Série d'exercices N2

Exercice(01)
On considère 4 ensembles A, B, C et D, et des applications $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $h : C \longrightarrow D$.
Montrer que
$g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.
$g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.
Montrer que :
($g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives)$\Longleftrightarrow$ (f, g et h sont bijectives).
Exercice(02)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
1. f est-elle injective ? surjective ?
Exercice(03)
Soit $f : X \longrightarrow Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalents :
1/ f est injective.
2/ Pour tout A, B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
Exercice(04)
Soit E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$. Soient également A et B deux parties de F.
1./ Démontrer que $A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est elle vraie ?
2/ Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3/ Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
Exercice(05)
Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x}$ est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.
Exercice(06)
Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x \;\; pair, \\ 0 & si \;\; x \;\; impair. \end{cases}$
Dérminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
Exercice(07)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
1 f est injective.
2 $\forall A \in P(E) f^{-1}(f(A)) = A$
3 $\forall A_1, A_2 \in P(E) f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
4 $\forall A \in P(E) f(C_E A) \subset C_F f(A)$.
5 $\forall A_1, A_2 \in P(E) f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$.
Exercice(08)
1.Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui même définie par :
$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$.
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}, A = \{1, 2\}, A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}, A = [1, 2]$.

Exercice(09)

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, Montrer que :

1/ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2/ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Exercice(10)

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives ;

$f \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$, $f \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$, $g \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + x^3 \end{array}$, $h \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 + x^3 \end{array}$, $f \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [0,2] \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$,

$f \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + x^4 \end{array}$.

Exercice(11)

1/ Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :

$A_1 =]-\infty, 0]$, $A_2 =]-\infty, 0[$, $A_3 =]0, +\infty[$, $A_4 = [0, +\infty[$, $A_5 =]1, 2[$, $A_6 = [1, 2[$,

2/ Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$.

Comparer les ensembles suivantes $C_{\mathbb{R}}A$ et $C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$.

Exercice(12)

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Montrer que :

Si f est strictement monotone, alors f est injective.