RÉSUMÉ DU COURS

TRANSFORMATION DE LORENTZ-POINCARÉ

$\mathcal{R}'$ est un référentiel en translation uniforme d'une vitesse v_e par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} ct = \gamma_e(\beta_e . x' + ct') \\ x = \gamma_e(x' + \beta_e . ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \beta_e = \frac{v_e}{c} \qquad \gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$$

Un événement est un phénomène lié au mouvement qui se produit à une position donnée et à un instant donné, par rapport à un référentiel préalablement définit. Un événement est donc représenté par un point dans l'espace-temps à quatre dimensions de Minkowski.

Intervalle espace-temps entre deux événements

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

L'intervalle entre deux événements est invariant par la transformation de Lorentz pour tous les référentiels galiléens.

- Si $s_{12}^2 > 0$: **Intervalle du genre temps**. Dans ce cas le point représentant l'événement E_2 se trouve à l'intérieur du **cône de lumière** centré au point correspondant à l'événement E_1. Les deux événements peuvent être reliés par une **ligne d'univers**.
- Si $s_{12}^2 < 0$: **Intervalle est du genre espace.** Dans ce cas le point représentant l'événement E_2 se trouve à l'extérieur du cône de lumière centré au point correspondant à l'événement E_1. Les deux événements ne peuvent pas être reliés par une **ligne d'univers**.
  Le **principe de causalité** n'est pas vérifié pour les intervalles du genre espace car l'ordre temporel peut être inversé par changement de référentiel.
- Si $s_{12}^2 = 0$: **Intervalle est du genre lumière.** Dans ce cas le point représentant l'événement E_2 se trouve sur la surface du cône de lumière centré au point correspondant à l'événement E_1.

Si deux événements se produisent au même instant mesuré par deux horloges synchronisées dans le même référentiel on dit alors que les deux événements sont **simultanés**.

On dit que deux événements sont **localisés** s'ils se produisent au même endroit, c'est-à-dire à la *même position* par rapport au même référentiel (intervalle genre temps).

DILATATION DES DURÉES

$$\Delta t = \gamma_e . \Delta\tau$$

$\Delta\tau$ est la « **durée propre** » de la particule, c'est la durée mesurée dans le référentiel lié à la particule appelé aussi « **référentiel propre** ».
Δt est la durée mesurée par un observateur lié dans tout autre référentiel $\mathcal{R}$ par rapport auquel la particule est en mouvement de translation uniforme d'une vitesse v_e (durée impropre).
La durée **minimale** est mesurée dans le référentiel propre de la particule (durée propre).

CONTRACTION DES LONGUEURS

$$l_p = \gamma_e . l_i$$

l_p est la « **longueur propre** » mesurée dans le « **référentiel propre** » du corps.
l_i est la durée mesurée par un observateur lié dans tout autre référentiel $\mathcal{R}$ par rapport auquel le corps est en mouvement de translation uniforme d'une vitesse v_e (longueur impropre).

SÉRIE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 02
TRANSFORMATION DE LORENTZ–POINCARÉ

EXERCICE 01 :

On considère un événement $E_1(ct_1 = 1{,}2\,, x_1 = 0{,}1\,,\ y_1 = 0{,}5\,,\ z_1 = 0{,}2)_{\mathcal{R}}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Un autre événement est donné par $E_2(ct_2' = 0{,}9\,,\ x_2' = 0{,}8\,,\ y_2' = 0{,}1\,,\ z_2' = 0{,}1)_{\mathcal{R}'}$ dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement de translation uniforme suivant l'axe (Ox) à la vitesse $v_e = 0{,}5.c$ par rapport à $\mathcal{R}$, les axes $(Ox), (Oy), (Oz)$ sont respectivement parallèles aux axes $(O'x'), (O'y'), (O'z')$.Toutes les coordonnées sont données en mètre.

1. Calculer les coordonnées de E_1 dans $\mathcal{R}'$ et les coordonnées de E_2 dans $\mathcal{R}$.
2. En déduire le carré de l'intervalle espace-temps entre ces deux événements.

EXERCICE 02 :

Trois personnes se trouvent dans un train qui se déplace avec une vitesse $\vec{v} = v.\vec{e}_x$ par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$. La personne en tête du train est notée T, celle du milieu est notée M, et la personne en queue de train est notée Q. La longueur du train mesurée par ces trois personnes est notée L. A l'instant où M passe devant un observateur O de $\mathcal{R}$, elle reçoit simultanément les signaux lumineux émis par T et Q.

1. Trouver les coordonnées des événements $E_1 =$ « émission en T » et $E_2 =$ « émission en Q », dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au train, puis dans le référentiel $\mathcal{R}$, sachant que les coordonnées de l'événement $E_0 =$ « réception en M » sont nulles en $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$.
2. Quelle est la durée qui sépare les événements E_1 et E_2 dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$? Calculer le carré de l'intervalle espace-temps entre les deux événements.

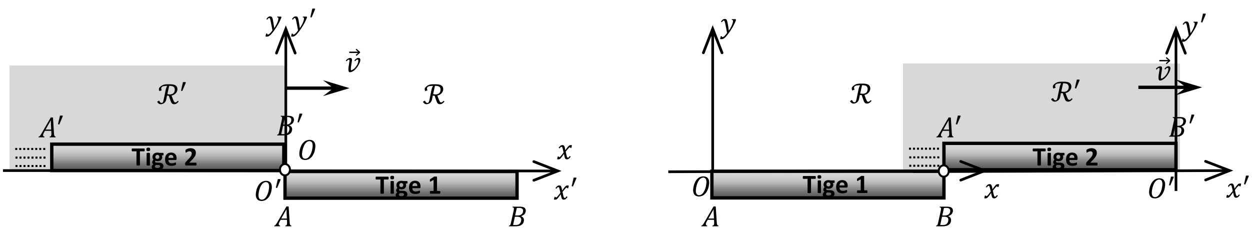
EXERCICE 03 :

1. Montrer à l'aide de l'écriture hyperbolique que le produit de deux transformations de Lorentz est aussi une transformation de Lorentz. Quelle est alors la rapidité de la transformation résultante ?
2. Quelle est la condition sur les rapidités des transformations de Lorentz pour que le produit de ces transformations soit égal à l'unité.
3. Les coordonnées spatio-temporelles d'un événement sont respectivement dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: $E(t = 2\,ns\,,\ x = 1{,}5\ m)_{\mathcal{R}}$ et $E(t'\,,\ x' = 1{,}7\,m\,)_{\mathcal{R}'}$. Calculer la rapidité d'entrainement r_e de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, puis en déduire t'.

EXERCICE 04 :

Considérons deux tiges AB et $A'B'$ de *longueurs propres* identiques notées l, la tige $A'B'$ glissant sur la tige AB à une vitesse $\vec{v} = v.\vec{e}_x$. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont les deux référentiels liés respectivement aux tiges AB et $A'B'$.Notons les deux événements $E_1 =$ « A et B' coïncident » et $E_2 =$ « B et A' coïncident ».

1. Ecrire les coordonnées de E_1 et de E_2 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
2. En déduire le carré de l'intervalle entre ces deux événements.
3. Vérifier l'invariance de cet intervalle. Quel est son genre ? Calculer sa valeur dans le cas où $l = 1\,m$ et $v = 0{,}8.c$.



EXERCICE 05 :

1. Ecrire la transformation de Lorentz réduite aux deux coordonnées (ct, x) du référentiel $\mathcal{R}$ en fonction des coordonnées (ct', x') du référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme d'une vitesse $\vec{v}_e = v_e.\vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$.
2. Expliciter en fonction de γ_e et de β_e les éléments de la matrice de Lorentz L définie par :
$$\binom{ct}{x} = L\binom{ct'}{x'}$$
3. Ecrire l'équation caractéristique donnant les valeurs propres de cette matrice. En déduire ces valeurs propres.
4. Quelles sont les pentes des vecteurs propres correspondants à chaque valeur propre ? Commenter physiquement.

EXERCICE 06 :

Une barre de longueur propre l se déplace parallèlement à elle-même avec une vitesse constante v par rapport à un observateur considéré comme fixe. Déterminer la vitesse de déplacement de la barre en sachant que la longueur de la barre mesurée par l'observateur est égale à $l/2$.

EXERCICE 07 :

Un muon est formé dans la haute atmosphère, en un point O pris comme origine d'un référentiel terrestre $\mathcal{R}$. La trajectoire du muon est rectiligne verticale et dirigée vers le bas repérée par l'axe (Ox) et sa vitesse est $v = 0{,}99.c$. Après avoir parcouru une distance $d = 5\,km$ le muon se désintègre en un point noté D de l'axe (Ox). Le référentiel propre du muon est noté $\mathcal{R}'$ tel que $(O'x')$ est toujours parallèle à (Ox).

1. Calculer la durée qui sépare la formation et la désintégration du muon, mesurée par un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}$.
2. Ecrire les coordonnées spatio-temporelles des événements de formation E_f et de désintégration E_d du muon par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ puis par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$.
3. Calculer l'intervalle espace-temps entre les deux événements E_f et E_d.
4. Quelle est la durée de vie propre du muon ?

EXERCICE 08 :

On reçoit d'un objet stellaire une onde fortement décalée vers le rouge. La raie α de Lyman de l'hydrogène, de longueur d'onde dans le laboratoire $\lambda_s = 126\,nm$ (longueur propre), est observée à la longueur d'onde $\lambda_r = 270\,nm$.

1. En admettant que ce décalage est dû au seul déplacement longitudinal de l'objet émetteur par rapport à la Terre, calculer la vitesse de cet objet et trouver le sens de son déplacement.
2. Quelle valeur de la vitesse aurait-on obtenu à partir de l'effet Doppler dans la théorie classique ?

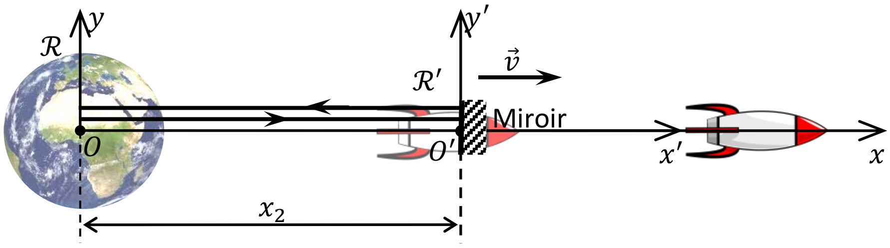
EXERCICE 09 :

Un train (référentiel $\mathcal{R}'$) de longueur propre l est animé d'une vitesse v constante par rapport au sol (référentiel $\mathcal{R}$). Ce train entre dans un tunnel rectiligne de longueur L pour un observateur lié au sol, telle que $L = l/\gamma$ où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ est le facteur relativiste.

1. En prenant comme événement d'origine l'événement $E_0 =$ « la tête du train sort du tunnel », écrire dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les coordonnées de l'événement $E_1 =$ « la queue du train entre dans le tunnel ».
2. Montrer que la phrase « le train est contenu dans le tunnel », à un instant que l'on précisera, a un sens dans $\mathcal{R}$. Retrouver ce résultat à l'aide de la loi de contraction des longueurs.
3. L'observateur lié au train (référentiel $\mathcal{R}'$) peut-il faire un raisonnement analogue ?

EXERCICE 10 :

Une fusée (référentiel $\mathcal{R}'$) se déplace avec une vitesse constante $v = \beta . c$ par rapport à la Terre (référentiel $\mathcal{R}$). Les conditions initiales et les directions des axes sont ceux de la transformée de Lorentz dont les variables sont (ct, x). Après un temps $t_1 = T$ dans le référentiel terrestre, la Terre émet un signal lumineux en direction de la fusée, quand le signal est reçu par la fusée il est immédiatement réfléchit par un miroir vers la Terre. Nous appelons les événements : E_1 « émission du signal à partir de la Terre », E_2 « réception-réflexion du signal sur la fusée » et E_3 « réception du signal sur Terre».



1. Ecrire en fonction de β, γ et cT les coordonnées des événements E_1, E_2 et E_3 dans les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ (remarquer que : $t_2 = t_1 + (x_2/c)$ et $t_3 = t_2 + (x_2/c)$).
2. Représenter sur le diagramme de Minkowski pour $\beta = 0{,}5$ les axes (x', ct') puis les événements E_2 et E_3 en précisant leurs coordonnées.