4 Noyaux itérés

On considère une équation intégrale linéaire de seconde espèce

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{16}$$

où les fonctions $f(x)$ et $k(x,t)$ sont de carrés intégrables. Nous allons chercher une solution de cette équation en utilisant la suite itérative suivante

$$u_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_n(t)dt. \tag{17}$$

La mise en œuvre de ce processus itératif nécessite la donnée d'un itéré initial, on peut prendre par exemple $u_0(x) = f(x)$. En substituant cet élément dans le coté droit de l'équation récurrente (17), on obtient le premier itéré

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt, \tag{18}$$

et ainsi de suite. Cette méthode d'approximation est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir duquel u_n tend uniformément vers une limite u. Bien entendu, une telle limite si elle existe, elle est nécessairement une solution de l'équation intégrale (16). Pour étudier cette convergence, nous allons examiner en détail le processus itératif (17) tout en cherchant à déterminer les conditions pour inverser l'équation intégrale à l'aide de la résolvante. A partir des deux premières itérations, nous avons

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt, \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned} u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \left[\int_a^b k(t,z)f(z)dz \right] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt \end{aligned}$$

où

$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,z)k(z,t)dzdt. \tag{20}$$

Ainsi,

$$u_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,t)f(t)dt$$

avec

$$k_3(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_2(z,t)dzdt. \tag{21}$$

En continuant ce processus itératif, et en notant

$$k_m(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_{m-1}(z,t)dzdt, \tag{22}$$

on obtient le n-ième itéré, solution approchée de l'équation intégrale (16)

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)f(t)dt. \tag{23}$$

L'expression $k_m(x,t)$ est appelée le m-ième terme de la suite des noyaux itérés, avec $k_1(x,t) = k(x,t)$. Par passage à la limite, $n \longrightarrow \infty$, on obtient ce qu'on appelle la série de Neumann

$$u(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)f(t)dt. \tag{24}$$

Il convient de montrer, sous quelles conditions cette série converge-t-elle ? Pour ce faire, nous allons étudier la somme partielle et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir une majoration du terme général

$$\left|\int_a^b k_m(x,t)f(t)dt\right|^2 \leq C_m^2 D^2 \tag{25}$$

où

$$D^2 = \int_a^b |f(t)|^2, \qquad C_m^2 = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt.$$

Il faut établir donc une majoration de la constante C_m^2. Pour cela, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la relation (22)

$$|k_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |k_{m-1}(x,z)|^2 dz \int_a^b |k(z,t)|^2 dz$$

et intégrer les deux cotés par rapport à t, ce qui donne

$$\int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt \leq B^2 C_{m-1}^2, \tag{26}$$

où

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |k(z,t)|^2 dzdt. \tag{27}$$

De l'inégalité (25), on obtient la relation récurrente

$$C_m^2 \leq B^{2m-2} C_1^2. \tag{28}$$

Ainsi, des relations (25) et (28), en on déduit

$$\int_a^b |k_m(x,t)|^2 dt \leq C_1^2 D^2 B^{2m-2}. \tag{29}$$

Donc, le terme général de la somme partielle (23) est en valeur absolue majoré par la quantité $C_1 D|\lambda|^m B^{m-1}$. Il en résulte que la série infinie (24) converge plus rapidement que la série géométrique de raison $|\lambda|B$. Par conséquent, si

$$|\lambda|B < 1 \tag{30}$$

la convergence uniforme de cette série est assurée. Par ailleurs, il faut montrer ainsi l'unicité de la limite pour un λ qui satisfait cette condition. On suppose que l'équation (16) admet deux solutions $u_1(x)$ et $u_2(x)$. En posant $u_1(x) - u_2(x) = \varphi(x)$, on obtient l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \varphi(t)dt. \tag{31}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette équation et intégrer ensuite par rapport à x pour obtenir

$$\int_a^b |\varphi(x)|dx \leq |\lambda|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 dtdx \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx, \tag{32}$$

d'où

$$(1 - |\lambda|^2 B^2) \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \leq 0.$$

Comme $|\lambda|^2 B^2 < 1$, on conclut que $\varphi(x) = 0$.

Finalement, notons qu'on peut évaluer la résolvante en fonction des noyaux itérés $k_m(x,t)$. En effet, en échangeant l'ordre entre l'intégration et la somme dans la série de Neumann (24), on obtient

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,t) \right) f(t)dt, \tag{33}$$

de la forme

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt. \tag{34}$$

où

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} k_m(x,t). \tag{35}$$

Exemple 9 *Trouver les itérés du noyau $k(x,t) = x - t$ si $a = 0$, $b = 1$.*

Utilisant la formule (22), on obtient

$$k_1(x,t) = k(x,t) = x - t,$$
$$k_2(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_1(z,t)dz = \int_0^1 (x-z)(z-t)dz = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$
$$k_3(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_2(z,t)dz = \int_0^1 (x-z)(\frac{z+t}{2} - zt - \frac{1}{3})dz = -\frac{x-t}{12},$$
$$k_4(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_4(z,t)dz = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-z)(z-t)dz = -\frac{1}{12}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}),$$
$$k_5(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_4(z,t)dz = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-z)(\frac{z+t}{2} - zt - \frac{1}{3})dz = \frac{x-t}{12^2},$$
$$k_6(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_5(z,t)dz = \frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-z)(z-t)dz = -\frac{1}{12^2}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}).$$

Il en résulte que les noyaux itérés sont de la forme

$$\begin{cases} k_{2k-1}(x,t) & = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t), \qquad \text{Si } n = 2k-1, \\ k_{2k}(x,t) & = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}), \qquad \text{Si } n = 2k. \end{cases}$$

Exemple 10 *A'l'aide des noyaux itérés, résoudre* $u(x) = x + \lambda\int_0^1 xtu(t)dt$.

En utilisant toujours la formule (22), on obtient

$$k_1(x,t) = k(x,t) = xt,$$
$$k_2(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_1(z,t)dz = \int_0^1 (xz)(zt)dz = \frac{xt}{3},$$
$$k_3(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_2(z,t)dz = \int_0^1 (xz)\left(\frac{xt}{3}\right) = \frac{xt}{3^2},$$
$$\vdots$$
$$k_n(x,t) = \int_0^1 k_1(x,z)k_{n-1}(z,t)dz = \int_0^1 (xz)\left(\frac{zt}{3^{n-2}}\right)dz = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Selon la formule (35) la résolvante est donnée par

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1}k_m(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{3^{m-1}}xt = \frac{3}{3-\lambda}xt, \qquad |\lambda| < 3.$$

En vertu de la formule (34) la solution de l'équation intégrale de l'exemple 10 s'écrit

$$u(x) = x + \lambda\int_0^1 R(x,t;\lambda)f(t)dt = x + \lambda\int_0^1 \frac{3xt^2}{3-\lambda}dt = \frac{3x}{3-\lambda}. \tag{36}$$

avec $\lambda \neq 3$.