Série d'exercices 1

Exercice 1. *Étudier l'existence des solutions pour les équations intégrales suivantes :*

1. $u(x) = 1 + \int_0^1 (x+t)u(t)dt.$
2. $u(x) = 1 + (4\sqrt{3} - 6)\int_0^1 (x+t)u(t)dt.$
3. $u(x) = 1 - (4\sqrt{3} + 6)\int_0^1 (x+t)u(t)dt.$

Exercice 2. *Discuter suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'existence des solutions pour les équations intégrales suivantes*

1. $u(x) = cos(3x) + \lambda \int_0^\pi cos(x+t)u(t)dt.$
2. $u(x) = e^x + \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 u(t)dt.$
3. $u(x) = x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (xcos(t) + t^2 sin(x) + cos(x)sin(t))u(t)dt.$

Exercice 3. *Soit l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce suivante*

$$u(x) = ax + \lambda \int_0^1 xtu(t)dt.$$

Montrer que la solution unique de cette équation est donnée par

$$u(x) = \frac{ax}{1 - \frac{\lambda}{3}}.$$

Exercice 4. *Soit*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^\pi sin(x-t)u(x)dx.$$

1. *Montrer que le noyau le noyau de cette équation est séparable.*
2. *Calculer la résolvante.*
3. *Déduire pour quelles valeurs de λ la solution existe-elle ?*

Mêmes questions pour l'équation suivante :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \left(\frac{x^2 - t^2}{x - t}\right)^2 u(x)dx.$$

Exercice 5. *Résoudre les équations intégrales de Fredholm suivantes :*

1. $k(x,t) = e^{x+t};$ $\quad a = 0, b = 1.$
2. $k(x,t) = sin(x)cos(t);$ $\quad a = 0, b = \frac{\pi}{2}.$
3. $k(x,t) = xe^t;$ $\quad a = -1, b = 1.$
4. $k(x,t) = (1+x)(1-t);$ $\quad a = -1, b = 0.$
5. $k(x,t) = x^2t^2;$ $\quad a = -1, b = 1.$
6. $k(x,t) = xt;$ $\quad a = -1, b = 1.$

Pour $f(x) = 1$ et $f(x) = x$.