Polycopié de cours

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE I

FORMALISME DE LAGRANGE

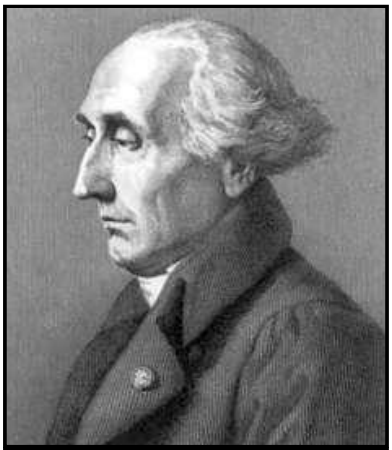
FORMALISME DE LAGRANGE

I. INTRODUCTION

Chronologie :

- Simon Stevin (1586) : étude des systèmes statiques et principe des déplacements virtuels.
- Jean Le Rond D'Alembert (1743) : principe des travaux virtuels appliqué à la dynamique « principe de D'Alembert ».
- Joseph-Louis Lagrange (1755) : correspondance avec Euler, début du calcul variationnel.
- Joseph-Louis Lagrange (1758) : publication sur les applications du calcul variationnel à des problèmes de mécanique.
- Joseph-Louis Lagrange (1788) : publication de la mécanique analytique (en France, commencé à Berlin).

La mécanique analytique telle que conçue par Joseph-Louis Lagrange est une reformulation de la mécanique différente de la formulation newtonienne, bien qu'elle n'apporte pas de concepts nouveaux, ce formalisme est une approche analytique plus élégante et plus puissante que le formalisme de Newton basé sur la notion de force (ou de moment de force dans le cas de la rotation). Historiquement, on s'accorde à dire que la publication de la « Mécanique analytique » en 1788 marque le début de la physique théorique.



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

La formulation Lagrangienne n'est pas locale comme la formulation newtonienne et porte sur le mouvement dans son ensemble. Elle se base sur le principe que l'état physique effectif du système coïncide avec la valeur minimale d'une grandeur donnée appelée « action » calculée entre deux instants : c'est le principe variationnel.

Les simplifications apportées par cette formulation en comparaison avec la formulation newtonienne :

- La formulation Lagrangienne permet de tenir compte des liaisons en diminuant le nombre de degrés de liberté sans expliciter les forces de contraintes.
- C'est une formulation scalaire qui permet une obtention directe et plus aisée des équations différentielles du mouvement.
- Cette formulation ne dépend pas du choix des coordonnées (coordonnées généralisés).

Comme les lois de Newton auparavant, les équations de Lagrange sont indépendantes du choix du référentiel galiléen.

En outre, le formalisme Lagrangien facilite l'étude des systèmes plus complexes que le point matériel tel que le mouvement d'un solide ou de plusieurs solides indéformables. Il permet aussi le passage à la limite continue (infinité de degrés de liberté), et peut être appliqué à des systèmes non mécaniques comme les circuits électroniques.

II. PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS DE D'ALEMBERT

Principe des déplacements virtuels :

Exemples de systèmes de poulies statiques étudiés par Simon Stevin : Figure 01.*a*. poulie. Figure 01.*b*. palan. Figure 01.*c*. palan double.

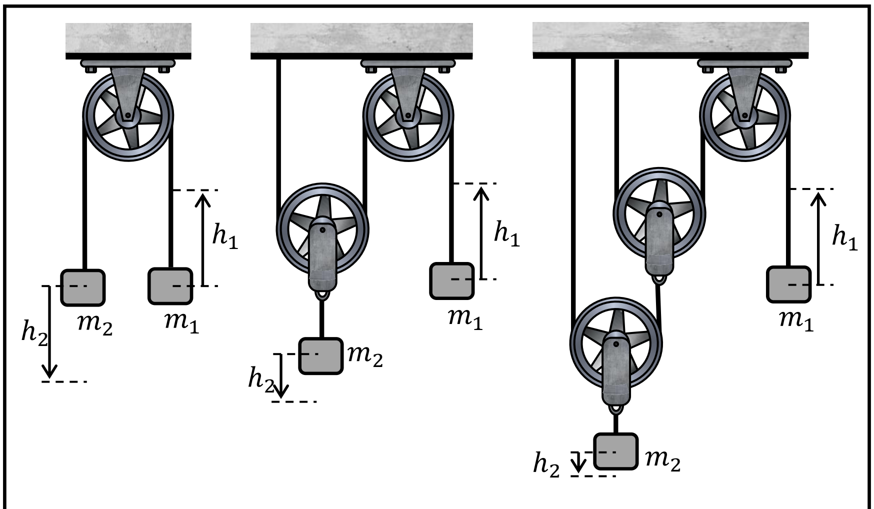


Figure 01.*a*. **Figure 01.*b*.** **Figure 01.*c*.**

Dans le cas statique, nous pouvons vérifier que (par le principe fondamental de la dynamique par exemple) :

Figure 01.*a*. : $P_1 = P_2$ avec $h_1 = h_2$.
Figure 01.*b*. : $P_1 = \frac{1}{2}P_2$ avec $h_1 = 2h_2$.
Figure 01.*b*. : $P_1 = \frac{1}{4}P_2$ avec $h_1 = 4h_2$.

Tel que h_1 et h_2 sont les déplacements respectifs *qu'on pourrait donner* aux masses m_1 et m_2. D'où le nom de « déplacements virtuels ».

D'où le principe des déplacements virtuels en statique :
Les produits des poids par leurs déplacements « virtuels » respectifs sont égaux en cas d'équilibre.

$$P_1.h_1 = P_2.h_2$$

Exemple du plan incliné (cas statique) :

Dans la figure 2. est représenté un système avec poulie en équilibre sur un plan incliné. Les déplacements virtuels des deux masses sont égaux $x_1 = x_2$ mais, dans le cas statique, les poids ne sont les mêmes

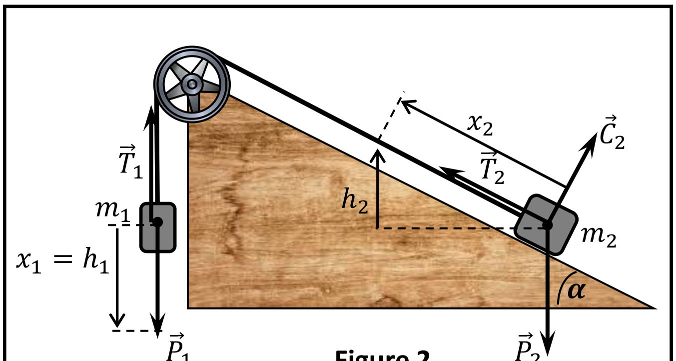


Figure 2.

$$P_1 = P_2.\sin\alpha$$

Dans ce cas

$$P_1.x_1 \neq P_2.x_2$$

Cependant nous remarquons que les déplacements verticaux (dans le sens de la force) obéissent à la loi :

$$h_2 = x_2.\sin\alpha = h_1.\sin\alpha$$

Si bien que

$$P_1.h_1 = P_2.h_2$$

Or nous remarquons que

$$P_1 . h_1 = P_1 . x_1 = \vec{P}_1 \bullet \vec{x}_1$$

Et

$$P_2 . h_2 = P_2 . x_2 . \sin \alpha = -\vec{P}_2 \bullet \vec{x}_2$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\vec{P}_1 \bullet \vec{x}_1 + \vec{P}_2 \bullet \vec{x}_2 = 0$$

Et si nous voulons inclure toutes les forces agissantes sur les masses, nous utilisons :

$$\vec{T}_1 \bullet \vec{x}_1 = -T . x_1 \quad \text{et} \quad \vec{T}_2 \bullet \vec{x}_2 = +T . x_2 \quad \text{avec} \quad T_1 = T_2 = T$$

$$\vec{C}_2 \bullet \vec{x}_2 = 0$$

Donc, au final, nous pouvons écrire

$$\vec{P}_1 \bullet \vec{x}_1 + \vec{T}_1 \bullet \vec{x}_1 + \vec{P}_2 \bullet \vec{x}_2 + \vec{T}_2 \bullet \vec{x}_2 + \vec{C}_2 \bullet \vec{x}_2 = 0$$

Ou

$$\sum_{\alpha=1}^{N=2} \vec{F}_\alpha^{\mathrm{tot}} \bullet \vec{x}_\alpha = 0$$

L'utilisation de déplacements virtuels infinitésimaux $\delta\vec{r}_\alpha$ nous permettra, comme nous le verrons dans les exemples suivants, d'étendre cette équation aux systèmes statiques faisant intervenir la rotation.

D'où la loi générale exprimant le principe des déplacements virtuels en statique :

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\mathrm{tot}} \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0}$$

Exemples :

Levier.

Appliquons le principe des déplacements virtuels dans le cas du levier dans la figure 3.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\mathrm{tot}} \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

D'où

$$\vec{F}_1 \bullet \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \bullet \delta\vec{r}_2 + \vec{C} \bullet \delta\vec{r}_0 = 0$$

Et

$$-F_1 . \delta r_1 + F_2 . \delta r_2 + C . 0 = 0$$

Avec

$$\delta r_1 = a_1 . \delta\theta \qquad \text{et} \qquad \delta r_2 = a_2 . \delta\theta$$

Finalement on retrouve $\quad F_1 . a_1 = F_2 . a_2$

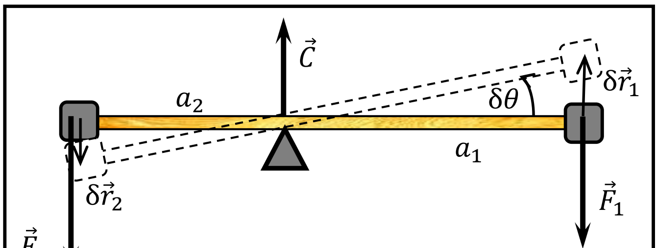


Figure 3.

Poulies coaxiales.

Si nous appliquons le principe des déplacements virtuels dans le cas de la figure 4.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\mathrm{tot}} \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \vec{P}_1 \bullet \delta\vec{r}_1 + \vec{P}_2 \bullet \delta\vec{r}_2 = 0$$

D'où

$$-P_1 . \delta r_1 + P_2 . \delta r_2 = 0$$

Avec

$$\delta r_1 = R_1.\delta\theta \qquad \text{et} \qquad \delta r_2 = R_2.\delta\theta$$

Finalement on retrouve

$$P_1.R_1 = P_2.R_2$$

Les résultats trouvés dans les deux exemples précédents expriment l'égalité des moments de forces en cas d'équilibre.

Conclusion :

Le principe des déplacements virtuels (infinitésimaux) remplace le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique dans le cas statique.

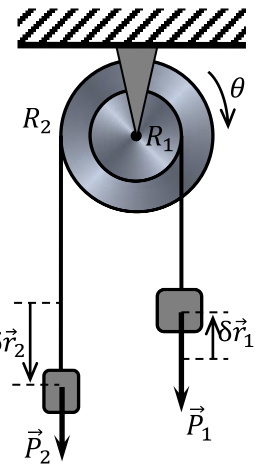


Figure 4.

<u>Travaux virtuels en dynamique :</u>

Dans le cas dynamique, en partant du principe fondamental de la dynamique

$$\vec{F} = m.\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{F}$ est la résultante de toutes les forces agissant sur le système et $\vec{p}$ est le quantité de mouvement totale du système.

$$\vec{F} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{tot}} \qquad ; \qquad \vec{p} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha.\vec{v}_\alpha$$

Donc, nous pouvons écrire

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{tot}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha\right)$$

Ou

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{tot}} - \dot{\vec{p}}_\alpha = \vec{0}$$

Qui peut être ramené – d'un point de vue formel – à un problème de statique.

Le Principe des travaux virtuels en dynamique appelé principe de d'Alembert est donc une généralisation du principe des déplacements virtuels, nous l'écrivons sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha^{\text{tot}} - \dot{\vec{p}}_\alpha\right) \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, cette écriture est une projection suivant les déplacements qui sont normaux forces de contraintes ce qui permet de les éliminer, de fait, de l'équation du mouvement. En effet :

$$\vec{F}_\alpha^{\text{tot}} = \vec{F}_\alpha + \vec{F}_\alpha^{\text{contraintes}}$$

Déplacements virtuels compatibles avec les forces de contraintes

$$\vec{F}_\alpha^{\text{contraintes}} \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Nous obtenons finalement

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha\right) \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0}$$

Exemples :

Masse glissant sans frottement sur un plan incliné.

Appliquons le principe des travaux virtuels à une masse ponctuelle glissant sans frottements sur un plan incliné d'un angle β par rapport à l'horizontale.

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\vec{F}_\alpha - \vec{p}^{\bullet}_\alpha\right) \bullet \delta\vec{r}_\alpha = 0 \qquad \text{ici} \quad N = 1$$

$$\left(\vec{P} + \vec{C} - \vec{p}^{\bullet}\right) \bullet \delta\vec{r} = 0$$

Avec

$$\vec{p}^{\bullet} = m.x^{\bullet\bullet}.\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad \delta\vec{r} = \delta x.\vec{e}_x$$

On voit bien que le déplacement virtuel est compatible avec (qui annule) la force de contrainte $\vec{C}$.

$$\vec{C} \bullet \delta\vec{r} = 0$$

Et

$$\vec{P} \bullet \delta\vec{r} = mg.\sin\beta\,.\delta x$$

Finalement nous trouvons

$$mg.\sin\beta\,.\delta x - m.x^{\bullet\bullet}.\delta x = 0$$

Ce qui donne

$$x^{\bullet\bullet} = g.\sin\beta$$

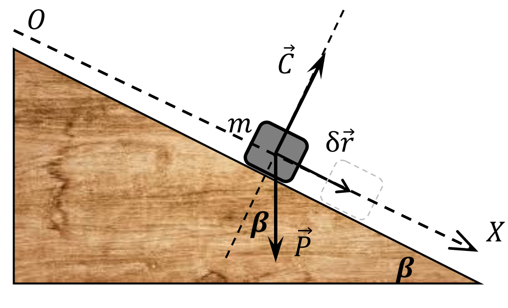


Figure 5.

Masse glissant sur une trappe.

Dans la figure 6 une masse ponctuelle glisse sans frottements le long d'une trappe qui s'ouvre. L'angle entre la surface de la trappe et la verticale est ***donné*** par une fonction $\theta(t)$ connue. Dans ce problème nous utilisons les coordonnées polaires (r,θ) comme le montre la figure.

Comme précédemment, le principe de d'Alembert s'écrit

$$\left(\vec{P} + \vec{C} - \vec{p}^{\bullet}\right) \bullet \delta\vec{r} = 0$$

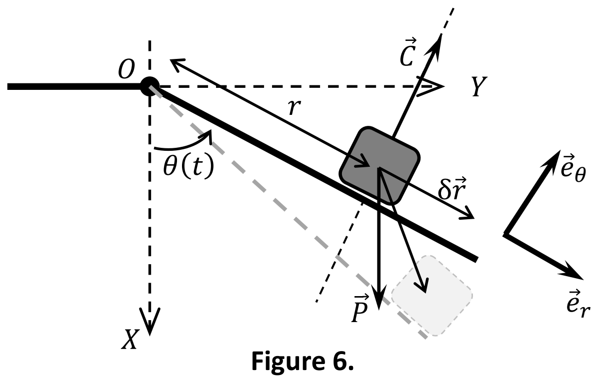


Figure 6.

Avec

$$\vec{p}^{\bullet} = m\vec{a} = m.\left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + m.\left(2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}\right).\vec{e}_\theta$$

Nous ***choisissons*** un déplacement virtuel est compatible avec (qui annule) la force de contrainte $\vec{C}$.

$$\delta\vec{r} = \delta r.\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{C} = C.\vec{e}_\theta \qquad \text{donc} \qquad \vec{C} \bullet \delta\vec{r} = 0$$

La projection du poids, dans ce cas est

$$\vec{P} \bullet \delta\vec{r} = mg.\cos\theta\,.\delta r$$

Et

$$\vec{p}^{\bullet} \bullet \delta\vec{r} = m.\left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\delta r$$

Finalement nous trouvons

$$mg.\cos\theta\,.\delta r - m.\left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\delta r = 0$$

Ce qui donne l'équation différentielle du deuxième ordre en r ($\theta(t)$ étant une fonction connue).

$$r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2} = g.\cos\theta$$

Remarquons que le déplacement virtuel compatible avec la force de contrainte noté $\delta\vec{r}$ est différent du déplacement infinitésimal réel $d\vec{r}$ du point matériel. En effet

$$d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + rd\theta.\vec{e}_\theta \neq \delta\vec{r}$$

Ce qui est très important, comme nous le verrons par la suite.

Si nous souhaitons calculer la force de contrainte (ici la force de contact $\vec{C}$), nous devons choisir un déplacement infinitésimal dans le sens de la contrainte.

$$\delta\vec{r}' = r.\delta\theta.\vec{e}_\theta$$

En appliquant le principe des travaux virtuels

$$\left(\vec{P} + \vec{C} - \vec{p}^{\bullet}\right) \bullet \delta\vec{r}' = 0$$

En remplaçant

$$\left[(mg.\cos\theta\,.\vec{e}_r - mg.\sin\theta\,.\vec{e}_\theta) + (C.\vec{e}_\theta) - \left(m.\left(r^{\bullet\bullet} - r.\theta^{\bullet 2}\right).\vec{e}_r + m.(2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet}).\vec{e}_\theta\right)\right] \bullet (r.\delta\theta.\vec{e}_\theta) = 0$$

Ce qui donne

$$\left(C - mg.\sin\theta - m.(2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet})\right).r.\delta\theta = 0$$

D'où la force de contact

$$C = mg.\sin\theta + m.(2r^{\bullet}\theta^{\bullet} + r.\theta^{\bullet\bullet})$$

$r(t)$ étant calculé à partir de l'équation différentielle précédente.

<u>Déplacement virtuel compatible avec les forces de contraintes :</u>

Dans les deux exemples précédents nous avons vu deux cas

Quand la force de contrainte est indépendante du temps le déplacement virtuel $\delta\vec{r}$ compatible avec la force de contrainte est égal au déplacement réel $d\vec{r}$, ce dernier étant indépendant du temps.

Quand la force de contrainte dépend du temps le déplacement virtuel $\delta\vec{r}$ est différent du déplacement réel $d\vec{r}$, ce dernier est alors fonction du temps.

Dans tous les cas de figure le déplacement virtuel $\delta\vec{r}$ est indépendant du temps.

III. DESCRIPTION DU SYSTÈME

Soit un système composé de N particules (points matériels) en interactions et subissant éventuellement un champ extérieur, nous adoptons les notations suivantes :
Pour les masses

$$m_\alpha \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N$$

Pour les positions

$$\vec{r}_\alpha(t) \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N$$

Pour les vitesses

$$\vec{v}_\alpha(t) = \frac{d\vec{r}_\alpha(t)}{dt} \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N$$

<u>Degrés de liberté</u>

Le nombre de degrés de liberté est définit comme étant le nombre d de paramètres indépendants permettant de décrire les positions, dans l'espace, des N particules composant le système.

En toute généralité, pour connaitre la position d'une particule il est nécessaire de définir trois paramètres. Comme le système compte N particules, le nombre de paramètres est donc $3N$.

Cependant, en raison des contraintes qui peuvent exister dans le système, nous pouvons trouver une (ou plusieurs) relation(s) qui relie(nt) certains de ces paramètres. Les $3N$ paramètres ne seront, donc, plus indépendants.

Posons k le nombre de liaisons entre ces paramètres, que nous écrivons sous la forme :

$$f_n(\{\vec{r}_\alpha\}, t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad n = 1, \dots, k$$

En fait, les relations de cette forme, qui relient directement les positions (et éventuellement le temps) sont dites « liaisons holonomes ».

Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté du système, c'est-à-dire le nombre de paramètre indépendants décrivant les positions est donné par :

$$d = 3N - k$$

<u>Exemples</u>

- Une particule (point matériel) libre dans l'espace possède trois (03) degrés de liberté.
- Une particule libre astreinte à se déplacer sur la surface d'une sphère possède $(3 - 1 = 2)$ degrés de libertés.
- Deux particules libres dans l'espace ont chacune trois degrés de liberté donc le système possède $(3 \times 2 = 6)$ degrés de liberté.
- Deux particules libres dans l'espace, liées par une tige rigide de masse négligeable (forme d'un haltère) ont six degrés de liberté moins une liaison ce qui donne $\big((3 \times 2) - 1 = 5\big)$ degrés de libertés.

Coordonnées généralisées

Nous appelons coordonnées généralisées tout ensemble de d variables indépendantes, notées $q_1, q_2, \dots, q_d$, permettant d'exprimer les positions des N corps solides constituant le système. La nature et la dimension de ces coordonnées étant indifférentes.

Les positions $\vec{r}_\alpha$ sont des fonctions des coordonnées généralisées $\{q_i\}$ elles dépendent, ainsi, implicitement du temps. Mais peuvent, comme nous le verrons dans certains cas, dépendre explicitement du temps.

$$\vec{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_d, t) = \vec{r}_\alpha(\{q_i\}, t) \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, d$$

Les coordonnées généralisées étant indépendantes les unes des autres

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, \dots, d$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Les vitesses généralisées sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées.

$$q_i^\bullet = \frac{dq_i}{dt} \quad ; \quad i = 1, \dots, d$$

Les vitesses généralisées sont aussi indépendantes les unes des autres

$$\frac{\partial q_i^\bullet}{\partial q_j^\bullet} = \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, \dots, d$$

Vitesses

Les différentielles

$$d\vec{r}_\alpha(\{q_i\}, t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} dt$$

D'où, les dérivées

$$\vec{v}_\alpha(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t) = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} q_i^\bullet + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, d$$

$\vec{v}_\alpha(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t)$ sont des fonctions des coordonnées généralisées $\{q_i\}$, des vitesses généralisées $\{q_i^\bullet\}$ et peuvent dépendre explicitement du temps.

Les vitesses généralisées étant considérées comme des variables indépendantes des coordonnées généralisées.

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j^\bullet} = 0 \quad ; \quad \forall (i, j)$$

Propriétés

Première identité :

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left\{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right\}$$

La dérivée partielle étant linéaire

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right)$$

Comme $\vec{r}_\alpha$ ne dépend que des coordonnées généralisées $\{q_i\}$ et du temps t. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right) = 0$$

D'où

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\delta_{ij}$$

Tous les termes sont nuls sauf le terme où $(i = j)$. il vient alors

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

Deuxième identité :

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left\{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right\}$$

La dérivée partielle étant linéaire

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}\right)$$

Les variables étant indépendantes nous pouvons intervertir les dérivées partielles

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} = 0$$

Comme $\partial \vec{r}_\alpha / \partial q_i$ est une fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$ et du temps t.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)$$

En comparant les deux termes il vient que

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)$$

Remarque

- Dans le cas de liaisons holonomes « rhéonomes », les liaisons dépendent explicitement du temps.

$$f_n(\{\vec{r}_\alpha\}, t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad n = 1, \dots, k$$

Dans ce cas les vecteurs positions dépendent explicitement du temps.

$$\vec{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_d, t) = \vec{r}_\alpha(\{q_i\}, t) \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, d$$

- Dans le cas de liaisons holonomes « scléronomes », les liaisons ne dépendent pas explicitement du temps.

$$f_n(\{\vec{r}_\alpha\}) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad n = 1, \dots, k$$

Dans ce cas les vecteurs positions ne dépendent pas explicitement du temps.

$$\vec{r}_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_d) = \vec{r}_\alpha(\{q_i\}) \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N \quad ; \quad i = 1, \dots, d$$

- Déplacements virtuels $\delta\vec{r}_\alpha$ compatibles avec les contraintes, ne dépendent pas explicitement du temps.

$$\delta\vec{r}_\alpha(\{q_i\}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, N$$

Donc

- Si toutes les liaisons sont scléronomes : $\delta\vec{r}_\alpha(\{q_i\}) = d\vec{r}_\alpha(\{q_i\})$.
- S'il existe parmi les liaisons au moins une liaison rhéonome : $\delta\vec{r}_\alpha(\{q_i\}) \neq d\vec{r}_\alpha(\{q_i\}, t)$.

IV. ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

Partons du principe des travaux virtuels de d'Alembert.

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha)\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Forces généralisées :

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\bullet\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\bullet\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i$$

En définissant les forces généralisées par

$$\boxed{Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\bullet\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}}$$

Nous avons

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d}Q_i.\delta q_i \tag{1}$$

Equations de Lagrange :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt}\bullet\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt}\bullet\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i$$

Que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\alpha\bullet\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha\vec{v}_\alpha\bullet\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)\delta q_i$$

En utilisant les deux propriétés précédemment démontrées

$$\frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_\alpha}{\partial q_i}\right)$$

Nous trouvons

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\alpha\bullet\frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i - \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha\vec{v}_\alpha\bullet\frac{\partial\vec{v}_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i$$

Ou bien encore

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{d} m_\alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_\alpha\bullet\vec{v}_\alpha\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}\vec{v}_\alpha\bullet\vec{v}_\alpha\right)\right]\delta q_i$$

Comme $\vec{v}_\alpha\bullet\vec{v}_\alpha = v_\alpha^2$ et en inversant la sommation

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right]\delta q_i$$

Comme la dérivée est linéaire.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\dot{\vec{v}}_\alpha\bullet\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2\right)\right]\delta q_i$$

Le terme entre parenthèse représente la somme des énergies cinétiques de toutes les particules, qui est en fait l'énergie cinétique totale du système.

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha \bullet \delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{d} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T)\right]\delta q_i \qquad (2)$$

En remplaçant les équations (1) et (2) dans le principe des travaux virtuels de d'Alembert.

$$\sum_{i=1}^{d} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T)\right]\delta q_i = \sum_{i=1}^{d} Q_i . \delta q_i$$

Ou encore

$$\sum_{i=1}^{d} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T) - Q_i\right]\delta q_i = 0$$

Comme toutes les variations δq_i sont indépendantes. Nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T) = Q_i$$

Qui est la forme première des équations de Lagrange.

Cas de forces dérivants d'un potentiel :

Dans le cas où toutes les forces agissant sur les particules dérivent d'un potentiel (sauf les forces de contraintes de liaison).

$$\vec{F}_\alpha^{\text{pot}} = -\overrightarrow{grad}(U_\alpha) = -\frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha}$$

U_α sont les énergies potentielles des N particules.

$$Q_i^{\text{pot}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{pot}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

$\partial U_\alpha / \partial \vec{r}_\alpha$ est une notation abusive, elle signifie que nous devons dérivées par rapport aux composantes du vecteur position. En coordonnées cartésiennes, par exemple, cette équation s'écrirait :

$$Q_i^{\text{pot}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial z_\alpha}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_i}\right)$$

Or

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\alpha}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial z_\alpha}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_i}$$

D'où

$$Q_i^{\text{pot}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_i} = -\frac{\partial\left(\sum_{\alpha=1}^{N} U_\alpha\right)}{\partial q_i}$$

Comme la somme des énergies potentielles de toutes les particules est égale à l'énergie potentielle du système

$$\sum_{\alpha=1}^{N} U_\alpha = U$$

Il vient que

$$Q_i^{\text{pot}} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

L'énergie potentielle U n'étant fonction que des coordonnées généralisées $U(\{q_i\})$.
En remplaçant dans l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Comme $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Qui est appelée équation d'Euler-Lagrange ou équation de Lagrange. Avec

$$\mathcal{L} = T - U$$

Qui est appelée fonction de Lagrange (ou Lagrangien) du système de N particules.

Potentiel généralisé :

Dans le cas plus général où l'énergie potentielle est une fonction des coordonnées généralisées q_i, des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, et explicitement du temps t.

$$U(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

Les forces généralisées (qui dérivent d'un potentiel) s'écrivent

$$Q_i^{\text{pot}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Et le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = T(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) - U(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

Forces non conservatives :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i^{\text{NC}}$$

Avec

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = T(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) - U(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

Force de frottement visqueux – Fonction de dissipation :

Prenons le cas où les forces non conservatives sont des forces de frottements proportionnelles aux vitesses des particules (cas de particules se déplaçant dans un fluide).

$$\vec{F}_\alpha^{\text{frottement}} = -\beta_\alpha . \vec{v}_\alpha$$

Si nous définissons la fonction de dissipation pour la particule par :

$$D_\alpha = \frac{1}{2}\beta_\alpha v_\alpha^2$$

Alors

$$\vec{F}_\alpha^{\text{frottement}} = -\vec{\nabla}_{\vec{v}_\alpha}(D_\alpha) = -\frac{\partial D_\alpha}{\partial \vec{v}_\alpha}$$

$\partial D_\alpha / \partial \vec{v}_\alpha$ est aussi une notation abusive, elle signifie que nous devons dérivées par rapport aux composantes du vecteur vitesse de la particule d'indice α.

Calculons la force généralisée qui correspond au frottement visqueux

$$Q_i^{\text{frottement}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{frottement}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \beta_\alpha . \vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

Comme

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i}$$

Alors

$$Q_i^{\text{frottement}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \beta_\alpha . \vec{v}_\alpha \bullet \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \beta_\alpha \frac{1}{2}\frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \dot{q}_i}$$

Ce qui donne

$$Q_i^{\text{frottement}} = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

Avec

$$D = \sum_{\alpha=1}^{N} D_\alpha$$

Est la fonction de dissipation totale du système.

Et l'équation de Lagrange s'écrit, dans ce cas :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^{\text{ncv}}$$

Q_i^{ncv} représente les forces généralisées non conservatives *autres que le frottement visqueux*.

$$Q_i^{\text{ncv}} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\text{ncv}} \bullet \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}$$

V. PROPRIÉTÉS DU LAGRANGIEN

1. ***Le Lagrangien est une grandeur scalaire et les équations de Lagrange sont un système d'équations scalaires.***

2. ***Invariance d'échelle : Les équations de Lagrange sont invariantes par la multiplication du Lagrangien par un scalaire avec ou sans unité.***

3. ***Invariance d'origine : Les équations de Lagrange sont invariantes par l'addition d'un scalaire quelconque au Lagrangien.***

4. ***Le Lagrangien est une grandeur additive.***
   En effet, prenons deux systèmes indépendants décrits par les fonctions de Lagrange
   $$\mathcal{L}_1 = T_1 - U_1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = T_2 - U_2$$
   La somme des deux lagrangiens donne
   $$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2) = T - U = \mathcal{L}$$
   Qui est le Lagrangien du système total.

5. ***Invariance de jauge : Le Lagrangien est définit à la dérivée totale par rapport au temps près, d'une fonction des coordonnées $\{q_i\}$ généralisées et du temps.***
   $$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df(\{q_i\}, t)}{dt}$$

Démonstration
Ecrivons les équations de Lagrange pour la fonction $\mathcal{L}'(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$.
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{df}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right)$$
Calculons le terme
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{df}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right)$$
Comme $f(\{q_i\}, t)$ est fonction uniquement des coordonnées généralisées et du temps.
$$df(\{q_i\}, t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$
Et la dérivée totale
$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{df}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
Comme les termes $\left(\partial f / \partial q_j\right)$ et $\left(\partial f / \partial t\right)$ ne contiennent que les coordonnées généralisées $\{q_i\}$ et le temps t. Leurs dérivées partielles par rapport à $\dot{q}_i$ sont nulles. De même pour $\left(\dot{q}_j / q_i = 0\right)$. Reste le terme $\left(\dot{q}_j / \dot{q}_i = \delta_{ij}\right)$. D'où
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{df}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta_{ij}\right) - \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t}\right)$$

Le terme

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta_{ij} = \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

Et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}$$

Finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q_i}}\left(\frac{df}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}\right) - \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t}\right) = 0$$

Et

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Donc, les équations de Lagrange sont les mêmes pour les deux Lagrangiens.

6. *Covariance des équations de Lagrange par changement du référentiel galiléen.*

Démonstration

$\mathcal{L} = T - U$ est le Lagrangien dans un référentiel galiléen $(Oxyz)$.

$\mathcal{L}' = T' - U'$ est le Lagrangien dans un autre référentiel galiléen $(O'x'y'z')$.

Cherchons une relation entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.

Comme les deux référentiels sont galiléen, ils sont en mouvement de translation uniforme $(\vec{u} = \text{constante})$ l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire

$$\vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha + \vec{u}$$

Donc

$$v'^2_\alpha = \vec{v}'_\alpha \bullet \vec{v}'_\alpha = v_\alpha^2 + 2\vec{v}_\alpha \bullet \vec{u} + u^2 \qquad \text{avec} \qquad \vec{v}_\alpha = d\vec{r}_\alpha / dt$$

Ce qui donne

$$T' = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha . v'^2_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha . v_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha . \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \bullet \vec{u} + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha . u^2$$

Puis

$$T' = T + \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha . \vec{r}_\alpha \bullet \vec{u}\right) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha . u^2$$

Comme $\vec{r}_\alpha$ ne dépend que des coordonnées généralisées $\{q_i\}$ et du temps t. Le terme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha . \vec{r}_\alpha \bullet \vec{u} = f(\{q_i\}, t)$$

Et le terme

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha . u^2 = \text{Constante}$$

D'autre part, l'énergie potentielle étant indépendante de la vitesse $(U' = U)$.
Il vient finalement, que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{df(\{q_i\}, t)}{dt} + \text{Constante}$$

Or d'après la propriété 5 que nous avons démontrée, les équations de Lagrange sont invariantes.

7. *Covariance des équations de Lagrange par changement de coordonnées.*

Démonstration

Soit le changement de coordonnées suivant $\{q_i\} \rightarrow \{Q_i\}$.

Supposons la relation entre les anciennes et les nouvelles coordonnées connue

$$q_i(\{Q_j\}, t)$$

Donc

$$dq_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} dt \quad \text{et} \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

Comme $\dot{q}_i$ est une fonction des coordonnés $\{Q_j\}$ des vitesses $\{\dot{Q}_j\}$ et du temps t.

$$d\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} dQ_j + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} d\dot{Q}_j + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} dt$$

Ecrivons maintenant le nouveau Lagrangien

$$L(\{Q_j\}, \{\dot{Q}_j\}, t) = T - U = \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

Et

$$dL(\{Q_j\}, \{\dot{Q}_j\}, t) = d\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$$

Donc

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} d\dot{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

En remplaçant les dq_i et les $d\dot{q}_i$ dans le second membre de l'équation

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial L}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} d\dot{Q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt &\\ = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} dQ_j + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} dt + \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} dQ_j + \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} d\dot{Q}_j &\\ + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt &\end{aligned}$$

Les symboles $\sum_{i,j}$ signifient que la somme se fait sur i et j.

Et en comparant terme à terme (les Q_i, les $\dot{Q}_i$ et t étant indépendants) il vient que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dfrac{\partial q_i}{\partial Q_j} + \sum_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} \\ \dfrac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dfrac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dfrac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange et utilisant

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$$

Nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_j} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) = 0$$

D'où, les équations de Lagrange sont invariantes par changement de coordonnées.

VI. SYMÉTRIES ET LOIS DE CONSERVATION

Impulsions généralisées :

Les impulsions généralisées p_i sont définies par :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

L'impulsion généralisée possède la dimension :

- D'une quantité de mouvement si q_i est une variable de translation (Exemple : particule libre sur une droite, point matériel sur un plan incliné sans frottement $(q = x)$)
- D'un moment cinétique si q_i est une variable rotation (Exemple : particule libre sur un cercle, pendule simple $(q = \theta)$)

Intégrales premières du mouvement :

Les intégrales premières du mouvement sont des fonctions des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées (et éventuellement du temps) qui se conservent au cours du mouvement.

$$F(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \text{Constante}$$

$F(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ sont des équation différentielles du premier ordre par rapport à la variable q_i.

Coordonnée cyclique :

Une coordonnée généralisée qui n'apparait pas explicitement dans le Lagrangien mais dont la dérivée par rapport au temps apparait (vitesse généralisée) est dite « coordonnée cyclique ou ignorable ».

Si q_i est une coordonnée cyclique alors p_i est une intégrale première du mouvement.

Hamiltonien :

Le Lagrangien est une fonction des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et peut aussi dépendre explicitement du temps. Sa différentielle s'écrit donc :

$$d\mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Et la dérivée totale par rapport au temps

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

En utilisant l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

On peut donc écrire

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Et

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}}q_i^{\bullet}-\mathcal{L}\right)=-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

On définit alors la fonction de Hamilton ou Hamiltonien par :

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}}q_i^{\bullet}-\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{d}p_i\,q_i^{\bullet}-\mathcal{L}$$

Remarque :

$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\},t)$ est une fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$, des impulsions généralisées $\{p_i\}$ et éventuellement du temps, c'est-à-dire que nous devons remplacer tous les $\{q_i^{\bullet}\}$ que nous trouvons parleurs expressions en fonction des $\{q_i\}$ et des $\{p_i\}$.

Propriété :

Si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps alors $\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\})$ est une intégrale première du mouvement.

En effet, si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}=0$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}}q_i^{\bullet}-\mathcal{L}\right)=\frac{d}{dt}\left(\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\})\right)=0$$

Et

$$\mathcal{H}(\{q_i\},\{p_i\})=\text{Constante}$$

Cas de contraintes ne dépendants pas explicitement du temps :

Si les contraintes ne dépendent pas explicitement du temps alors les positions des particules et l'énergie potentielle du système s'expriment uniquement en fonction des coordonnées généralisées $\{q_i\}$.

$$\text{Contraintes indépendantes du temps}\ \Rightarrow\ \vec{r}_\alpha(\{q_i\})\ \text{ et }\ U(\{q_i\})$$

Dans ce cas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^{\bullet}}=\frac{\partial T}{\partial q_i^{\bullet}}$$

Avec

$$T=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2}m_\alpha.v_\alpha^2$$

Comme

$$\vec{v}_\alpha=\frac{d\vec{r}_\alpha(\{q_i\})}{dt}=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}q_i^{\bullet}$$

Et

$$v_\alpha^2=\vec{v}_\alpha\bullet\vec{v}_\alpha=\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}q_i^{\bullet}\right)\bullet\left(\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}q_j^{\bullet}\right)$$

D'où

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_{\alpha} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_i \, \dot{q}_j \right)$$

Si les positions $\vec{r}_{\alpha}(\{q_i\})$ ne dépendent pas explicitement du temps t alors l'énergie cinétique du système T est une forme quadratique des vitesses généralisée $\{\dot{q}_i\}$.

Utilisons le fait que l'énergie potentielle ne dépend pas des vitesses généralisées $U(\{q_i\})$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial v_{\alpha}^2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\vec{v}_{\alpha} \bullet \vec{v}_{\alpha})$$

En dérivant le produit scalaire (le produit scalaire étant commutatif)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \bullet \vec{v}_{\alpha} + \vec{v}_{\alpha} \bullet \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \bullet \vec{v}_{\alpha}$$

Or, nous savons que d'après la première identité

$$\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i}$$

Donc

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \bullet \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \left\{ \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \bullet \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \right\}$$

En remplaçant dans l'expression du Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \right\} - \mathcal{L}$$

Le terme

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \bullet \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \vec{v}_{\alpha} \bullet \vec{v}_{\alpha} = v_{\alpha}^2$$

D'où

$$\mathcal{H} = 2T - \mathcal{L} = 2T - (T - U)$$

Finalement, nous trouvons :

$$\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}) = T + U = E_m$$

Qui n'est autre que l'énergie mécanique totale.

Conclusion :

Dans le cas de contraintes ne dépendants pas explicitement du temps, alors :

L'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses généralisées, l'énergie potentielle fonction uniquement des coordonnées généralisées et la fonction de Hamilton

$$\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^{d} p_i \, \dot{q}_i - \mathcal{L} = T + U$$

Représente l'énergie mécanique totale du système, elle est constante si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

Théorème de Noether

Nous avons vu auparavant que si q_i est une variable cyclique, donc si elle n'apparait pas explicitement dans le Lagrangien, alors, l'impulsion généralisée qui lui correspond $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial q_i^{\bullet}$ est conservée durant le mouvement.

Le théorème de Noether permet une généralisation de ce principe de conservation, en reliant l'existence d'une symétrie – qui induit une invariance du Lagrangien – à la conservation d'une grandeur physique liée à cette symétrie.

Enoncé du théorème

Soit un système défini par $\{q_i\}$ $(i = 1, \dots, d)$ coordonnées généralisée. Nous pouvons définir un ensemble continu de transformations en fonction d'un paramètre réel (s) de la forme $\{q_i\} \longrightarrow \{Q_i(s)\}$ avec $\{Q_i(0) = q_i\}$ et $(i = 1, \dots, d)$.

Si le lagrangien reste invariant par cette transformation : $\mathcal{L}(\{Q_i\},\{Q_i^{\bullet}\},t) = \mathcal{L}(\{q_i\},\{q_i^{\bullet}\},t)$. Alors, la quantité

$$\boxed{I(\{q_i\},\{q_i^{\bullet}\}) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k^{\bullet}} \frac{dQ_k}{ds}\bigg|_{s=0}}$$

Est une constante du mouvement. Elle est appelée « Générateur infinitésimal ».

Démonstration

La différentielle du Lagrangien en fonction des nouvelles coordonnées

$$d\mathcal{L}(\{Q_i\},\{Q_i^{\bullet}\},t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}} dQ_i^{\bullet} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Le Lagrangien étant invariant par rapport au changement de coordonnée, alors sa dérivée par rapport au paramètre (s) est nulle.

$$\frac{d\mathcal{L}}{ds} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i} \frac{dQ_i}{ds} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}} \frac{dQ_i^{\bullet}}{ds} = 0$$

Le temps étant indépendant de (s).

Comme nous avons vu que les équations de Lagrange sont invariantes par un changement quelconque des coordonnées généralisées, alors

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}}\right)$$

D'autre part

$$\frac{dQ_i^{\bullet}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dQ_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ_i}{ds}\right)$$

En remplaçant

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}}\right)\frac{dQ_i}{ds} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ_i}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}}\frac{dQ_i}{ds}\right) = 0$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i^{\bullet}}\frac{dQ_i}{ds} = \text{Constante}$$

En prenant la limite $(s \to 0)$

$$I(\{q_i\},\{q_i^{\bullet}\}) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k^{\bullet}} \frac{dQ_k}{ds}\bigg|_{s=0} = \text{constante}$$

En particulier :

Symétrie de translation

Si la Lagrangien est invariant par translation d'une valeur s dans une direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{n}$, alors la composante dans cette direction de la quantité de mouvement totale du système décrit par ce Lagrangien est conservée.

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_\alpha\},\{\vec{r}_\alpha^{\bullet}\},t) = \mathcal{L}(\{\vec{r}_\alpha + s.\vec{n}\},\{\vec{r}_\alpha^{\bullet}\},t) \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\bullet\vec{n} = \left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{p}_\alpha\right)\bullet\vec{n} = \text{constante}$$

Démonstration

En effet, pour un système de N particules, une symétrie de translation se traduit par l'invariance du Lagrangien quand on ajoute un même vecteur $(\vec{s} = s.\vec{n})$ à tous les vecteurs postions des particules ($\vec{n}$ est le vecteur unitaire dans la direction de la translation). Dans ce cas les vitesses des particules ne changent pas :

$$\text{Translation } \vec{s} = s.\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{r}_\alpha \longrightarrow \vec{R}_\alpha = \vec{r}_\alpha + s.\vec{n}\right) \text{ et } \left(\vec{v}_\alpha = \vec{r}_\alpha^{\bullet} \longrightarrow \vec{R}_\alpha^{\bullet} = \vec{r}_\alpha^{\bullet}\right)$$

Invariance du Lagrangien par translation

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_\alpha\},\{\vec{r}_\alpha^{\bullet}\},t) = \mathcal{L}\left(\{\vec{R}_\alpha\},\{\vec{R}_\alpha^{\bullet}\},t\right)$$

Dans cette écriture nous avons pris comme coordonnées généralisées les composantes en coordonnées cartésiennes des vecteurs positions $\left(x_\alpha^k \quad (\alpha = 1,\dots,N \;\; ; \;\; k = 1,2,3)\right)$ et les vitesses généralisées leurs dérivées par rapport au temps $\left(\dot{x}_\alpha^k \quad (\alpha = 1,\dots,N \;\; ; \;\; k = 1,2,3)\right)$.
Et la transformation $\left(x_\alpha^k \longrightarrow X_\alpha^k = x_\alpha^k + s.n^k\right)$ et $\left(\dot{x}_\alpha^k \longrightarrow \dot{X}_\alpha^k = \dot{x}_\alpha^k\right)$

Ecrivons que le Lagrangien est invariant par la translation

$$\frac{d\mathcal{L}\left(\{\vec{R}_\alpha\},\{\vec{R}_\alpha^{\bullet}\},t\right)}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_\alpha^k}\frac{dX_\alpha^k}{ds} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_\alpha^k}\frac{d\dot{X}_\alpha^k}{ds} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt}{ds} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_\alpha^k}\frac{dX_\alpha^k}{ds} = 0$$

Car t et $\dot{X}_\alpha^k$ ne varient pas avec la transaltion.

$$\frac{dX_\alpha^k}{ds} = \frac{d\left(x_\alpha^k + s.n^k\right)}{ds} = n^k$$

D'où

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_\alpha^k}n^k = 0$$

En utilisant les équations de Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_\alpha^k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_\alpha^k}\right)$$

Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_\alpha^k}\right)n^k = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_\alpha^k}n^k\right) = 0$$

Comme $\left(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}_\alpha^k = p_\alpha^k\right)$ sont les composantes en coordonnées cartésiennes des quantités de mouvement des particules. Nous avons alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}p_\alpha^k n^k\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{p}_\alpha\bullet\vec{n}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P}\bullet\vec{n} = \left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{p}_\alpha\right)\bullet\vec{n} = \text{constante}$$

Symétrie de rotation

Si la Lagrangien est invariant par la rotation d'un angle θ dans un plan dont le vecteur unitaire normal est $\vec{n}$, alors la composante dans cette direction du moment cinétique total du système décrit par ce Lagrangien est conservée.

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_\alpha\},\{\vec{r}^{\bullet}_\alpha\},t) = \mathcal{L}(\{\vec{r}_\alpha + \theta.\vec{n}\times\vec{r}_\alpha\},\{\vec{r}^{\bullet}_\alpha\},t) \quad \Rightarrow \quad \vec{J}\bullet\vec{n} = \left(\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{r}_\alpha\times\vec{p}_\alpha\right)\bullet\vec{n} = \text{constante}$$

Démonstration

Soit un système de N particules, une symétrie de rotation se traduit par l'invariance du Lagrangien quand on ajoute un même vecteur $(\theta.\vec{n}\times\vec{r}_\alpha)$ à tous les vecteurs postions des particules ($\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan de rotation).

$$\text{Rotation d'angle } \theta \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{r}_\alpha \longrightarrow \vec{R}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \theta.\vec{n}\times\vec{r}_\alpha\right) \text{ et } \left(\vec{r}^{\bullet}_\alpha \longrightarrow \vec{R}^{\bullet}_\alpha = \vec{r}^{\bullet}_\alpha + \theta.\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha\right)$$

Invariance du Lagrangien par translation

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_\alpha\},\{\vec{r}^{\bullet}_\alpha\},t) = \mathcal{L}\left(\{\vec{R}_\alpha\},\{\vec{R}^{\bullet}_\alpha\},t\right)$$

Ecrivons que le Lagrangien est invariant par la rotation

$$\frac{d\mathcal{L}\left(\{\vec{R}_\alpha\},\{\vec{R}^{\bullet}_\alpha\},t\right)}{d\theta} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^k_\alpha}\frac{dX^k_\alpha}{d\theta} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^k_\alpha}\frac{d\dot{X}^k_\alpha}{d\theta} = 0$$

t ne varie pas par rotation.

Les dérivées

$$\frac{dX^k_\alpha}{d\theta} = \frac{d(\vec{r}_\alpha + \theta.\vec{n}\times\vec{r}_\alpha)^k}{d\theta} = (\vec{n}\times\vec{r}_\alpha)^k \quad ; \quad \frac{d\dot{X}^k_\alpha}{d\theta} = \frac{d(\vec{r}^{\bullet}_\alpha + \theta.\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha)^k}{d\theta} = (\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha)^k$$

Où l'exposant k représente la k-ième composante. Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^k_\alpha}(\vec{n}\times\vec{r}_\alpha)^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^k_\alpha}(\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha)^k = 0$$

En utilisant les équations de Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^k_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^k_\alpha}\right)$$

Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^k_\alpha}\right)(\vec{n}\times\vec{r}_\alpha)^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^k_\alpha}(\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha)^k = 0$$

Comme $\left(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}^k_\alpha = p^k_\alpha\right)$ sont les composantes en coordonnées cartésiennes des quantités de mouvement des particules. Nous avons alors :

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\frac{dp^k_\alpha}{dt}(\vec{n}\times\vec{r}_\alpha)^k + p^k_\alpha(\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha)^k = 0$$

Les sommes sur les composantes k sont en fait des produits scalaires :

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}\bullet(\vec{n}\times\vec{r}_\alpha) + \vec{p}_\alpha\bullet(\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha) = 0$$

Les vecteurs $\vec{p}_\alpha = m_\alpha\vec{v}_\alpha$ et $\vec{v}_\alpha = \vec{r}^{\bullet}_\alpha$ étant parallèles, donc le produit mixte

$$\vec{p}_\alpha\bullet(\vec{n}\times\vec{r}^{\bullet}_\alpha) = 0$$

Et l'autre produit mixte peut se réécrire de la forme :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \bullet (\vec{n} \times \vec{r}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{n} \bullet \left(\vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}\right) = 0$$

D'autre part

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \times \vec{p}_\alpha + \vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = \vec{r}_\alpha \times \frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} \qquad \text{car} \qquad (\vec{r}_\alpha^{\bullet} \parallel \vec{p}_\alpha)$$

Ce qui donne

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{n} \bullet \frac{d}{dt}(\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{n} \bullet (\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha)\right) = 0$$

Et finalement

$$\vec{n} \bullet \vec{J} = \vec{n} \bullet \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha\right) = \text{constante}$$

VII. VARIATION SOUS CONTRAINTES

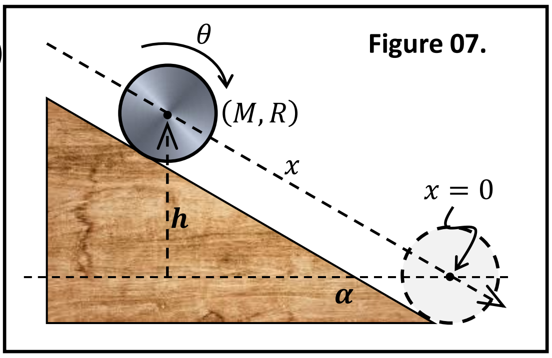
Exemple :

Cylindre plein roulant sans glisser sur un plan incliné.

Condition de roulement sans glissement (Liaison holonome)

$$x = R.\theta$$

Degré de liberté (01). Coordonnée généralisée (x).



Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}I.\omega^2 - mg.h$$

Avec

$$v = x^{\bullet} \quad ; \quad \omega = \theta^{\bullet} \quad \text{et} \quad h = -x.\sin\alpha$$

D'où

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} + \frac{1}{2}I.\theta^{\bullet 2} + mg.\sin\alpha\,.x$$

Nous avons pris l'habitude de remplacer $\theta^{\bullet}$ directement par sa valeur en fonction de $x^{\bullet}$ que nous déduisons de la liaison holonome $(\theta^{\bullet} = x^{\bullet}/R)$. Nous pouvons, cependant, procéder différemment.

Comme la condition de roulement sans glissement peut s'écrire $x - R.\theta = 0$. Nous pouvons réécrire le Lagrangien sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m.x^{\bullet 2} + \frac{1}{2}I.\theta^{\bullet 2} + mg.\sin\alpha\,.x - \lambda(x - R.\theta)$$

λ est appelé « multiplicateur de Lagrange ».

Nous allons appliquer les équations de Lagrange comme si le Lagrangien était fonction de deux degrés de liberté avec une inconnue supplémentaire qui est le multiplicateur de Lagrange λ. Pour ceci, nous écrivons les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta^{\bullet}}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \\ x - R.\theta = 0 \end{cases}$$

En dérivant, nous trouvons

$$\begin{cases} m.x^{\bullet\bullet} - mg.\sin\alpha + \lambda = 0 \\ I.\theta^{\bullet\bullet} - \lambda R = 0 \\ x^{\bullet\bullet} - R.\theta^{\bullet\bullet} = 0 \end{cases}$$

D'où, en remplaçant, nous retrouvons l'équation différentielle du mouvement et λ.

$$x^{\bullet\bullet} = \frac{g.\sin\alpha}{1 + (I/mR^2)} \quad ; \quad \theta^{\bullet\bullet} = \frac{g.\sin\alpha}{R + (I/mR)} \quad ; \quad \lambda = \frac{I.m}{mR^2 + I} g.\sin\alpha$$

Mais que représente λ dans cet exemple ?

La première équation donne : $mg.\sin\alpha - \lambda = m.x^{\bullet\bullet}$.

La deuxième donne : $\lambda R = I.\theta^{\bullet\bullet}$.

Ces deux équations représentent respectivement, les projections du principe fondamental de la dynamique et celui du théorème du moment cinétique.

λ est donc la force de contrainte (frottement) responsable de la liaison holonome. Et $\lambda.R$ représente le moment de la force de frottement responsable du roulement sans glissement.

En conclusion :

L'utilisation des multiplicateurs de Lagrange, dans le cas des liaisons holonomes, permet de calculer l'expression des forces de contraintes qui donnent ces liaisons.

<u>Généralisation :</u>

Soit un système ayant D degrés de liberté (dans le cas le plus général pour N particules nous avons $D = 3N$ degrés de liberté).

Dans le cas où nous avons k liaisons holonomes pouvant s'écrire sous la forme :

$$f_n(\{q_i\}, t) = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, D \quad ; \quad n = 1, \dots, k$$

Nous pouvons utiliser D coordonnées généralisées, mais ces coordonnées ne sont pas indépendantes (en fait, le nombre de coordonnées indépendantes est $d = D - k$).

Nous pouvons écrire le Lagrangien sous la forme

$$\mathcal{L}(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t) = T(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t) - U(\{q_i\}, \{q_i^\bullet\}, t) - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n . f_n(\{q_i\}, t) \qquad \text{avec} \qquad i = 1, \dots, D$$

λ_n $(n = 1, \dots, k)$ sont appelés « multiplicateurs de Lagrange ».

La résolution du système de $D + k$ équations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} & i = 1, \dots, D \\ f_n(\{q_i\}, t) = 0 & n = 1, \dots, k \end{cases}$$

Permet de déterminer les équations du mouvement des D coordonnées généralisées $q_i(t)$, et les k multiplicateurs de Lagrange λ_n qui représentent les forces de contraintes (ou les moments de forces) responsables des liaisons holonomes.

VIII. PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Soit un système mécanique possédant d degrés de libertés.

- L'état ou « la configuration » du système à chaque instant t est entièrement définit par les coordonnées généralisées $q_i(t)$ à cet instant $(i = 1, \dots, d)$.
- Nous représentons l'état du système à l'instant t donné par un point dans un espace cartésien à d dimensions appelé « espace des configurations » du système.
- Le système évolue en fonction du temps, cette évolution est représentée par une courbe dans l'espace des configurations.

On définit l'action par une intégrale du Lagrangien entre les instants t_1 et t_2.

$$\mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t).dt$$

L'action dépend des expressions des coordonnées généralisée en fonction du temps. C'est une fonction des fonctions $q_i(t)$. Une fonction de fonctions est appelée « fonctionnelle ».

Dans l'espace des configurations l'intégrale définissant l'action dépend de la courbe représentant les configurations du système, c'est une « intégrale de chemin ».

Principe de moindre action :

Nous postulons que les fonctions $\{q_i(t)\}$ qui représentent l'état effectif (au cours du temps) d'un système physique entre deux instants donnés t_1 et t_2 correspondent à la valeur minimale de l'action (l'intégrale entre t_1 et t_2).

Dans l'espace des configurations : ceci revient à dire que les configurations effectives, au cours du temps, d'un système physique entre deux états donnés $\{q_i(t_1)\}$ et $\{q_i(t_2)\}$ correspondent à la courbe dans l'espace des configurations pour laquelle l'action (intégrale de chemin suivant cette courbe) est minimale.

Equation d'Euler-Lagrange :

Le principe de moindre action est un principe variationnel, car ici nous cherchons à minimiser une grandeur donnée. En fait, nous cherchons les fonctions $q_i(t)$ qui minimisent cette grandeur.

La forme intégrale de l'action implique que cette propriété des fonctions $q_i(t)$ est une propriété globale. Nous pouvons, cependant chercher une propriété locale des fonctions qui lui est équivalente.

Supposons, dans un premier temps, que nous connaissons les fonctions $q_i(t)$ qui correspondent au minimum de l'action entre deux instants t_1 et t_2.

A l'instant initial t_1 et final t_2 les valeurs respectives $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2)$ sont connues.

Appliquons maintenant une variation infinitésimale « virtuelle et indépendante du temps» δq_i à ces fonctions mais en gardant les valeurs $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2)$ constantes (état initial et final fixés).

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$$

Dans l'espace des configurations ceci revient à changer la courbe des états (l'intégrale de chemin) mais en gardant le point de départ et le point d'arrivée fixes.

Ecrivons la variation de l'action qui en résulte

$$\delta \mathcal{S}[q_i(t)] = \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t).\,dt\right)$$

Comme cette variation est indépendante du temps

$$\delta \mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t).\,dt$$

Avec

$$\delta\mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

D'où

$$\delta \mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\,.\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\,.\,dt$$

Avec

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

En intégrant le deuxième terme du second membre par parties

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\,.\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\,.\,dt$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,.\,dt$$

Or puisque $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, le terme entre crochets est nul. D'où :

$$\delta \mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\,.\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,.\,dt$$

Et

$$\delta \mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i\,.\,dt$$

L'action étant minimale, la variation infinitésimale $\delta\mathcal{S}$ autour de ce minimum est nulle.

$$\delta \mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i\,.\,dt$$

Les variables étant indépendantes, alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, d$$

D'où, le principe de moindre action est équivalent aux équations (locales) d'Euler-Lagrange.

$$\mathcal{S}[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t).\,dt = \mathcal{S}_{\min} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$