Propriétés de l'érosion et de la dilatation

PROPRIÉTÉS DE L'ÉROSION ET DE LA DILATATION

On peut noter quelques propriétés intéressantes de la dilatation :

.La dilatation est associative : $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

.La dilatation est commutative : $A \oplus B = B \oplus A$

Si on note $B \oplus B \oplus \cdots \oplus B = nB$, alors

$$A \oplus B \oplus B \oplus \cdots \oplus B = A \oplus nB$$

Plutôt que de faire n dilatations sur A (qui peut être une grande image), on peut (n-1) dilatations de B (qui est généralement petit), et une seule dilatation sur A (plus rapide).

Propriétés de l'érosion et de la dilatation

On **ne possède pas ces propriétés** pour l'éro

0	0	0
1	1	1
0	0	0

B

0	1	0
0	1	0
0	1	0

C

0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0

A

0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

$A \ominus B$

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$(A \ominus B) \ominus C$

$$B \ominus C = \emptyset \text{ donc } A \ominus (B \ominus C) = A \neq (A \ominus B) \ominus C$$

$$B \ominus A = \emptyset \text{ donc } A \ominus B \neq B \ominus A$$

Propriétés de l'érosion et de la dilatation : la décomposabilité (1)

On possède néanmoins une propriété intéressante pour l'érosion qui s'appelle la **décomposabilité** :

$$A \ominus (B \oplus C) = A \ominus B \ominus C$$

Cette propriété explique si un élément structurant peut être décomposé en plusieurs dilatations, alors on peut effectuer une érosion par cet élément structurant en faisant plusieurs érosions successives.

Propriétés de l'érosion et de la dilatation : la décomposabilité (2)

A quoi peut servir la décomposabilité ?

Imaginons le problème suivant : on veut calculer l'érosion de A par D, mais on ne possède pas beaucoup de mémoire. Impossible de charger A complètement dans la mémoire de l'ordinateur !

On remarque que $D = B \oplus C$

0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

D

0	0	0
1	1	1
0	0	0

B

0	1	0
0	1	0
0	1	0

C

Propriétés de l'érosion et de la dilatation : la décomposabilité (2)

Grâce à la propriété de décomposabilité, on sait que

$$A \ominus D = A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$$

L'intérêt est le suivant : B est un élément structurant qui ne « regarde » que les pixel[illegible]tués sur [illegible]e lig[illegible]eut donc effectuer une érosion [illegible] envoya[illegible]s le [illegible]'érosion, ligne par ligne (et éviter de devoir charger toute l'image en mémoire).

Le même argument s'applique pour C à propos des colonnes de A.

1	1	1
1	$\boxed{1}$	1
1	1	1

D

0	0	0
1	$\boxed{1}$	1
0	0	0

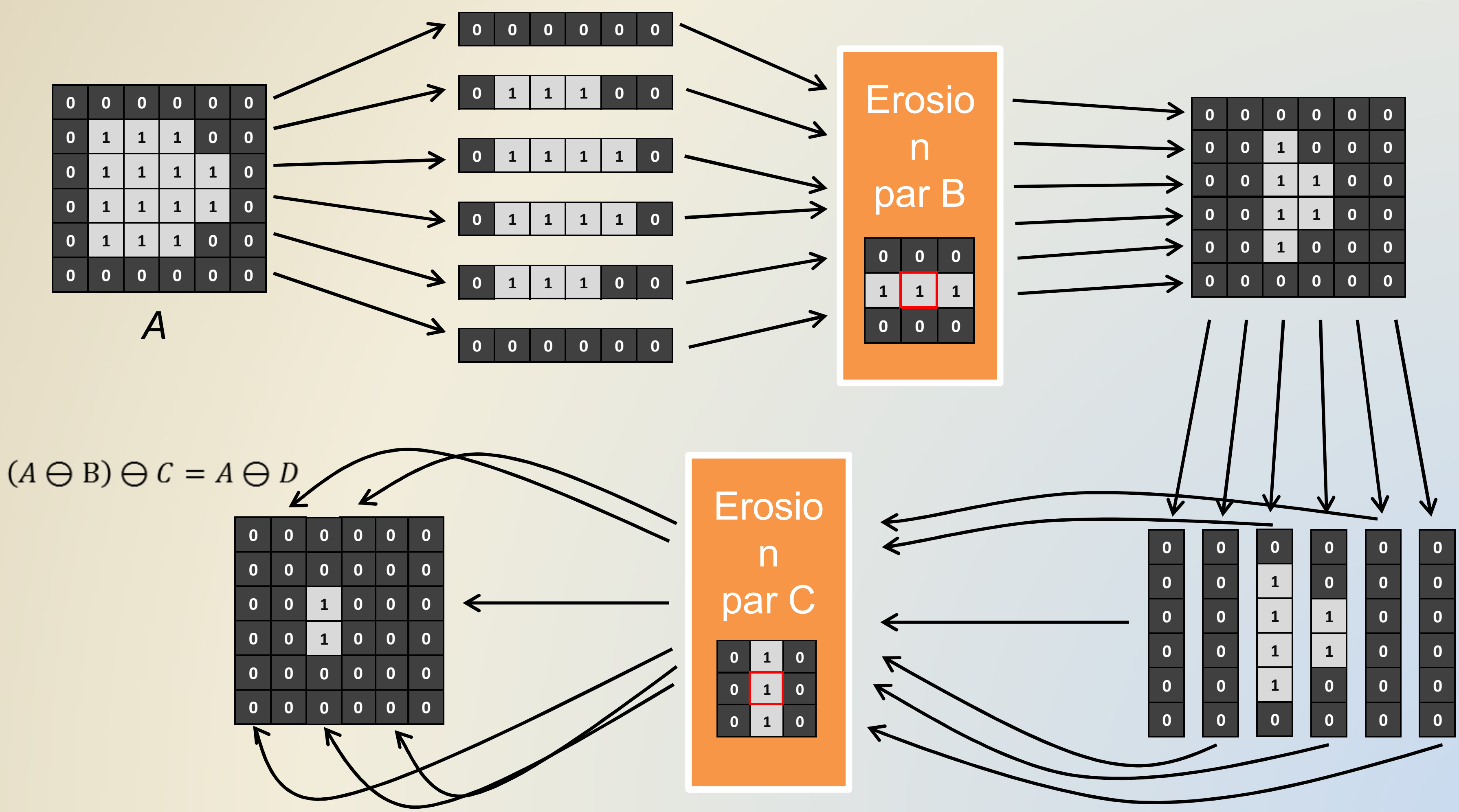
B

0	1	0
0	$\boxed{1}$	0
0	1	0

C

Propriétés de l'érosion et de la dilatation : la décomposabilité (4)

<u>Solution :</u> On effectue d'abord une érosion par B, puis par C.



Propriétés de l'érosion et de la dilatation : la décomposabilité (5)

La dilatation respecte aussi la propriété de décomposabilité :

$$A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$$

Cette propriété explique si un élément structurant peut être décomposé en plusieurs dilatations, alors on peut effectuer une dilatation par cet élément structurant en faisant plusieurs dilatations successives.

PROPRIÉTÉS DE L'ÉROSION ET DE LA DILATATION

On définit les opérateurs duaux :

Soit un opérateur f sur les images. Le dual de f est l'opérateur f^*, tel que pour toute image I de $\mathbb{Z}^n$

$$f^*(I) = (f(I^c))^c$$

Le dual de l'érosion par un élément structurant E est la dilatation par $\breve{E}$.

Propriétés de l'érosion et de la dilatation

La dilatation et l'érosion sont invariantes par translation de l'image, mais **les choses sont différentes** pour la translation de l'élément structurant :

Pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$,

$$A_x \oplus E = (A \oplus E)_x$$
$$A_x \ominus E = (A \ominus E)_x$$

$$A \oplus E_x = (A \oplus E)_x$$
$$A \ominus E_x = (A \ominus E)_{-x}$$

Propriétés de l'érosion et de la dilatation

La dilatation et l'érosion sont toutes deux des **opérateurs croissants du point de vue de l'image** :

Si $A_1 \subset A_2$, alors

$$(A_1 \oplus E) \subset (A_2 \oplus E)$$
$$(A_1 \ominus E) \subset (A_2 \ominus E)$$

Du **point de vue de l'élément structurant**, la **dilatation est croissante** tandis que **l'érosion est décroissante** :

Si $E_1 \subset E_2$, alors

$$(A \oplus E_1) \subset (A \oplus E_2)$$
$$(A \ominus E_2) \subset (A \ominus E_1)$$

Propriétés de l'érosion et de la dilatation

Enfin, rappelons que, comme précédemment énoncé, si **l'élément structurant contient l'origine**, alors **la dilatation est extensive** et **l'érosion est anti-extensive** (du point du vue de l'image).

$$0^n \in E \Longrightarrow \begin{cases} A \subseteq (A \oplus E) \\ (A \ominus E) \subseteq A \end{cases}$$

BOULES

On peut définir facilement, grâce à la dilatation et aux éléments structurants, des boules de différents rayons :

> Soit $E \subseteq \mathbb{Z}^n$ un élément structurant, et r, un entier positif. La boule associée à E et de rayon r est $B_E(r) = rE$.

On notera $B_4(r), B_8(r), B_6(r), B_{18}(r)$ et $B_{26}(r)$ les boules de rayon r associées respectivement à $\Gamma_4, \Gamma_8, \Gamma_6, \Gamma_{18}$ et Γ_{26}.

BOULES

Exemple : dessiner $B_4(3)$

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Γ_4

0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

$B_4(1) = \Gamma_4$ $B_4(3)$

La boule $B_4(3)$ est l'ensemble des pixels que l'on peut atteindre en trois coups ou moins si on se déplace en suivant Γ_4.

Cas pratiques

CAS PRATIQUES : L'ATTERRISSAGE DU DRONE

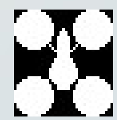
On possède un terrain délimité par une barrière (en noir). On veut poser dessus un drone téléguidé (qui ne peut que se translater, il ne peut pas tourner). Est-ce possible ? Si oui, où peut-on le poser ?

$Pos = Terrain \ominus Dr$

rgbImage

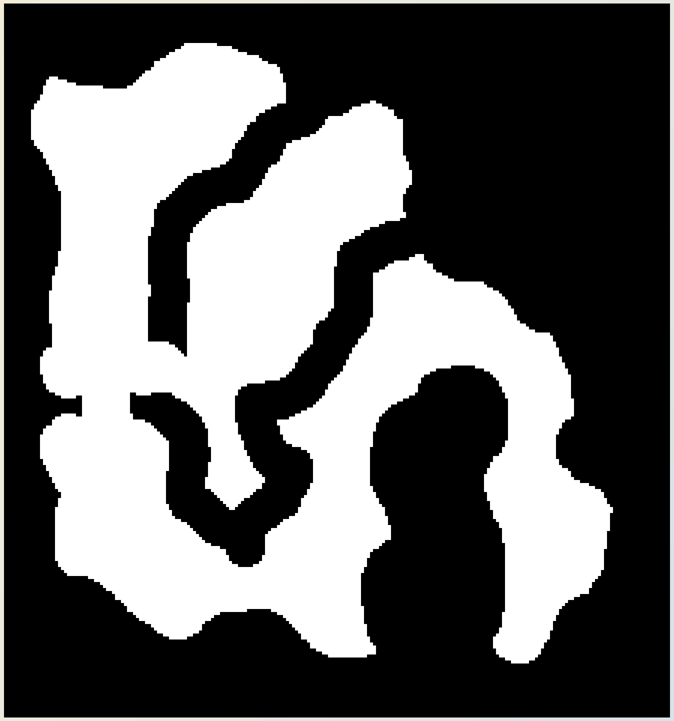
Dr

```
Terrain = imread('trace.png');
Dr = imread('drone.png');
Pos = imerode(Terrain, logical(Dr));
rgbImage = cat(3,Terrain,Terrain-Pos,Terrain-Pos);
```



CAS PRATIQUES : EXTRAIRE LES CONTOURS

Comment faire pour récupérer les contours d'un objet (à partir de l'image ci-dessous, récupérer la barrière seule) ?



EXTRAIRE LES CONTOURS D'UN OBJET BINAIRE

Comment extraire les contours de A ?

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

A

0	1	0
1	1	1
0	1	0

E

$A \oplus E$

0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0

$(A \oplus E) - A$

0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0

EXTRAIRE LES CONTOURS D'UN OBJET BINAIRE

Comment extraire les contours de A ?

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

A

0	1	0
1	1	1
0	1	0

E

$A \ominus E$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

$A - (A \ominus E)$

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

EXTRAIRE LES CONTOURS D'UN OBJET BINAIRE

Soit une image A et un élément structurant E, on peut définir trois méthodes de gradient :

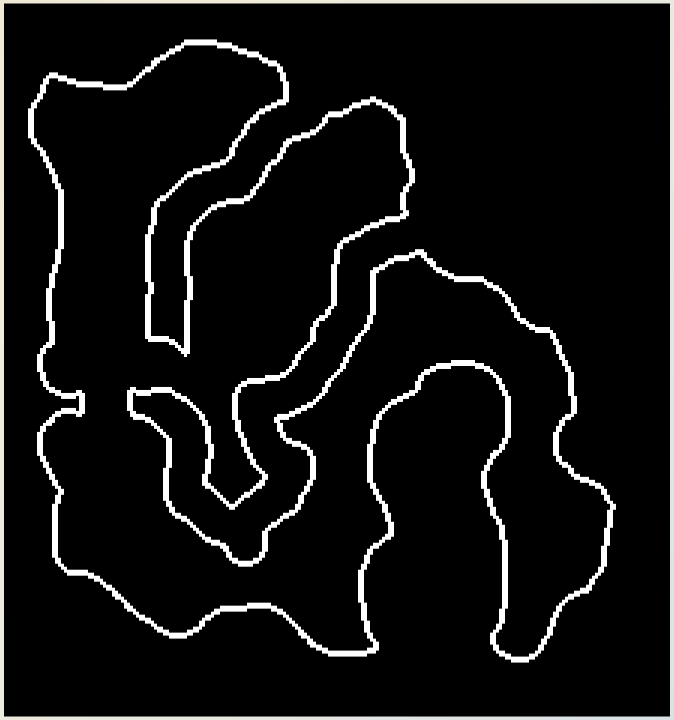
.Le gradient interne : $A - (A \ominus E)$

.Le gradient externe : $(A \oplus E) - A$

.Le gradient morphologique : $(A \oplus E) - (A \ominus E)$

En général, on choisit Γ_4 ou Γ_8 pour extraire les contours d'une image 2d, et Γ_6, Γ_{18} ou Γ_{26} pour une image 3d.

Cas pratiques : extraire les contours



$(I \oplus \Gamma_4) - (I \ominus \Gamma_4)$