SOLUTIONS DE LA SÉRIE DE TD N° 01
RELATIVITÉ GALILÉENNE

EXERCICE 01 :

- Repère fixe : Sol (S)
- Repère mobile : l'Eau (E)
- Mobile (point matériel) : Homme 1 (1) ; Homme 2 (2)

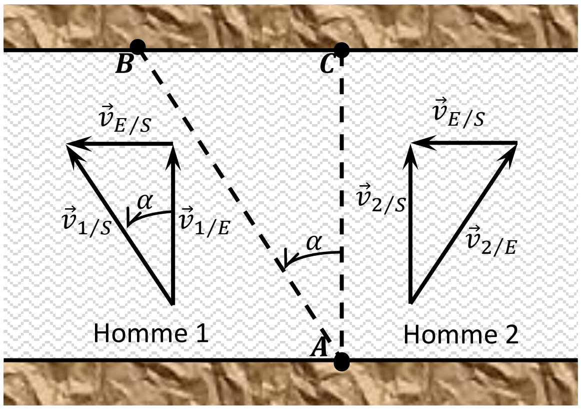
1. Description (voir dessin ci-dessous).

Vitesses de l'homme 1 et 2 par rapport au Sol $\vec{v}_{1/S}$ et $\vec{v}_{2/S}$ (nous devrons les calculer).

Vitesses de l'homme 1 et 2 par rapport a l'Eau $\vec{v}_{1/E}$ et $\vec{v}_{2/E}$. En module $v_{1/E} = v_{2/E} = 4\ km/h$.

Vitesse de l'Eau par rapport au Sol (vitesse du courant) $\vec{v}_{E/S}$. En module $v_{E/S} = 2\ km/h$.

2. Relations vectorielles



$$\boxed{\vec{v}_{1/S} = \vec{v}_{1/E} + \vec{v}_{E/S}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{v}_{2/S} = \vec{v}_{2/E} + \vec{v}_{E/S}}$$

En module (d'après le dessin ci-contre)

$$\boxed{v_{1/S}^2 = v_{1/E}^2 + v_{E/S}^2}$$

Et

$$v_{2/E}^2 = v_{2/S}^2 + v_{E/S}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{2/S}^2 = v_{2/E}^2 - v_{E/S}^2}$$

Numériquement

$$v_{1/S} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\ \ km/h \qquad \text{et} \qquad v_{2/S} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}\ \ km/h$$

Distances parcourues

$$d_1 = AB$$

Puisque $\vec{v}_{1/S}$ est toujours tangent à la trajectoire, alors :

$$\cos\alpha = \frac{v_{1/E}}{v_{1/S}} = \frac{AC}{AB} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d_1 = AB = AC\,\frac{v_{1/S}}{v_{1/E}}} \qquad \text{A.N :} \quad AB = \frac{\sqrt{5}}{2}\ km$$

$$\boxed{d_2 = AC = L} \qquad \text{A.N :} \qquad AC = 1\ km$$

Comme $\vec{v}_{1/S}$ et $\vec{v}_{2/S}$ sont constant en module et en direction, alors, les deux mouvements sont rectilignes uniformes. D'où :

$$t_1 = \frac{d_1}{v_{1/S}} = \frac{AB}{\sqrt{v_{1/E}^2 + v_{E/S}^2}} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{d_2}{v_{2/S}} = \frac{AC}{\sqrt{v_{2/E}^2 - v_{E/S}^2}}$$

Application numérique

$$\boxed{t_1 = 0{,}25\ heure} \qquad \text{et} \qquad \boxed{t_2 = 0{,}29\ heure}$$

Comme $t_1 < t_2$, alors, c'est l'homme 1 qui arrive en premier.

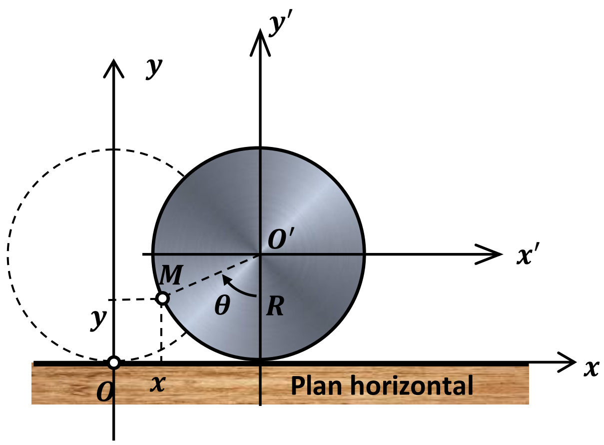
3.

Pour $v_{E/S} = v_{2/E}$ on a $t_2 \to +\infty$. Dans ce cas, l'homme 2 ne peut pas atteindre la rive opposée. L'homme 1 peut atteindre la rive quelque soit la vitesse du courant.

EXERCICE 02 :

Puisque les axes restent toujours parallèles

$$\vec{e}_x = \vec{e}_{x'} \quad \text{et} \quad \vec{e}_y = \vec{e}_{y'}$$



1. Coordonnées dans le repère $(O'x'y')$

$$\boxed{\begin{cases} x' = -R.\sin(\theta) \\ y' = -R.\cos(\theta) \end{cases}}$$

2. Coordonnées dans le repère (Oxy)

$$\begin{cases} x = x' + R.\theta \\ y = y' + R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = R.\theta - R.\sin(\theta) \\ y = R - R.\cos(\theta) \end{cases}}$$

3. Composantes du vecteur vitesse

$$\boxed{\begin{cases} v_x = x^\bullet = R\theta^\bullet(1 - \cos(\theta)) \\ v_y = y^\bullet = R\theta^\bullet.\sin(\theta) \end{cases}}$$

D'autre part

$$\begin{cases} v_{x'} = x'^\bullet = -R\theta^\bullet.\cos(\theta) \\ v_{y'} = y'^\bullet = R\theta^\bullet.\sin(\theta) \end{cases}$$

D'où la vitesse d'emportement

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_e = R\theta^\bullet \vec{e}_x$$

4. Le référentiel $(O'x'y')$ est un référentiel galiléen s'il est en translation uniforme par rapport à (Oxy). Autrement dit :

$$\vec{v}_e = \text{constante} \quad \text{et} \quad \theta^\bullet = \text{Constante}$$

Les composantes des vecteurs accélérations dans les deux référentiels sont

$$\begin{cases} a_x = x^{\bullet\bullet} = R\theta^{\bullet\bullet}(1 - \cos(\theta)) + R\theta^{\bullet 2}.\sin(\theta) \\ a_y = y^{\bullet\bullet} = R\theta^{\bullet\bullet}.\sin(\theta) + R\theta^{\bullet 2}.\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{x'} = x'^{\bullet\bullet} = -R\theta^{\bullet\bullet}.\cos(\theta) + R\theta^{\bullet 2}.\sin(\theta) \\ a_{y'} = y'^{\bullet\bullet} = R\theta^{\bullet\bullet}.\sin(\theta) + R\theta^{\bullet 2}.\cos(\theta) \end{cases}$$

Pour $\theta^\bullet = \text{Constante}$

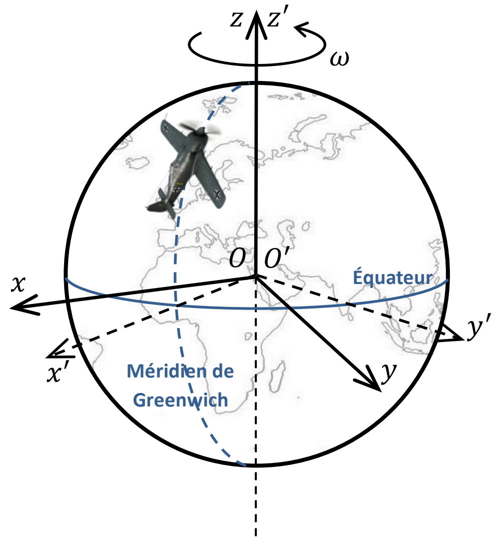
$$\begin{cases} a_x = a_{x'} = R\theta^{\bullet 2}.\sin(\theta) \\ a_y = a_{y'} = R\theta^{\bullet 2}.\cos(\theta) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

EXERCICE 03 :

Notons d'abord que les vecteurs unitaires $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_{z'}$ sont confondus : $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$

Le vecteur vitesse angulaire de la rotation de la terre est :

$$\vec{\omega} = \omega.\vec{e}_z \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \times 10^{-5}\ \frac{rad}{s}$$



Les vecteurs unitaires en coordonnées sphériques dans les deux référentiels sont les mêmes car ils suivent le mouvement de l'avion, les origines O et O' étant confondus ainsi que les axes (Oz) et $(O'z')$.

$$\vec{e}_r = \vec{e}_{r'} \quad ; \quad \vec{e}_\theta = \vec{e}_{\theta'} \quad ; \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_{\varphi'}$$

Les coordonnées sphériques dans les deux référentiels sont données par :

$$\begin{cases} r = r' = R \\ \theta = \theta' \\ \varphi = \omega.t \quad ; \quad \varphi' = 0 \end{cases}$$

1. Vecteur vitesse en coordonnées sphériques dans le référentiel $(O'x'y'z')$.

$$\vec{v}' = r'^{\bullet}.\vec{e}_{r'} + r'.\theta'^{\bullet}.\vec{e}_{\theta'} + r'.\sin\theta'.\varphi'^{\bullet}.\vec{e}_{\varphi'}$$

Donc

$$\boxed{\vec{v}' = R.\theta'^{\bullet}.\vec{e}_{\theta'} = -v'.\vec{e}_{\theta'}}$$

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques dans le référentiel $(Oxyz)$.

$$\vec{v} = r^{\bullet}.\vec{e}_r + r.\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi$$

Donc

$$\boxed{\vec{v} = R\theta^{\bullet}.\vec{e}_\theta + R\sin\theta.\varphi^{\bullet}.\vec{e}_\varphi = -v'.\vec{e}_\theta + R\omega.\sin\theta.\vec{e}_\varphi}$$

Et la vitesse d'emportement

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v} - \vec{v}' = R\omega.\sin\theta.\vec{e}_\varphi}$$

2. Les coordonnées sphériques dans les deux référentiels sont données par :

$$\theta'^{\bullet} = -\frac{v'}{R} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\begin{cases} r = r' = R \\ \theta = \theta' = -\dfrac{v'}{R}t + \dfrac{\pi}{2} \\ \varphi = \omega.t \quad ; \quad \varphi' = 0 \end{cases}}$$

3. Accélération d'emportement

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\right)$$

Accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2.\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Avec

$$\vec{\omega} = \omega.\vec{e}_z \quad ; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{OO'} = \vec{0} \quad ; \quad \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} = R.\vec{e}_r$$

Comme

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin\theta.\vec{e}_\varphi \quad ; \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).\vec{e}_\varphi = \cos\theta.\vec{e}_\varphi \quad ; \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\rho$$

Alors

$$\boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M}\right) = -R\sin\theta\,.\,\omega^2 \vec{e}_\rho}$$

Ou

$$\boxed{\vec{a}_e = -R\omega^2 \sin\theta\,.\left(\sin\theta\,.\,\vec{e}_r + \cos\theta\,.\,\vec{e}_\theta\right)}$$

Et

$$\boxed{\vec{a}_c = 2.\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2\omega v' \cos\theta\,.\,\vec{e}_\varphi}$$

L'accélération par rapport au référentiel $(O'x'y'z')$ est une accélération normale car le mouvement est circulaire uniforme. Donc :

$$\boxed{\vec{a}' = -\frac{v'^2}{R}\vec{e}_r}$$

4. Et l'accélération par rapport au référentiel $(Oxyz)$ est donnée par :

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Donc

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\frac{v'^2}{R} - R\omega^2.\sin^2\theta\right).\vec{e}_r - R\omega^2.\sin\theta\cos\theta\,.\,\vec{e}_\theta - 2\omega v'\cos\theta\,.\,\vec{e}_\varphi}$$

Ou en appliquant directement l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques :

$$\vec{a} = \left(r^{\bullet\bullet} - r\theta^{\bullet 2} - r\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right).\vec{e}_r + \left(2r^\bullet\theta^\bullet + r\theta^{\bullet\bullet} - r\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e}_\theta$$
$$+ \left(2r^\bullet\varphi^\bullet\sin\theta + 2r\theta^\bullet\varphi^\bullet\cos\theta + r\varphi^{\bullet\bullet}\sin\theta\right).\vec{e}_\varphi$$

Avec

$$r^\bullet = 0 \quad ; \quad r^{\bullet\bullet} = 0 \quad ; \quad \theta^\bullet = -\frac{v'}{R} \quad ; \quad \theta^{\bullet\bullet} = 0 \quad ; \quad \varphi^\bullet = \omega \quad ; \quad \varphi^{\bullet\bullet} = 0$$

D'où

$$\vec{a} = \left(-r\theta^{\bullet 2} - r\varphi^{\bullet 2}\sin^2\theta\right).\vec{e}_r + \left(-r\varphi^{\bullet 2}\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e}_\theta + \left(2r\theta^\bullet\varphi^\bullet\cos\theta\right).\vec{e}_\varphi$$

Et qui redonne

$$\vec{a} = \left(-\frac{v'^2}{R} - R\omega^2.\sin^2\theta\right).\vec{e}_r - R\omega^2.\sin\theta\cos\theta\,.\,\vec{e}_\theta - 2\omega v'\cos\theta\,.\,\vec{e}_\varphi$$

Avec

$$\boxed{\theta = -\frac{v'}{R}t + \frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 04 : ***Effet Doppler sonore***

$$f_{\text{réc}} = \left(\frac{c - v_{\text{réc}/O}}{c - v_{\text{ém}/O}}\right) f_{\text{ém}}$$

Quand la voiture s'approche de l'observateur, le récepteur mesure une fréquence $f_{\text{réc}1} = 1140\ Hz$.

$$v_{\text{réc}/O} = 0 \quad ; \quad v_{\text{ém}/O} = v_{\text{ém}}$$

$$f_{\text{réc}1} = \frac{c}{c - v_{\text{ém}}} f_{\text{ém}}$$

Ou

$$c - v_{\text{ém}} = \frac{c}{f_{\text{réc}1}} f_{\text{ém}} \qquad (1)$$

Quand la voiture s'éloigne de l'observateur, le récepteur mesure une fréquence $f_{\text{réc}2} = 980\ Hz$.

$$v_{\text{réc}/O} = 0 \quad ; \quad v_{\text{ém}/O} = -v_{\text{ém}}$$

$$f_{\text{réc}2} = \frac{c}{c + v_{\text{ém}}} f_{\text{ém}}$$

Ou

$$c + v_{\text{ém}} = \frac{c}{f_{\text{réc}2}} f_{\text{ém}} \qquad (2)$$

En divisant l'équation (1) par l'équation (2) :

$$\frac{c - v_{\text{ém}}}{c + v_{\text{ém}}} = \frac{f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1}}$$

$$c - v_{\text{ém}} = \frac{f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1}} c + \frac{f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1}} v_{\text{ém}}$$

$$\left(1 - \frac{f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1}}\right) c = \left(1 + \frac{f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1}}\right) v_{\text{ém}}$$

$$\boxed{v_{\text{ém}} = \left(\frac{f_{\text{réc}1} - f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1} + f_{\text{réc}2}}\right) c}$$

En faisant la somme de l'équation (1) et de l'équation (2) :

$$2c = \left(\frac{c}{f_{\text{réc}1}} + \frac{c}{f_{\text{réc}2}}\right) f_{\text{ém}}$$

$$\boxed{f_{\text{ém}} = 2\frac{f_{\text{réc}1} \cdot f_{\text{réc}2}}{f_{\text{réc}1} + f_{\text{réc}2}}}$$

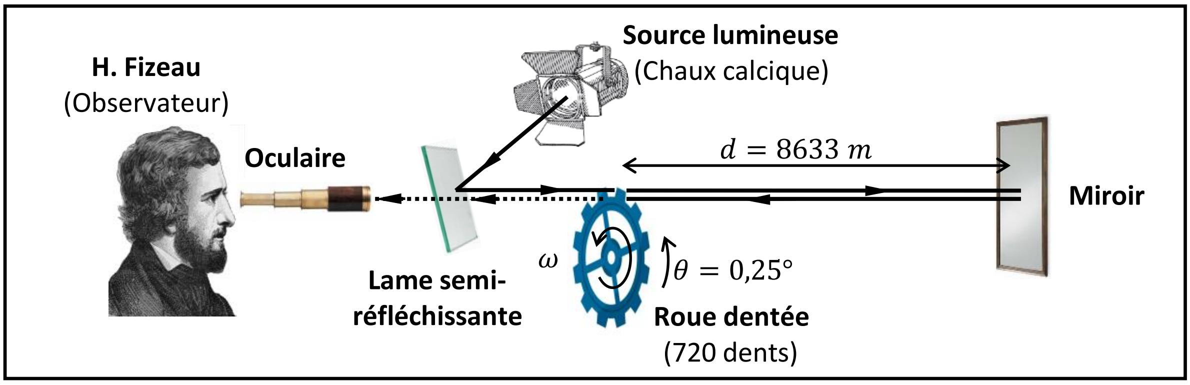
Application numérique : $c = 340{,}29\ m/s$

$$\boxed{v_{\text{ém}} = 25{,}682\ m/s = 92{,}456\ km/h} \quad ; \quad \boxed{f_{\text{ém}} = 1053{,}962\ Hz}$$

EXERCICE 05 :

L'expérience de la roue dentée de Fizeau consiste à comparer le temps de l'aller-retour d'un faisceau lumineux sur un trajet de longueur connue avec le temps de rotation d'une roue dentée d'un angle donné.

$$d = 8633\ m \quad ; \quad \theta = \frac{360}{720 \times 2} = 0{,}25°$$



Le rayon lumineux se propage avec une vitesse constante c dans une direction rectiligne, d'où le trajet aller-retour est donné par

$$2d = c.\Delta t$$

Durant le même temps la roue dentée effectue une rotation d'un angle $\theta = 0{,}25°$ pour intercepter le rayon à son arrivée (extiction du point lumineux dans l'oculaire).
En considérant le mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω

$$\theta = \omega.\Delta t$$

D'où

$$\frac{2d}{c} = \frac{\theta}{\omega}$$

Connaissant la vitesse de la lumière, la vitesse de rotation de la roue pour une première extinction est donnée par

$$\boxed{\omega = \frac{\theta.c}{2d}}$$

Application numérique

$$\boxed{\omega = 4343{,}797\ \ degré/seconde = 12{,}066\ \ tour/seconde}$$

Doubler cette vitesse permet de faire réaparaitre le point lumineux pour l'observateur. Le faiseau réfléchi, dans ce cas, passe par l'nterstice suivant.
En général les extictions, où le rayon réfléchis butte sur une dent, sont données par :

$$\omega = (2n+1)\frac{\theta.c}{2d}$$

Et les points lumineux , où le rayon réfléchi passe entre les dents, sont donnés par :

$$\omega = (2n)\frac{\theta.c}{2d}$$

Historiquement, Fizeau mesurait la vitesse angulaire de rotation ω de la roue lors de la première extinction, il en déduisait la vitesse de la lumière par :

$$\boxed{c = \frac{2d.\omega}{\theta}}$$

EXERCICE 06 :

1. Vitesse de la Terre par rapport à l'éther.

$$\boxed{v_e = R.\omega = \frac{2\pi R}{T}}$$

$R = 150 \times 10^6\ km$ est le rayon de l'orbite de la terre autour du soleil (supposée circulaire).
$T = 365{,}25\ Jours$ est la période de rotation de la terre autour du soleil.
D'où

$$\boxed{v_e = 29864{,}4383\ \ m/s = 107911{,}9780\ \ km/h}$$

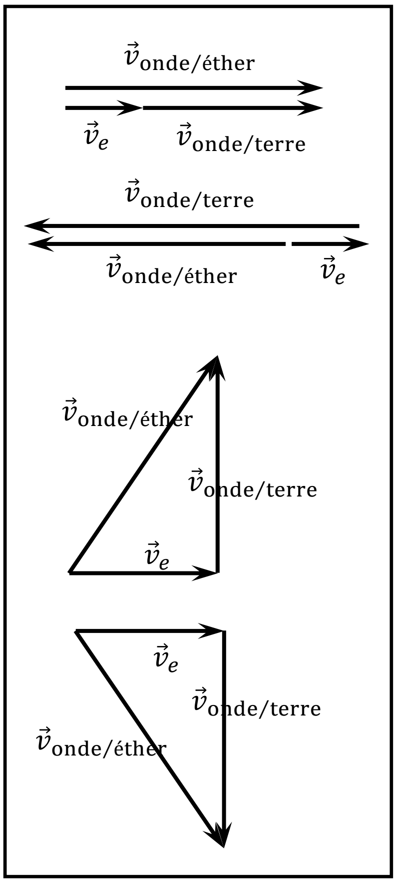
2. Temps d'aller retour d'un rayon lumineux le long de chacun des deux bras.

La loi galiléenne de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{\text{onde/éther}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{\text{onde/terre}}$$

Avec

$$\left|\vec{v}_{\text{onde/éther}}\right| = c \qquad \text{et} \qquad \left|\vec{v}_{\text{onde/terre}}\right| = V'$$



Pour un rayon lumineux se propageant dans la direction de déplacement de la terre par rapport à l'éther.

Le temps de l'aller M_0M_1 est égal à : $t_{1a} = l/v' = l/(c - v_e)$.
Le temps du retour M_1M_0 est égal à : $t_{1r} = l/v' = l/(c + v_e)$.
Et le temps de l'aller-retour $M_0M_1M_0$:

$$t_1 = t_{1a} + t_{1r} = \frac{2l.c}{c^2 - v_e^2} = \frac{2l/c}{1 - \beta_e^2}$$

Pour un rayon lumineux se propageant dans la direction perpendiculaire au déplacement de la terre par rapport à l'éther.

Le temps de l'aller M_0M_2 est égal à : $t_{2a} = l/v' = l/\sqrt{c^2 - v_e^2}$.
Le temps du retour M_1M_0 est égal à : $t_{2r} = l/v' = l/\sqrt{c^2 - v_e^2}$.
Et le temps de l'aller-retour $M_0M_2M_0$:

$$t_2 = t_{2a} + t_{2r} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v_e^2}} = \frac{2l/c}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$$

3. Déphasage qui devrait être observé en sortie de l'interféromètre.

Pour $v_e \ll c$ ou $\beta_e^2 = v_e^2/c^2 \ll 1$

$$t_1 \approx \frac{2l}{c}(1 + \beta_e^2) \qquad \text{et} \qquad t_2 \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\beta_e^2\right)$$

La différence de marche équivalente à ce retard est : $\Delta x = c.(t_1 - t_2) = l.\beta_e^2$

Et la différence de phase :

$$\boxed{\Delta\phi = k.\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} l\beta_e^2}$$

Pour $l = 22\ m$ et une longueur d'onde $\lambda = 589\ nm$ avec $\beta_e = v_e/c = 10^{-4}$ la différence de phase théorique devrait être égale à :

$$\boxed{\Delta\phi = 0{,}3701 \times 2\pi}$$

4. Pour déphasage à mieux qu'un centième de frange.

$$\Delta\phi = 0{,}01 \times 2\pi$$

Donc

$$\beta_e = \frac{v_e}{c} = \sqrt{\frac{0{,}01.\lambda}{l}} = 1{,}6362 \times 10^{-5}$$

Et

$$\boxed{v_e = 4{,}9087 \times 10^3\ m/s}$$

Cette vitesse est excessivement faible par rapport à celle observée expérimentalement (observations astronomiques).

EXERCICE 07 :

1. Champ électromagnétique.

$(\vec{E},\vec{B})$: Champ électromagnétique dans le référentiel fixe $(Oxyz)$.
$(\vec{E}',\vec{B}')$: Champ électromagnétique dans le référentiel en mouvement $(O'x'y'z')$.

La force électromagnétique (de Lorentz) appliqué une charge q en mouvement par rapport au référentiel $(Oxyz)$:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

La force électromagnétique (de Lorentz) appliqué une charge $(q' = q)$ en mouvement par rapport au référentiel $(O'x'y'z')$:

$$\vec{F}' = q'\left(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'\right) = q\left(\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{v}_e) \times \vec{B}'\right)$$

Comme le principe fondamental est invariant par changement de référentiel galiléen

$$q\left(\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{v}_e) \times \vec{B}'\right) = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

La force magnétique dépend de la vitesse de la charge et la force électrique est indépendante de cette vitesse, nous pouvons donc faire l'égalité pour chaque terme indépendamment de l'autre

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{B}'}$$

2. Théorème de Gauss (forme locale).

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En absence de charges $(\rho = 0)$

$$div(\vec{E}) = 0$$

En utilisant la transformation de Galilée

$$\begin{cases} x' = x - v_e.t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Nous avons les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -v_e\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

Et puisque les vecteurs unitaires sont inchangés (translation).

$$\vec{e}_x = \vec{e}_{x'} \quad ; \quad \vec{e}_y = \vec{e}_{y'} \quad ; \quad \vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$$

Nous avons

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}' \quad \Rightarrow \quad div(\vec{E}) = div'(\vec{E}) = div'\left(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'\right) = 0$$

Ce qui donne

$$div'(\vec{E}') - div'\left(\vec{v}_e \times \vec{B}'\right) = 0$$

Comme

$$div'\left(\vec{v}_e \times \vec{B}'\right) = \vec{B}' \bullet \overrightarrow{rot}'(\vec{v}_e) - \vec{v}_e \bullet \overrightarrow{rot}'(\vec{B}') = -\vec{v}_e \bullet \overrightarrow{rot}'(\vec{B}')$$

Avec $\overrightarrow{rot}'(\vec{v}_e) = \vec{0}$ car $\vec{v}_e$ est constante (référentiel galiléen). Donc :

$$\boxed{div'(\vec{E}') = -\vec{v}_e \bullet \overrightarrow{rot}'(\vec{B}')}$$

D'où, l'équation de Maxwell-Gauss n'est pas invariante par rapport à la transformation galiléenne dans le cas de référentiels galiléens.

3. La forme locale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En utilisant les mêmes dérivées partielles précédentes, nous avons :

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}' \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \overrightarrow{rot}'(\vec{E}) = \overrightarrow{rot}'(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}') = \overrightarrow{rot}'(\vec{E}') - \overrightarrow{rot}'(\vec{v}_e \times \vec{B}')$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_e \frac{\partial}{\partial x'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} - v_e \frac{\partial \vec{B}'}{\partial x'}$$

Calculons

$$\vec{v}_e \times \vec{B}' = \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ v_e & 0 & 0 \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_e B'_z \\ v_e B'_y \end{pmatrix} = v_e \begin{pmatrix} 0 \\ -B'_z \\ B'_y \end{pmatrix}$$

D'où

$$\overrightarrow{rot}'(\vec{v}_e \times \vec{B}') = v_e \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ \partial/\partial x' & \partial/\partial y' & \partial/\partial z' \\ 0 & -B'_z & B'_y \end{vmatrix} = v_e \begin{pmatrix} \dfrac{\partial B'_y}{\partial y'} + \dfrac{\partial B'_z}{\partial z'} \\ -\dfrac{\partial B'_y}{\partial x'} \\ -\dfrac{\partial B'_z}{\partial x'} \end{pmatrix}$$

D'un autre coté

$$-v_e \frac{\partial \vec{B}'}{\partial x'} = v_e \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial B'_x}{\partial x'} \\ -\dfrac{\partial B'_y}{\partial x'} \\ -\dfrac{\partial B'_z}{\partial x'} \end{pmatrix}$$

En remplaçant on trouve :

$$\overrightarrow{rot}'(\vec{E}') - v_e \left(\frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right) \vec{e}_{x'} = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + v_e \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'}\right) \vec{e}_{x'}$$

Donc

$$\overrightarrow{rot}'(\vec{E}') = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + v_e \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right) \vec{e}_{x'} = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + v_e \left(div'(\vec{B}')\right) \vec{e}_{x'}$$

Comme (équation de Maxwell-Thomson)

$$div'(\vec{B}') = div(\vec{B}) = 0$$

Nous avons finalement

$$\overrightarrow{rot}'(\vec{E}') = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

Et donc, l'équation de Maxwell-Faraday est invariante par le changement de référentiel galiléen (groupe de transformation de Galilée).

EXERCICE 08 :

Rappelons les transformations de Galilée pour deux référentiels galiléens :

$$\begin{cases} x' = x - v_e . t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

En utilisant les relations entre les champs dans les deux référentiels (exercice précédent)

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{B}'}$$

Et les relations entre les dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_e \frac{\partial}{\partial x'}$$

En partant des équations de propagations dans le référentiel $(Oxyz)$ (considéré comme fixe)

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

La première équation donne

$$\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t'^2} - \frac{v_e^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial x'^2} + \frac{2v_e}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t' \partial x'} = \vec{0}$$

Ou

$$\boxed{\Delta' \vec{B}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t'^2} - \frac{v_e^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial x'^2} + \frac{2v_e}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t' \partial x'} = \vec{0}}$$

Avec

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - v_e^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2v_e \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'}$$

La deuxième équation donne

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial^2\left(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'\right)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\left(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'\right)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\left(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'\right)}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(\vec{E}' - \vec{v}_e \times \vec{B}'\right)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} - \vec{v}_e \times \left(\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t^2}\right) = \vec{0}$$

Comme nous avons trouvé précédemment

$$\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Et

$$\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial t'^2}-\frac{v_e^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial x'^2}+\frac{2v_e}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial t'\partial x'}=\vec{0}$$

Ou encore

$$\boxed{\Delta'\vec{E}'-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial t'^2}-\frac{v_e^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial x'^2}+\frac{2v_e}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}'}{\partial t'\partial x'}=\vec{0}}$$

Donc les équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide ne sont pas invariantes par la transformation de Galilée (pour des référentiels galiléens).

EXERCICE 09 :

Equation de conservation de charges

$$div(\vec{j}) + \partial\rho/\partial t = 0$$

ρ est la densité volumique de charges.

$\vec{j} = nq.\vec{v} = \rho.\vec{v}$ est la densité volumique de courants (n densité volumique des porteurs).

Comme la charge est invariante par changement de référentiel $\rho' = \rho$.

La densité de courant dans le référentiel est donnée par :

$$\vec{j}' = \rho'.\vec{v}' = \rho\vec{v} - \rho.\vec{v}_e$$

Donc

$$\vec{j} = \vec{j}' + \rho v_e.\vec{e}_x \qquad (v_e = \text{constante})$$

En utilisant les relations des dérivées partielles (exercices 06 et 07).

$$div(\vec{j}) = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(j'_{x'} + \rho v_e\right)}{\partial x'} + \frac{\partial j'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial j'_{z'}}{\partial z'} = div'(\vec{j}') + v_e\frac{\partial\rho}{\partial x'}$$

D'un autre coté

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t'} - v_e\frac{\partial\rho}{\partial x'} = \frac{\partial\rho'}{\partial t'} - v_e\frac{\partial\rho'}{\partial x'}$$

En faisant la somme

$$div(\vec{j}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = div'(\vec{j}') + v_e\frac{\partial\rho}{\partial x'} + \frac{\partial\rho'}{\partial t'} - v_e\frac{\partial\rho'}{\partial x'} = 0$$

Comme $\rho' = \rho$, nous trouvons la forme invariante

$$\boxed{div'(\vec{j}') + \frac{\partial\rho'}{\partial t'} = 0}$$