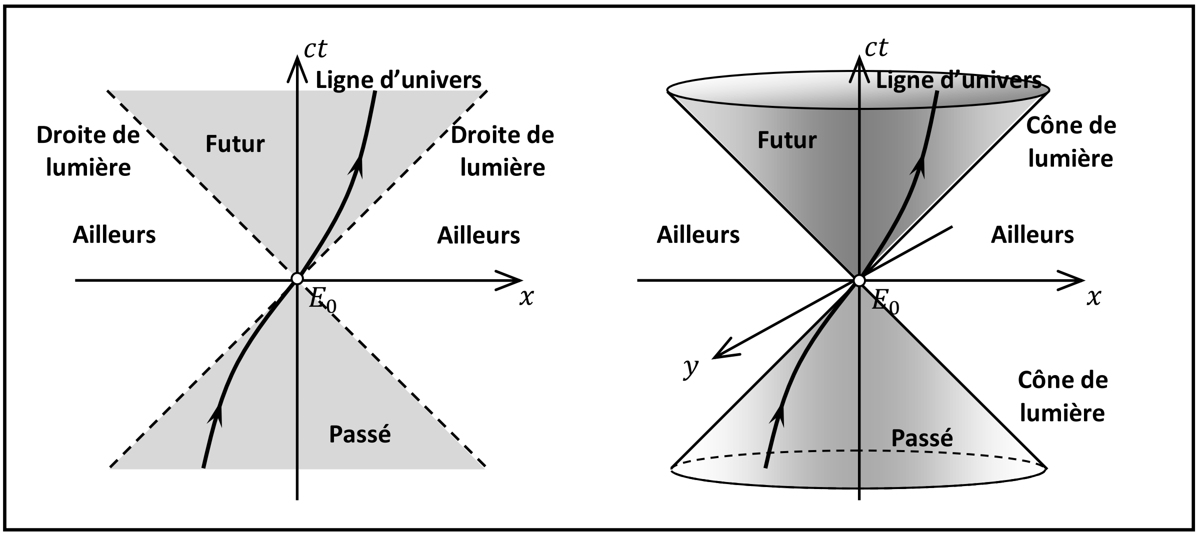
Et la transformation de Lorentz donne

$$E_0\begin{pmatrix} ct_0 = 0 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad ; \quad E_1\begin{pmatrix} ct_1 = \gamma_e l \\ x_1 = \gamma_e \beta_e l \\ y_1 = l \\ z_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad ; \quad E_2\begin{pmatrix} ct_2 = 2\gamma_e l \\ x_2 = 2\gamma_e \beta_e l \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Représentation dans l'espace-temps de Minkowski

L'espace-temps de Minkowski est un espace mathématique à quatre dimensions : une dimension dite « temporelle » et trois dimensions spatiales. Donc, pour représenter un repère dans cet espace il nous faut quatre axes, un axe temporel représentant la coordonnée (ct) et trois axes d'espace (x, y, z). La multiplication par la vitesse de la lumière dans le vide c permet d'exprimer l'équivalence entre la dimension temporelle et spatiale, le mètre étant défini à partir de la seconde en prenant c comme une constante universelle.

Comme il nous est impossible de représenter – sans projection – les quatre dimensions. Dans la figure ci-dessous nous avons représenté l'espace-temps pour deux dimensions, une spatiale et une temporelle dans le cas ou le corps se déplace sur une droite (à gauche), puis pour trois dimensions, deux spatiales et une temporelle dans le cas ou le corps se déplace dans un plan (à droite).



Comme nous l'avons dit plus haut, un événement est représenté dans l'espace-temps par un point ayant quatre coordonnées (ct, x, y, z).

Le point d'origine $(0,0,0,0)$ correspond à l'événement E_0 où le corps assimilé à un point matériel se trouve en $O(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ à l'instant $t_0 = 0$.

Puisque la vitesse de la lumière est une vitesse limite à ne pas dépasser pour tout corps matériel. Les événements concernant un point matériel quelconque, qu'ils précèdent ou qu'ils viennent suite à l'événement E_0 doivent vérifier la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2t^2$$

L'égalité étant réalisée dans le cas de la lumière.

Donc tous les points représentant ces événements doivent se trouver à l'intérieur d'un cône centré en E_0 appelé *cône de lumière.*

- La partie supérieure de l'intérieur du cône contient tous les *événements futurs* pouvant être joints à partir de E_0.
- La partie inférieure de l'intérieur du cône contient tous les *événements passés* à partir desquels l'événement E_0 peut être joint.
- La partie à l'extérieur du cône est appelée *l'ailleurs.*

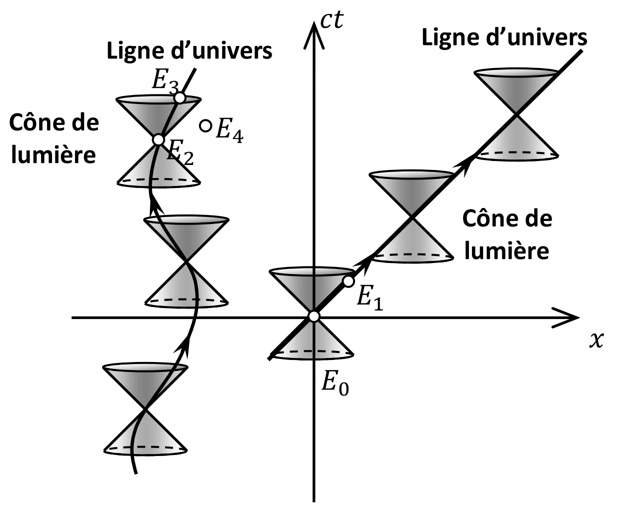
Dans la représentation à deux dimensions (figure page précédente à gauche) le cône de lumière est un « cône plat » délimité par deux droites $x = \pm ct$.
Dans la représentation à trois dimensions (figure page précédente à droite) le cône de lumière est la surface donnée par $x^2 + y^2 = c^2t^2$.
Dans le cas général à quatre dimensions le cône de lumière est une hyper-surface à trois dimensions (hyper-cône) donnée par $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.

La ligne d'univers est une succession de points des événements représentant l'évolution du point matériel, cet ensemble de point décrit une courbe dans l'espace-temps à quatre dimensions.

- La ligne d'univers doit être entièrement contenue à l'intérieur de chacun des cônes de lumière centrés en chacun de ses points successifs représentant les événements.
- La ligne d'univers doit toujours aller dans le sens croissant du temps (de bas en haut).

s_{23}^2 est un intervalle du genre temps.
s_{24}^2 est un intervalle du genre espace.
s_{01}^2 est un intervalle du genre lumière.

Aucune ligne d'univers ne peut relier les événements E_2 et E_4.



Intervalle espace-temps entre deux événements

En mécanique classique l'intervalle de temps entre deux événements est invariant par changement de référentiel, le temps étant absolu dans tous les référentiels.

En relativité restreinte l'intervalle de temps Δt *n'est pas invariant* lors d'un changement de référentiels. La transformation de Lorentz définit un autre invariant appelé intervalle espace-temps entre deux événements.

Soit deux événements E_1 et E_2 repérés par leurs coordonnées respectives (ct_1, x_1, y_1, z_1) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) dans l'espace-temps à quatre dimensions. Nous appelons intervalle entre les deux événements la grandeur s_{12} définie par la relation donnant son carré

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Ou

$$s_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

L'intervalle entre deux événements est invariant par la transformation de Lorentz pour tous les référentiels galiléens. En effet, comme la transformation de Lorentz est linéaire, nous avons

$$\begin{cases} c(t_2 - t_1) = \gamma_e\big(\beta_e.(x_2' - x_1') + c(t_2' - t_1')\big) \\ x_2 - x_1 = \gamma_e\big((x_2' - x_1') + \beta_e.c(t_2' - t_1')\big) \\ y_2 - y_1 = y_2' - y_1' \\ z_2 - z_1 = z_2' - z_1' \end{cases}$$

En remplaçant dans la définition de l'intervalle

$$s_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \gamma_e^2(1 - \beta_e^2).c^2\Delta t'^2 - \gamma_e^2(1 - \beta_e^2)\,\Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$

Comme $\gamma_e^2 = (1 - \beta_e^2)^{-1}$, nous avons donc

$$s_{12}^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = {s'_{12}}^2$$

- Si $s_{12}^2 > 0$ c'est-à-dire $c^2\Delta t^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ on dit que *l'intervalle est du genre temps*. Dans ce cas le point représentant l'événement E_2 se trouve à l'intérieur du cône de lumière centré au point correspondant à l'événement E_1.

- Si $s_{12}^2 < 0$ c'est-à-dire $c^2\Delta t^2 < \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ on dit que *l'intervalle est du genre espace*. Dans ce cas le point représentant l'événement E_2 se trouve à l'extérieur du cône de lumière centré au point correspondant à l'événement E_1.

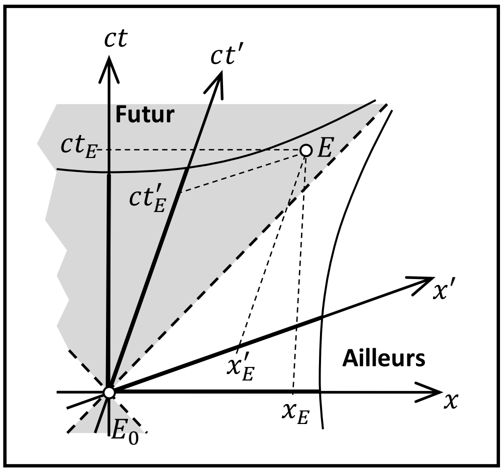
- Si $s_{12}^2 = 0$ c'est-à-dire $c^2\Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ on dit que *l'intervalle est du genre lumière.* Dans ce cas le point représentant l'événement E_2 se trouve sur la surface du cône de lumière centré au point correspondant à l'événement E_1.

Exemple

Calculer le carré de l'intervalle espace-temps entre les deux événements suivants : $E_1(x_1 = 0{,}2\,m\,, t_1 = 3\,ns)_{\mathcal{R}}$ et $E_2(x_2 = 0{,}8\,m\,, t_2 = 6\,ns)_{\mathcal{R}}$, puis vérifier qu'il est invariant par la transformation de Lorentz pour un référentiel $\mathcal{R}'$ ayant une vitesse $v_e = (2\sqrt{6}/5)c$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Diagramme de Minkowski

Le diagramme de Minkowski est une représentation de l'espace temps à deux dimensions (une dimension spatiale et une dimension temporelle) qui permet de visualiser les résultats d'un changement de référentiel dans la relativité restreinte.



Dans ce diagramme sont représentés les coordonnées spatio-temporelles d'un même événement suivant les axes (x, ct) associés au référentiel $\mathcal{R}$ considéré comme fixe et suivant les axes (x', ct') associés au référentiel $\mathcal{R}'$ considéré en mouvement de translation uniforme avec une vitesse $\beta_e c$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Il ne faut pas cependant confondre l'espace-temps de Minkowski et les axes (x, ct) et (x', ct') dans cet espace d'une part et l'espace « visible » où sont représenté les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ d'autre part. Si les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en mouvement l'un par rapport à l'autre dans l'espace « visible » les axes (x', ct') sont fixes par rapport aux axes (x, ct) dans l'espace-temps de Minkowski.

Détermination des axes (x', ct').

Les points appartenant à l'axe d'espace x' sont donnés par $ct' = 0$.
En utilisant la transformation de Lorentz.

$$ct' = \gamma_e(-\beta_e.x + ct) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ct = \beta_e.x$$

Donc, dans le système d'axes orthonormés (x, ct) la droite des espaces x' est une droite passant par l'origine et de pente $\tan\alpha = \beta_e$.

Les points appartenant à l'axe de temps ct' sont donnés par $x' = 0$.
En utilisant la transformation de Lorentz.

$$x' = \gamma_e(x - \beta_e.ct) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ct = \frac{1}{\beta_e}x$$

Donc, dans le système d'axes orthonormés (x, ct) la droite des temps ct' est une droite passant par l'origine et de pente $\tan\alpha = 1/\beta_e$.

Dans le système d'axes orthonormés (x, ct) les deux axes x' et ct' sont symétriques par rapport à la droite médiane du premier quadrant. Plus la vitesse de déplacement $\beta_e c$ du référentiel $\mathcal{R}'$ est grande par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ plus les deux axes se rapprochent de la médiane.

Graduation des axes (x, ct) *et* (x', ct').

La graduation des deux systèmes axes se fait en utilisant l'invariance de l'intervalle entre un événement E_u donné et l'événement E_0 tel que $s_{0u}^2 = {s'_{0u}}^2 = \pm 1$.

Pour les intervalles genre temps tous les point ayant $s_{0u}^2 = c^2t^2 - x^2 = +1$ forment une hyperbole. Le point d'intersection de cette hyperbole avec l'axe ct donne $ct = 1$ car $x = 0$. Le point d'intersection de cette hyperbole avec l'axe ct' donne $ct' = 1$ car $x' = 0$.

Pour les intervalles genre espace tous les point ayant $s_{0u}^2 = c^2t^2 - x^2 = -1$ forment aussi une hyperbole. Le point d'intersection de cette hyperbole avec l'axe x donne $x = 1$ car $ct = 0$. Le point d'intersection de cette hyperbole avec l'axe x' donne $x' = 1$ car $ct' = 0$.

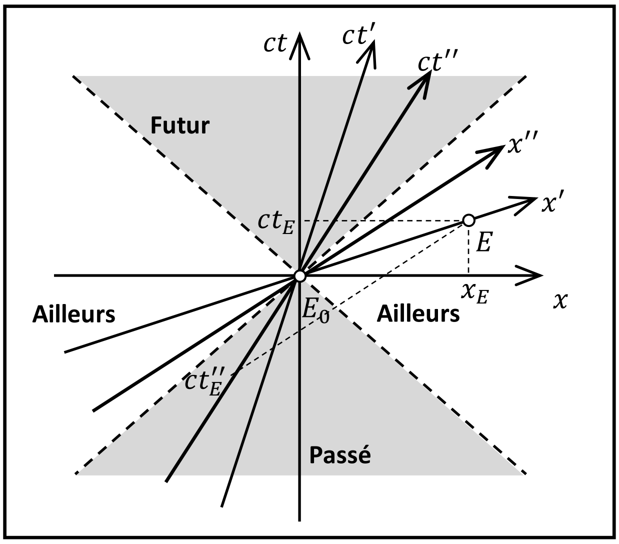
Détermination des coordonnées d'un événement.

Les coordonnées (x_E, ct_E) et (x'_E, ct'_E) d'un même événement E se trouvent par projection sur chaque axe, parallèlement à l'autre axe du référentiel.
D'après la figure de la page précédente, nous voyons bien que dans le cas général les coordonnées (x'_E, ct'_E) différent des coordonnées (x_E, ct_E) même si le carré de l'intervalle $s_{0E}^2 = {s'_{0E}}^2$ est invariant.

Causalité

Pour un intervalle genre temps, nous pouvons toujours trouver un référentiel $\mathcal{R}'$ ayant une vitesse donnée $\beta_e c$ par rapport à $\mathcal{R}$ et pour lequel l'axe du temps ct' passe par l'événement E. Dans ce cas $x'_E = 0$, donc les événements E_0 et E se passent au même endroit (Voir le diagramme de Minkowski de la page précédente). On dit alors que les deux événements sont localisés.

De la même manière, pour un intervalle genre espace, nous pouvons toujours trouver un référentiel $\mathcal{R}'$ ayant une vitesse donnée $\beta_e c$ par rapport à $\mathcal{R}$ et pour lequel l'axe des espaces x' passe par l'événement E. Dans ce cas $ct'_E = 0$, donc les événements E_0 et E se passent au même instant. On dit alors que les deux événements sont simultanés pour l'observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$.



Aussi dans le cas d'un intervalle genre espace, nous pouvons trouver un référentiel $\mathcal{R}''$ pour lequel l'ordre temporel des événements E_0 et E est inversé par rapport à l'ordre temporel dans le référentiel $\mathcal{R}$. C'est-à-dire que si $t_E > t_0$ (l'événement E se produit après E_0) pour un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}$, nous pourrons trouver un référentiel $\mathcal{R}''$ pour lequel $t''_E < t''_0$ (l'événement E se produit avant E_0).

D'un point de vue physique ces événements ne peuvent décrire des phénomènes liés au même point matériel car, d'une part comme nous l'avons dit plus haut, ils ne peuvent pas être reliés par une ligne d'univers (vitesse supérieure à c), d'autre part l'inversion de l'ordre temporel ne respecte pas le principe de causalité qui stipule que : « *tout effet a une cause et la cause précède l'effet dans le temps pour tout référentiel galiléen* ».

Simultanéité

La simultanéité est une notion importante pour tout processus de mesure lié au mouvement. Par exemple, lors de la *mesure du temps* de passage : dire qu'un point matériel se trouve dans une position donnée à un instant donné, revient à dire que le point matériel en question se trouvait à cette position *en même temps* que l'aguille d'une horloge indiquait un temps donné. Un autre exemple concernant la *mesure de l'espace* : dire qu'un corps a une longueur donné revient à dire que ses extrémités coïncident avec les différentes graduations d'une règle (étalon) *au même moment*.

Il faut noter que nous serons amenés à mesurer certains événements se produisant au même moment mais à des endroits différents par rapport au même référentiel. Pour cela il nous faudra utiliser deux horloges différentes. La simultanéité est vérifiée si les deux horloges indiquent le même résultat à condition que les deux horloges soient préalablement *synchronisées*.

Définition de la simultanéité.

Prenons le cas de deux événements E_1 et E_2 concernant deux points matériels distants. *Si ces deux événements se produisent au même instant* $(t_1 = t_2)$ *mesuré par deux horloges synchronisées dans le même référentiel on dit alors que les deux événements sont simultanés.*

Relativité de la simultanéité.

Soit deux événements $E_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ dans l'espace-temps de Minkowski associé au référentiel $\mathcal{R}$. Si les deux événements sont simultanés pour un observateur lié à $\mathcal{R}$ alors il pourra écrire que

$$t_1 = t_2$$

Un autre observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme $\beta_e c$ par rapport à $\mathcal{R}$ verra les deux événements se produire aux instants t'_1 et t'_2 données par la transformation de Lorentz. Donc

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma_e\big(-\beta_e.(x_2 - x_1) + c(t_2 - t_1)\big) = -\gamma_e\beta_e.(x_2 - x_1)$$

D'où les deux événements qui sont simultanés pour un observateur lié à $\mathcal{R}$ ne sont simultanés pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$ que s'ils ont les mêmes abscisses (la même position suivant la direction de translation) par rapport à $\mathcal{R}$.

Remarque

La limite classique pour la transformation de Lorentz est obtenue en posant $v_e \ll c$ donc $\beta_e \approx 0$ et $\gamma_e \approx 1$. Dans ce cas deux événements simultanés pour un observateur lié à donnent $(t_1 = t_2)$ et $c(t'_2 - t'_1) = -\gamma_e\beta_e.(x_2 - x_1) \approx 0$ d'où les deux événements apparaissent aussi comme simultanés pour un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$.

Remarque

Si deux événements sont simultanés et non localisés dans l'espace-temps alors l'intervalle espace-temps est du genre espace $(s_{12}^2 = -\Delta x^2 < 0)$. C'est-à-dire que ces deux événements concernent deux particules (points matériels) différentes, donc ils ne peuvent représenter l'évolution d'une seule particule et ne peuvent être reliés par une ligne d'univers.

Localisation

On dit que deux événements sont localisés s'ils se produisent au même endroit, c'est-à-dire à la *même position* par rapport au même référentiel.

Relativité de la localisation

Soit deux événements $E_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ dans l'espace-temps de Minkowski associé au référentiel $\mathcal{R}$. Si les deux événements sont localisé pour un observateur lié à $\mathcal{R}$ alors il pourra écrire que

$$x_1 = x_2 \quad ; \quad y_1 = y_2 \quad ; \quad z_1 = z_2$$

Un autre observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme $\beta_e c$ par rapport à $\mathcal{R}$ verra les deux événements se produire aux abscisses x_1' et x_2' données par la transformation de Lorentz. Donc

$$x_2' - x_1' = \gamma_e\big((x_2 - x_1) - \beta_e.c(t_2 - t_1)\big) = -\gamma_e \beta_e.c(t_2 - t_1)$$

D'où les deux événements qui sont localisés pour un observateur lié à $\mathcal{R}$ ne sont localisés pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$ que s'ils s'ont simultanés dans $\mathcal{R}$.

Remarque

La limite classique pour la transformation de Lorentz est obtenue en posant $v_e \ll c$ donc $\gamma_e \approx 1$ et $\beta_e c = v_e$. Dans ce cas deux événements localisés pour un observateur lié à donnent $x_1 = x_2$ et $x_2' - x_1' = -v_e(t_2 - t_1)$ d'où les deux événements ne sont localisés pour l'observateur lié à $\mathcal{R}'$ que s'ils s'ont simultanés dans $\mathcal{R}$.

Synchronisation des horloges

La mesure des coordonnées temporelles des événements en général, et de la simultanéité en particulier, nécessite l'existence préalable d'horloges synchronisées se trouvant aux emplacements (coordonnées spatiales) des événements.

D'un point de vu formel, deux horloges distantes et immobiles dans un référentiel d'inertie sont dites synchronisées si elles indiquent simultanément et à chaque instant, la même valeur du temps. Les deux horloges étant mises à zéro au même moment (simultanément).
Il est clair que cette définition de la synchronisation se base elle-même sur la notion de simultanéité, qui est admise dans le cas d'un référentiel unique pour toutes les horloges.

Dans le cadre classique, le temps étant absolu, les notions de simultanéité et de synchronisation étaient triviales même pour un changement de référentiel. Une horloge pouvait ainsi suivre le déplacement du mobile en indiquant le temps absolu de chaque événement, qui est le même dans le référentiel du mobile et dans le référentiel considéré fixe.
Par contre, en mécanique relativiste, déplacer une horloge par rapport à un observateur donné, possédant une horloge fixe liée au référentiel $\mathcal{R}$, induirait une différence de mesure du temps entre l'horloge de l'observateur et l'horloge en mouvement (relativité de la simultanéité). Donc, il nous est impossible de synchroniser les horloges en mouvement les unes par rapport aux autres. Seules les horloges appartenant au même référentiel (immobiles les une par rapport aux autres) peuvent être synchronisées.

La synchronisation des horloges, distantes et immobiles, se fait en utilisant la propagation de l'information (mesure du temps donné par une horloge) à la vitesse de la lumière absolue et finie.

Considérons un observateur lié à un référentiel $\mathcal{R}$ se trouvant au point O et muni d'une horloge notée H_O. Une horloge H_A se trouvant au point A à une distance fixe D_{OA} de O, envois un signal lumineux dans la direction de O contenant l'information donnant l'instant de départ du signal t_A. L'observateur en O pourra vérifier la synchronisation des horloges H_O et H_A en comparant le temps t_A indiqué par l'horloge H_A au départ du signal et le temps t_O indiqué par l'horloge H_O à la réception du signal. Les deux horloges sont synchronisées si :

$$ct_O - ct_A = D_{OA}$$

On peut ainsi synchroniser toutes les horloges fixes aux différentes positions (spatiales) du référentiel $\mathcal{R}$.

Une autre procédure de synchronisation, ne faisant pas intervenir directement la distance entre les deux horloges, est celle proposée par A. Einstein dans son article de 1905.
Pour deux horloges H_O et H_A se trouvant, immobiles, aux points distincts O et A par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. L'observateur en O envois un signal lumineux en direction de A, ce signal est *instantanément* réfléchi vers le point O. Si on note : t_{O1} l'instant de départ du signal à partir de O donné par l'horloge H_O ; t_A l'instant ou le signal arrive et se réfléchi en A et donné par l'horloge H_A ; t_{O2} l'instant d'arrivée du signal en O donné par l'horloge H_O. Alors, les deux horloges sont synchronisées si :

$$t_A = \frac{t_{O2} + t_{O1}}{2}$$

La synchronisation est réflexive : toute horloge étant synchronisée avec elle même, symétrique : si l'horloge H_A est synchronisée avec l'horloge H_B, alors l'horloge H_B est synchronisée avec l'horloge H_A, et transitive : si l'horloge H_A est synchronisée avec l'horloge H_B et si l'horloge H_B est synchronisée avec l'horloge H_C, alors l'horloge H_A est synchronisée avec l'horloge H_C.

IV. DILATATION DES DURÉES

Temps propre

On appelle « temps propre » d'une particule (point matériel) et on note τ le temps mesuré dans le référentiel lié à la particule appelé aussi « référentiel propre ».

Dans ce référentiel, que nous noterons $\mathcal{R}'$, la particule est immobile. Nous pouvons donc poser $x' = y' = z' = 0$.
Le temps t mesuré dans tout autre référentiel $\mathcal{R}$ par rapport auquel la particule (et le référentiel $\mathcal{R}'$) est en mouvement de translation uniforme est appelé « temps impropre ».

La durée propre (intervalle de temps propre) entre deux événements E_1 et E_2 concernant la particule est notée $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ et le carré de l'intervalle espace-temps entre les deux événements est égal à

$$s_{12}^2 = c^2 \Delta\tau^2$$

Ou

$$\Delta\tau = \frac{s_{12}}{c}$$

Comme cet intervalle est invariant

$$s_{12}^2 = c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

D'où la durée propre est toujours inférieure à n'importe quelle autre durée mesurée dans un référentiel qui n'est pas un référentiel propre $\Delta\tau \leq \Delta t$. *On dit alors que la durée (intervalle de temps) est minimale quand elle est mesurée dans le référentiel propre de la particule*.

Dilatation des durées

En utilisant la transformation de Lorentz

$$c(t_2 - t_1) = \gamma_e\big(\beta_e.(x_2' - x_1') + c(\tau_2 - \tau_1)\big)$$

Comme $x_2' = x_1' = 0$

$$\Delta t = \gamma_e . \Delta\tau$$

Avec

$$\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} \geq 1$$

Donc les durées mesurées sont plus petites dans le référentiel propre de la particule, c'est-à-dire que *le temps entre deux événements perçu par un observateur lié au référentiel propre est plus court en comparaison avec le temps entre les mêmes événements mesuré par un observateur lié au référentiel impropre $\mathcal{R}$.*

En prenant l'exemple d'une fusée qui se déplace avec une vitesse rectiligne uniforme par rapport à la terre (dans la mesure où nous considérons la terre comme un référentiel galiléen et que nous omettons les effets de la gravité), un observateur terrestre « en jetant un œil » à l'intérieur de la fusée verrait tout ce qui se passe à l'intérieur de la fusée se passer au ralentis comparé à ce que verrait un autre observateur à l'intérieur de la fusée. En particulier, l'observateur terrestre verrait l'observateur dans la fusée vieillir plus lentement en comparaison à ce que verrait l'observateur de la fusée en se regardant dans un miroir.
Ce phénomène est symétrique, c'est-à-dire que l'observateur de la fusée verrait tout ce qui se passe sur terre au ralenti comparé à ce que verrait l'observateur terrestre qui est, dans ce cas, lié au référentiel propre (les événements se passant sur terre).

La dilatation des durées n'est pas un phénomène absolu, mais une mesure relative qui dépend de l'observateur.

Exemple

Reprenons l'exemple du rayon lumineux (ou du photon) faisant l'aller et retour entre deux miroirs (pages 05 et 06).

$$\begin{pmatrix} c\tau_0 = 0 \\ x'_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad ; \quad E_1 \begin{pmatrix} c\tau_1 = l \\ x'_1 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \quad ; \quad E_2 \begin{pmatrix} c\tau_2 = 2l \\ x'_2 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

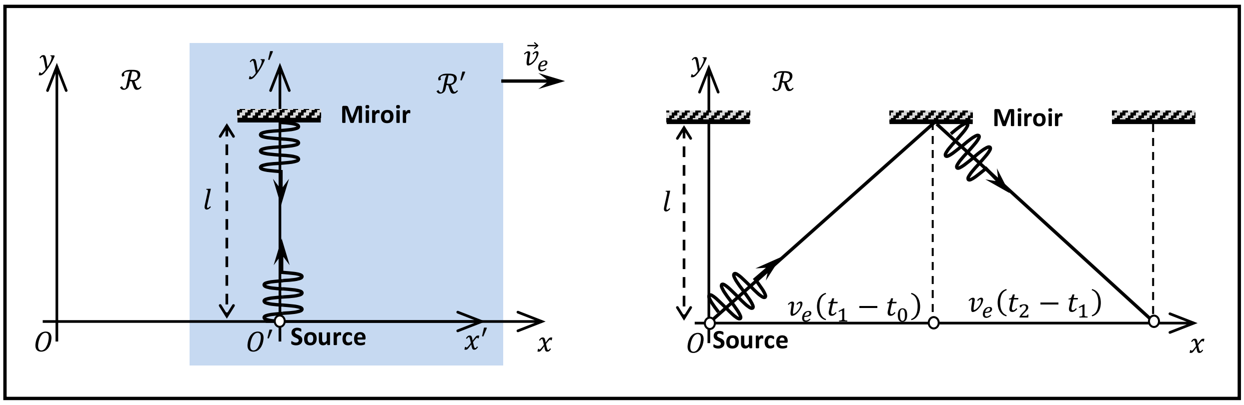
Et la transformation de Lorentz donne

$$E_0 \begin{pmatrix} ct_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad ; \quad E_1 \begin{pmatrix} ct_1 = \gamma_e l \\ x_1 = \gamma_e \beta_e l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad ; \quad E_2 \begin{pmatrix} ct_2 = 2\gamma_e l \\ x_2 = 2\gamma_e \beta_e l \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Nous retrouvons bien

$$t_1 - t_0 = \gamma_e(\tau_1 - \tau_0) \qquad \text{et} \qquad t_2 - t_0 = \gamma_e(\tau_2 - \tau_0)$$

Une autre manière de trouver ce résultat est de considérer la propagation du rayons (le mouvement du photon) par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, comme le montre la figure ci-dessous.



Par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$ le rayon lumineux parcourt deux fois une distance l avec une vitesse c. Ce qui donne des durées $\tau_1 - \tau_0 = l/c$ et $\tau_2 - \tau_1 = l/c$.

Par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ le rayon lumineux parcourt les distances

$$\sqrt{l^2 + v_e^2(t_1 - t_0)^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{l^2 + v_e^2(t_2 - t_1)^2}$$

avec une vitesse c aussi (la distance l dans la direction perpendiculaire au mouvement du référentiel $\mathcal{R}'$, est invariante, donc la même dans les deux référentiels). Ce qui donne les durées

$$l^2 + v_e^2(t_1 - t_0)^2 = c^2(t_1 - t_0)^2 \qquad \text{et} \qquad l^2 + v_e^2(t_2 - t_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2$$

En remplaçant $l = c(\tau_1 - \tau_0)$ et $l = c(\tau_2 - \tau_1)$ puis en divisant par c^2

$$(\tau_1 - \tau_0)^2 = (1 - \beta_e^2)(t_1 - t_0)^2 \qquad \text{et} \qquad (\tau_2 - \tau_1)^2 = (1 - \beta_e^2)(t_2 - t_1)^2$$

D'où

$$t_1 - t_0 = \gamma_e(\tau_1 - \tau_0) \qquad \text{et} \qquad t_2 - t_1 = \gamma_e(\tau_2 - \tau_1)$$

Et en faisant la somme des deux équations nous trouvons la dilatation des durées

$$\Delta t = \gamma_e . \Delta\tau$$

V. CONTRACTION DES LONGUEURS

Longueur propre

On appelle « longueur propre » d'un corps rigide (une barre par exemple) et on note l_p la longueur mesurée dans le référentiel lié au corps ou « référentiel propre » du corps.

Dans ce référentiel propre que nous noterons $\mathcal{R}'$ la mesure des positions des extrémités A_1 et A_2 de la barre donnant x_1' et x_2' donc $l_p = x_2' - x_1'$, la barre étant fixe dans ce référentiel les deux positions restant inchangées quelque soit le temps et les deux événements représentant les mesures des positions ne sont pas nécessairement simultanés.

La longueur mesurés dans tout autre référentiel $\mathcal{R}$ par rapport auquel la barre (et le référentiel $\mathcal{R}'$) est en mouvement de translation uniforme est appelé « longueur impropre » et notée $l_i = x_2 - x_1$, où x_1 et x_2 sont les positions des extrémités A_1 et A_2 de la barre mesurées *simultanément* $(t_1 = t_2)$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Contraction des longueurs

En utilisant la transformation de Lorentz

$$x_2' - x_1' = \gamma_e\big((x_2 - x_1) - \beta_e . c(t_1 - t_2)\big)$$

Comme $t_1 = t_2$

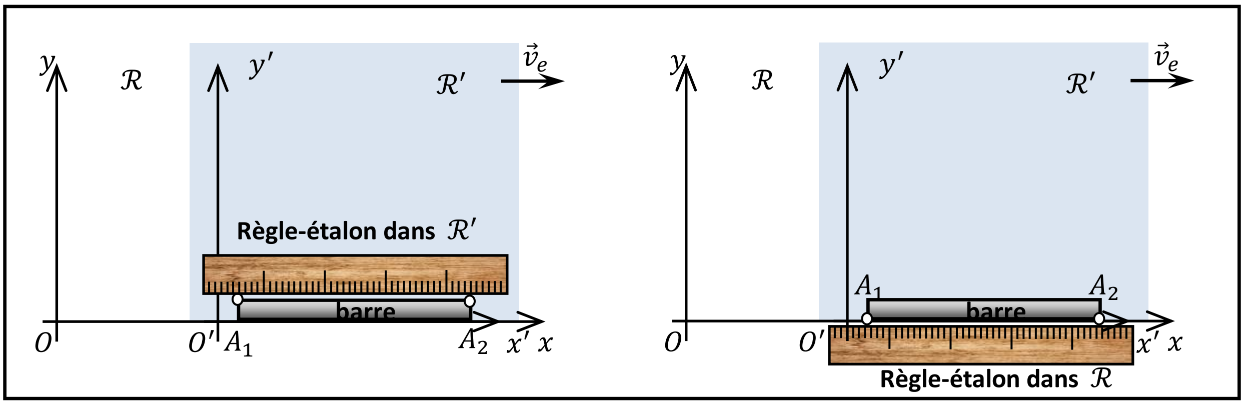
$$l_p = \gamma_e . l_i$$

Avec

$$\gamma_e = (1 - \beta_e^2)^{-1/2} \geq 1$$

Donc les longueurs mesurées sont plus grandes dans le référentiel propre, c'est-à-dire que *pour un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}$ la longueur mesurée d'une barre rigide est plus petite comparée à la longueur propre que mesure un observateur lié au référentiel propre de la barre*.

La contraction des longueurs n'est pas un phénomène absolu, mais une mesure relative qui dépend de l'observateur.



Remarque

La contraction des longueurs se mesure uniquement dans la direction de déplacement relative des référentiels (direction (Ox) dans notre cas) dans les autres directions perpendiculaires à ce déplacement les deux observateurs liés aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ n'observent aucune différence dans la longueur, $\Delta y' = \Delta y$ et $\Delta z' = \Delta z$.

VI. VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

L'expérience du mont Washington – Désintégration des muons atmosphériques

Les muons (notées par le symbole μ) sont des particules de charge élémentaire $\pm e$ et de masse 207 fois la masse des électrons $(m_\mu = 207.m_e)$. Ces particules sont générées quand les rayons cosmiques traversent les couches supérieures de l'atmosphère terrestre, puis elles entre en collisions avec les molécules de l'atmosphère et se désintègrent.

La loi de désintégration des muons donne le nombre $N(t)$ de muons restant à un instant t à partir d'un nombre initial $N(0)$

$$N(t) = N(0).\exp\left(-\frac{t}{T_0}\right)$$

T_0 est une durée appelée durée de vie des muons.
On utilise plus souvent la « demi-vie » des muons, qui est la durée au bout de laquelle la moitié de nombre de muons initiale se désintègre

$$N(T_{1/2}) = \frac{N(0)}{2} = N(0).\exp\left(-\frac{T_{1/2}}{T_0}\right) \qquad \text{ce qui donne} \qquad T_{1/2} = T_0.\ln 2$$

C'est la comparaison de la valeur de cette durée de vie (ou la demi-vie) pour des muons au repos et des muons en déplacement qui nous intéresse.

Dans le cas de muons quasiment au repos la durée de vie *propre* trouvée en étudiant la décroissance d'un flux de muons est égale à $\tau_0 = 2{,}2 \times 10^{-6}\ s$.

En 1941, B. Rossi et D. Hall ont mesuré le rapport des flux verticaux de faisceaux de muons entre les deux sites d'Echo Lake et de Denver, ayant pour altitudes respectives $3240\ m$ et $1616\ m$.
Cette expérience fut reprise en 1963 par D.H. Frisch et J.H. Smith entre le sommet du Mont Washington (Etas Unis) à une altitude de $1910\ m$ et le niveau de la mer. Les flux trouvés dans cette dernière expérience étaient respectivement $n_1 = 563 \pm 10$ muons/heure et $n_2 = 408 \pm 9$ muons/heure la vitesse des muons étant $v = 0{,}995.c$.

D'après la loi exponentielle précédente

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n(0).\exp(-t_2/T_0)}{n(0).\exp(-t_1/T_0)} = \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{T_0}\right)$$

Comme nous savons que les muons se déplacent à une vitesse v constante $t_2 - t_1 = h/v$.
Donc

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{h}{v.T_0}\right)$$

Et la durée de vie trouvée

$$T_0 = \frac{h}{v.\ln(n_1/n_2)} \qquad \text{numériquement} \qquad T_0 = 19{,}891 \times 10^{-6}\ s$$

D'où la durée de vie des muons pour le référentiel terrestre (impropre) est supérieure à leur durée de vie dans leur référentiel propre. En calculant le rapport de la durée de vie impropre et de la durée de vie propre nous trouvons une valeur proche du facteur relativiste γ

$$T_0 = 9{,}041.\tau_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 10{,}012$$

A faire :
Faire le calcul inverse et trouver le flux de muons au niveau de la mer si la durée de vie était la même dans les deux référentiels (durée de vie propre).

Remarque
Point de vue du muon : Dans le référentiel lié au muons la durée de vie du muon est τ_0 mais la distance qu'il parcourt est égale à la hauteur du mont Washington dans son référentiel, cette longueur est une longueur impropre car la longueur (hauteur) propre de la montagne est mesurée dans son référentiel propre qui est le référentiel terrestre, d'où la hauteur de la montagne vue par les muons est dix fois plus petite que sa hauteur propre à cause de la contraction relativiste des longueurs

$$h_i = \gamma^{-1}.h_p = (1 - v^2/c^2)^{+1/2}.h_p$$

Dans les accélérateurs de particules les physiciens observent systématiquement les effets relativistes comme la dilatation des durées de vie des particules. Cette dilatation augmente toujours proportionnellement au facteur relativiste quand la vitesse des particules (leur énergie) augmente. La dilatation des durées et par conséquent la contraction des distances, sont donc des faits expérimentalement établis.

Effet Doppler-Fizeau longitudinal – Décalage vers le rouge
L'effet Doppler est un phénomène observé de décalage de la fréquence d'une onde mesurée par deux observateurs liés à des référentiels galiléens en mouvement l'un par rapport à l'autre (voir le chapitre précédent). Dans le cas de la lumière le phénomène est communément appelé effet Doppler-Fizeau.

Rappelons la relation entre les fréquences émise et reçue dans le cadre de la relativité galiléenne.

$$f_{\text{réc}} = \left(\frac{c - v_{\text{réc}}}{c + v_{\text{ém}}}\right) f_{\text{ém}}$$

Avec la convention de signes suivante :
$v_{\text{réc}} < 0$: Le récepteur se dirige vers l'émetteur. $v_{\text{réc}} > 0$: Le récepteur s'éloigne de l'émetteur.
$v_{\text{ém}} < 0$: L'émetteur se dirige vers le récepteur. $v_{\text{ém}} > 0$: L'émetteur s'éloigne du récepteur.

Dans le cadre de la relativité retreinte on prend en compte la correction due à la dilatation des durées, et si en plus l'émetteur et le récepteur se déplacent sur la même droite, on parle alors d'effet *Doppler-Fizeau longitudinal*.

La période étant la durée d'une oscillation, elle obéit à la dilatation des durées relativiste. La période T mesurée dans un référentiel impropre est égale à la période mesurée dans un référentiel propre T_{propre} multipliée par le facteur relativiste

$$T = \gamma.T_{\text{propre}} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.T_{\text{propre}}$$

La fréquence étant l'inverse de la période

$$f = \gamma^{-1}.f_{\text{propre}} = (1 - v^2/c^2)^{+1/2}.f_{\text{propre}}$$

Cas d'un émetteur en mouvement de translation uniforme $(v_{\text{ém}} = v)$ par rapport à un récepteur fixe $(v_{\text{réc}} = 0)$. La *fréquence reçue* mesurée par le récepteur dans son propre référentiel est une fréquence propre, mais la *fréquence émise* mesurée par le récepteur est une fréquence impropre que nous remplaçons par $\gamma^{-1} f_{\text{ém}}$. Donc

$$f_{\text{réc}} = \frac{c}{c+v}\sqrt{1-\beta^2} f_{\text{ém}}$$

Avec $\beta = v/c$ et

$$\boxed{f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{\text{ém}}}$$

Cas d'un récepteur en mouvement de translation uniforme $(v_{\text{réc}} = v)$ par rapport à un émetteur fixe $(v_{\text{ém}} = 0)$. La *fréquence émise* mesurée dans le référentiel de l'émetteur est une fréquence propre, mais la *fréquence reçue* mesurée dans le référentiel de l'émetteur est une fréquence impropre que nous remplaçons par $\gamma^{-1} f_{\text{réc}}$. Donc

$$\sqrt{1-\beta^2} f_{\text{réc}} = \frac{c-v}{c} f_{\text{ém}}$$

Ce qui donne la même loi précédente

$$f_{\text{réc}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_{\text{ém}}$$

Conclusion

En relativité restreinte, l'effet Doppler-Fizeau est parfaitement symétrique, et les deux mouvements sont équivalents (mouvement de l'émetteur par rapport au récepteur et le mouvement du récepteur par rapport à l'émetteur). Cela se traduit par la même loi quelque soit le référentiel dans lequel nous nous plaçons. Tout ce qui compte c'est le mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas $\beta < 0$ quand l'émetteur et le récepteur se rapprochent l'un de l'autre et $\beta > 0$ s'ils s'éloignent l'un de l'autre. Les fréquences étant des fréquences propres (chacune mesurée dans son propre référentiel).

En dernier, il faut noter que, contrairement aux ondes d'origine matérielle, l'onde lumineuse n'a pas besoin d'un milieu de propagation et sa vitesse dans le vide est la même quelque soit le référentiel.

L'effet Doppler relativiste et plus particulièrement l'effet Doppler-Fizeau longitudinal a été vérifié par plusieurs expériences en laboratoire. La première datant de 1938 quand H.E. Ives et G.R. Stilwell ont mesurés les émissions de rayons anodiques composés d'ions H_2^+ se déplaçant à grande vitesse $(v = 0{,}005.c)$.

Le décalage vers le rouge ou red-shift est une observation astronomique de l'effet Doppler-Fizeau relativiste. En effet le spectre émis par une étoile, un amas d'étoiles ou une galaxie est décalé vers des fréquences plus basses, *conformément aux prévisions relativistes*, quand le corps en question s'éloigne de l'observateur. L'astronome E. Hubble (en collaboration avec M. Humason) a notamment observé que le décalage vers le rouge concerne toutes les galaxies qui nous entourent suggérant que l'univers entier est en expansion.

QUESTIONNAIRE DU CHAPITRE II
TRANSFORMATIONS DE LORENTZ–POINCARÉ

1. Quelles propositions sont fausses parmi les propositions suivantes ?
   a. La transformation de Lorentz-Poincaré est non linéaire.
   b. La transformation de Lorentz-Poincaré est réciproque.
   c. Les équations de Maxwell sont invariantes par la transformation de Lorentz-Poincaré.
   d. La vitesse de la lumière est invariante pour tous les référentiels galiléens.

2. Un événement est représenté dans l'espace-temps à quatre dimensions par :
   a. Une droite.
   b. Une courbe.
   c. Un plan.
   d. Un point.

3. Si un intervalle espace-temps entre deux événements est « du genre espace », alors :
   a. La grandeur $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ est positive.
   b. Les deux événements peuvent être reliés par une ligne d'univers.
   c. Un des événements se trouve en dehors du cône de lumière centré sur l'autre événement.
   d. Les deux événements représentent l'évolution dans le temps de la même particule.

4. Le principe de causalité est respecté pour des intervalles du genre :
   a. Temps.
   b. Lumière.
   c. Espace.
   d. Tous les genres d'intervalles.

5. Un extra-terrestre passe devant la terre en ligne droite et avec une vitesse constante $v = \left(2\sqrt{6}/5\right)c$ par rapport à la terre. L'extra-terrestre s'intéresse à un match de foot qui se joue sur terre, pour un observateur sur terre le match dure 90 minutes, mais pour l'extraterrestre ce match dure :
   a. 45 minutes.
   b. 450 minutes.
   c. 4500 minutes.
   d. 45000 minutes.

6. Dans la question précédente la longueur du vaisseau spatial de l'extra-terrestre, mesuré par l'extra-terrestre (dans le référentiel lié au vaisseau), est de 100 ule (unité de longueur extra-terrestre). Quelle est sa longueur mesurée par un joueur sur le terrain (référentiel terrestre) ?
   a. 20 ule.
   b. 200 ule.
   c. 500 ule.
   d. 1000 ule.

7. Résumer la relativité par la phrase « tout est relatif » vous semble-t-il juste ? (oui/non)

   Pourquoi ? ……

8. Quel est, selon vous, le principe essentiel de la relativité restreinte ?

   ………