2 Existence et unicité des solutions

Definition 1 *Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui même, T est une contraction, S'il existe une constante $k \in]0,\ 1[$ telle que, pour tout $x,\ y \in E$, on a*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Theorem 2 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit T une application dans un espace de Banach E tel que T^p est une contraction dans E pour quelque entier positive p. Alors T admet un unique point fixe.*

Theorem 3 (Théorème du point fixe) *Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \longrightarrow F$ une application contractante, alors*

- **a.** *L'équation $Tx = x$, a une seul solution unique.*
- **b.** *La solution unique x peut être obtenir par la limite de la suite (x_n) de F définie par $x_n = Tx_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, où x_0 est un arbitraire de F,*

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0.$$

Theorem 4 *Soit l'équation suivante*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{5}$$

si le noyau k est continu sur $[a, b] \times [a, b], f \in L^2([a, b])$, et $|\lambda|B < 1$, où

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dx dt}$$

Alors l'équation (5) admet une solution unique $u \in L^2([a, b])$.

Proof. On considère l'équation

$$(Tu)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \tag{6}$$

puisque $f \in L^2([a, b]), Tu \in L^2([a, b])$ si $\int_a^b k(x,t)u(t)dt \in L^2([a, b])$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right| &\leq \int_a^b |k(x,t)u(t)|dt \\ &\leq \left(\int_a^b |k(x,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_a^b \left|\int_a^b k(x,t)u(t)dt\right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(x,t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |u(t)|^2 dt\right) dx$$
$$\leq \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx \int_a^b |u(t)|^2 dt$$

et comme

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dt dx < \infty, \text{ et } \int_a^b |u(t)|^2 dt < \infty.$$

Alors l'équation (6) est satisfaisante et T de $L^2([a,b])$ dans lui-même. Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(Au)(x) = \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

est borné, donc par le théorème du point fixe l'équation $Tu = u$ admet une solution unique, pour $|\lambda| B < 1$ ∎

Lemma 5 *Soient X et Y deux espaces compact. L'ensemble des fonctions continues de X vers Y muni de la norme uniforme est complet.*

Theorem 6 *Soit $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Alors si λ est suffisamment petit, l'équation*

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x) \tag{7}$$

admet une unique solution qui sera de plus continue sur $[a,b]$.

Proof. Nous considérons l'ensemble F des fonctions continues $[a,b] \longrightarrow [a,b]$, muni de la norme uniforme, donc par le lemme 5 implique que F est complet. Nous considérons l'application $\phi : F \longrightarrow F$ donnée par

$$\phi(u)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

Nous montrons que ϕ^p, est une application contractante pour un certain p. Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\phi(u) - \phi(v)\|_\infty &\leq \|\phi(u)(x) - \phi(v)(x)\| \\ &= |\lambda| \left\| \int_a^b k(x,t)[u(t) - v(t)]dt \right\| \\ &\leq |\lambda| \, \|k\|_\infty \, |a-b| \, \|u - v\|_\infty .\end{aligned}$$

Si λ est assez petit, et si p est assez grand, l'application ϕ^p, est doc une contraction. Elle possède donc un unique point fixe, qui est la solution de l'équation (7). ∎