الفصل الثالث
الإحصاء الكلاسيكي لحالات التوازن
توزيع ماكسويل“Distribution de Maxwell

حساب القيم المتوسطة و التغاير

$$< p_x > = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 kT}} e^{-{p_x}^2/2m_0kT}\, dp_x = 0$$

$$D =< (p_x - < p_x >)^2 > = < {p_x}^2 > - < p_x >^2 = < {p_x}^2 >$$

$$< {p_x}^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} {p_x}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 kT}} e^{-{p_x}^2/2m_0kT}\, dp_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0 kT}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{2m_0kT}\right)^{-3/2}$$

$$< {p_x}^2 > = m_0 kT$$

توزيع طويلة الدفع و الطاقة

للحصول على هذا التوزيع يجب التحول الى جملة الإحداثيات الكروية. لنبحث عن احتمال امتلاك جزيئة لطويلة دفع $\|\vec{p}\|$ في المجال من $\|\vec{p}\|$ الى $\|\vec{p}\| + dp$

$$dP_{\|\vec{p}\|} = \mathfrak{D}_{\|\vec{p}\|}\, dp = \int \mathfrak{D}_{\vec{p}}\; d^3p = \int (2\pi m_0 kT)^{-3/2}\, e^{-p^2/2m_0kT} d\Omega$$

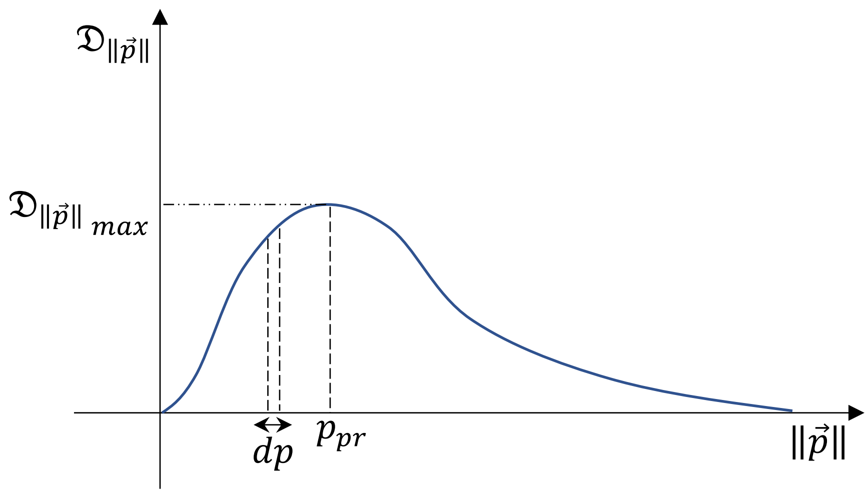
$$dP_{\|\vec{p}\|} = \int (2\pi m_0 kT)^{-3/2}\; e^{-p^2/2m_0kT}\, p^2 \, sin\theta \; dp d\theta d\varphi$$

$$dP_{\|\vec{p}\|} = (2\pi m_0 kT)^{-3/2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} sin\theta\; d\theta \int_p^{p+dp} p^2\, e^{-p^2/2m_0kT}\, dp$$

$$\boxed{dP_{\|\vec{p}\|} = \mathfrak{D}_{\|\vec{p}\|}\, dp = (2\pi)(2) \frac{p^2}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} e^{-p^2/2m_0kT}\, dp}$$

قيمة طويلة الدفع الأكثر احتمالا، وهي طويلة الدفع التي تملك أكبر احتمال.

$dP_{||\vec{p}||}$ تمثل احتمال امتلاك الجزيئة لدفع أو كمية حركة ذات طويلة $||\vec{p}||$ يمكن تمثيلها بمساحة مستطيل عرضه dp تحت المنحنى البياني التالي :



المساحة الأكبر لأي مستطيل تحت المنحنى هي مساحة المستطيل الذي له أكبر طول لأن المستطيلات متساوية العرض وبالتالي $dP_{||\vec{p}||max}$ توافق المساحة ذات الارتفاع $\mathfrak{D}_{||\vec{p}||\,max}$ لنبحث إذا عن $\mathfrak{D}_{||\vec{p}||\,max}$.

$$\mathfrak{D}_{||\vec{p}||\,max} = \mathfrak{D}_{||\vec{p}||=p_{pr}}$$

لنبحث عن p_{pr}

$$\frac{d\mathfrak{D}_{||\vec{p}||}}{dp} = \frac{4\pi}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}}\left(2p\, e^{-p^2/2m_0kT} - \frac{p^3}{m_0kT}\, e^{-p^2/2m_0kT}\right) = 0$$

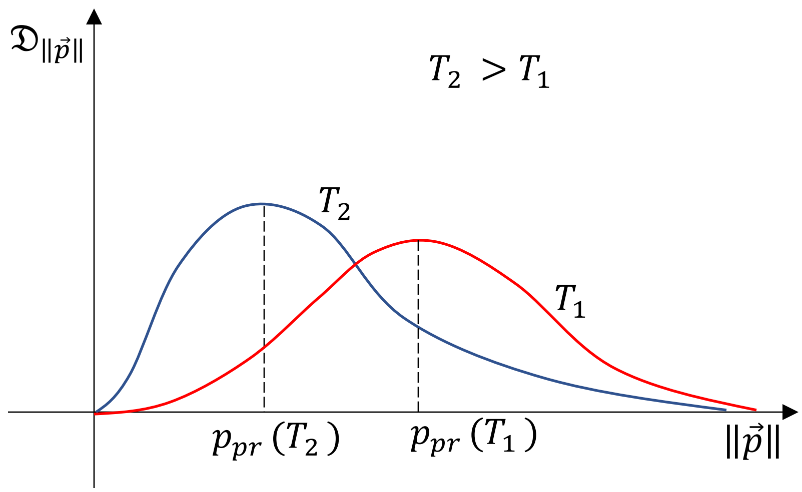
$$\Rightarrow 2p - \frac{p^3}{m_0kT} = 0 \;\Rightarrow p = 0\,;\;\; p = \sqrt{2m_0kT} = p_{pr}$$

الحل $p = 0$ مرفوض إذا $\sqrt{2m_0kT} = p_{pr}$

$$\mathfrak{D}_{||\vec{p}||\,max} = \mathfrak{D}_{||\vec{p}||=p_{pr}} = \frac{4\pi\,(2m_0kT)}{(2\pi m_0kT)^{3/2}}e^{-1} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,e\,p_{pr}} = \frac{0{,}59}{\sqrt{m_0kT}}$$

نلاحظ أن

$$\mathfrak{D}_{||\vec{p}||\,max} \propto \frac{\&}{\sqrt{T}}$$



توزيع الطاقة

نعتبر غاز مثالي، جزيئة لا تملك الا طاقة حركية أي أن طاقة الكلية E :

$$E = \frac{p^2}{2m_0} \Rightarrow dE = \frac{2pdp}{2m_0} = \frac{pdp}{m_0} \Rightarrow dp = \frac{m_0 dE}{p} = \sqrt{\frac{m_0}{2E}}\, dE$$

E تتعلق بـ p^2 أي تتعلق بطويلة الشعاع $\vec{p}$ ومنه

$$dP_E = \mathfrak{D}_{\|\vec{p}\|}\, dp = \mathfrak{D}_E\, dE = \frac{4\pi E 2m_0}{(2\pi m_0 kT)^{3/2}} e^{-2m_0E/2m_0kT} \sqrt{\frac{m_0}{2E}}\, dE$$

$$\boxed{dP_E = \mathfrak{D}_E\, dE = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} dE}$$