3 Équations à noyau dégénéré

On considère l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce à noyau dégénéré de la forme

$$\begin{aligned} u(x) =& f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} \alpha_m(x) \int_a^b \beta_m(t)u(t)dt. \end{aligned}$$

En posant

$$c_m = \int_a^b \beta_m(t)u(t)dt, \quad m = 1, ...n,$$

on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \alpha_m(x). \tag{8}$$

où les c_i sont des constantes à déterminer. Pour ce faire, nous multiplions les deux cotés de l'équation (8) par $\beta_i(x)$ et intégrer de a à b, nous obtenons

$$\int_a^b \beta_i(x)u(x)dx = \int_a^b \beta_i(x)f(x)dx + \lambda \sum_{m=1}^{n} c_m \int_a^b \beta_i(x)\alpha_m(x)dx. \tag{9}$$

En utilisant les notations suivantes

$$\int_a^b \beta_i(x)f(x)dx = f_i, \quad \int_a^b \beta_i(x)\alpha_m(x)dx = a_{im},$$

l'équation (8) devient

$$c_i - \lambda \sum_{m=1}^{n} a_{im}c_m = f_i, \quad m = 1, ...n, \tag{10}$$

qui est un système d'équations linéaires à n inconnues de la forme

$$(I - \lambda A)c = f, \tag{11}$$

où I est la matrice identité d'ordre n, A est la matrice a_{im}. c et f sont des matrices colonnes. Le déterminant $D(\lambda)$ du système algébrique (8) est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

C'est un polynôme de degré au plus n, il joue un rôle important dans l'existence de la solution du système, et par conséquent de l'équation intégrale en question. Précisément, pour toutes les valeurs de λ dont le déterminant $D(\lambda) \neq 0$, le système algébrique (11) et donc également l'équation intégrale correspondante admettent une solution unique. D'autre part, pour les valeurs de λ dont $D(\lambda) = 0$, le système algébrique avec son équation intégrale, ou bien n'admettent aucune solution ou bien ont un nombre infini de solutions.

Exemple 7 *Résoudre l'équation intégrale*

$$u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(t)dt. \tag{12}$$

Il est clair que la solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$u(x) = 1 + \lambda c, \tag{13}$$

où

$$c = \int_0^1 u(t)dt.$$

En intégrant les deux cotés de l'équation (13) de zéro à un, on obtient $(1-\lambda)c = 1$. Donc, si $\lambda \neq 1$, la solution de l'équation (12) est donnée par

$$u(x) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Exemple 8 *Résoudre l'équation intégrale suivante*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (x+t)u(t)dt \tag{14}$$

et déterminer les valeurs propres.

On remarque que le noyau de l'équation intégrale (14) est séparable, $\alpha_1(x) = x, \alpha_2(x) = 1$ et $\beta_1(t) = 1, \beta_2(t) = t$. En utilisant les notations (10), après un simple calcul on obtient

$$a_{11} = 1/2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = 1/3, a_{22} = 1/2$$

et

$$f_1 = \int_0^1 f(t)dt, \qquad f_2 = \int_0^1 tf(t)dt.$$

En porte ces valeurs dans (11), on obtient le système

$$\begin{cases} (1-\lambda/2)c_1 - \lambda c_2 & = f_1 \\ -(\lambda/3)c_1 + (1-\lambda/2)c_2 & = f_2. \end{cases} \tag{15}$$

Le déterminant $D(\lambda)$ est nul si $\lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0$. Par conséquent les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = (-6 + 4\sqrt{3}), \qquad \lambda_2 = (-6 - 4\sqrt{3}).$$

Si λ est égale à l'une de ces valeurs, l'équation homogène admet une solution non triviale, tandis que l'équation intégrale (14) est, en générale, non résoluble. Si λ diffère de ces valeurs, la solution du système algébrique (15) est

$$c_1 = \frac{[-12f_1 + \lambda(6f_1 - 12f_2)]}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}, \quad c_2 = \frac{[-12f_1 + \lambda(4f_1 - 6f_2)]}{\lambda^2 + 12\lambda - 12}.$$

Donc, la solution est donnée comme suite

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{6(\lambda - 2)(x + t) - 12\lambda xt - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12} f(t)dt.$$

La fonction

$$R(x, t, \lambda) = \frac{6(\lambda - 2)(x + t) - 12\lambda xt - 4\lambda}{\lambda^2 + 12\lambda - 12},$$

s'appelle résolvante. Nous avons réussi à inverser l'équation intégrale puisque le coté droit de la formule obtenue est une quantité connue.