Polycopié de cours

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Socle Commun Deuxième Année Licence Physique

Université Ziane Achour – Djelfa

CHAPITRE II

CALCUL VARIATIONNEL

CALCUL VARIATIONNEL

I. PRINCIPE VARIATIONNEL

Extrémum d'une fonction à plusieurs variables

Soit $f(x)$ une fonction salaire à une variable réelle x. Pour que la fonction $f(x)$ soit extrémale en un point x_0 il faut que :

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$$

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction salaire à n variables x_i $(i = 1, \dots, n)$. Pour que la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit extrémale en un point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ il faut que :

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

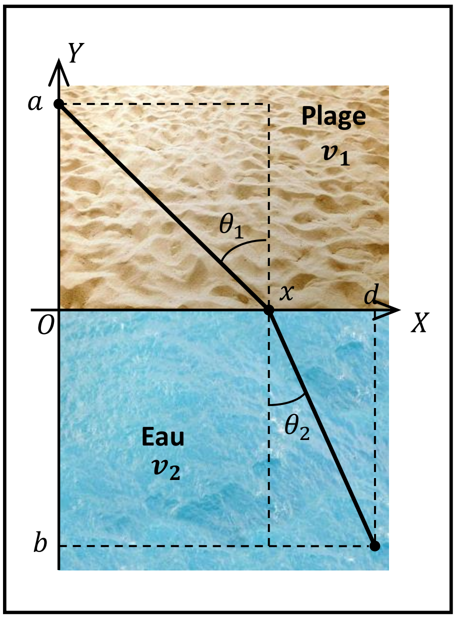
Si toutes les variables $\{x_i\}$ sont indépendantes, alors la somme précédente peut être remplacée par l'ensemble d'équations suivant :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_j=x_j^0} = 0 \qquad (i; j = 1, \dots, n)$$

La résolution du système d'équations ci-dessus donne la les coordonnées $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ des extrémums de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemple : *Problème du nageur – Principe de Fermat.*

Un sauveteur se trouvant au point de coordonnées $(0, a)$ veut arriver au plus vite pour sauver un nageur qui se noie au point $(d, -b)$. Sachant que la vitesse v_1 du sauveteur sur la plage $(y \geq 0)$ est plus grande que sa vitesse v_2 dans l'eau $(y \leq 0)$. Il faut alors qu'il trouve le point $(x, 0)$ où il doit entrer dans l'eau pour atteindre le nageur en un temps minimum.



Comme le mouvement du sauveteur est rectiligne uniforme sur la plage et dans l'eau

$$l_1 = v_1.t_1 \quad \text{et} \quad l_2 = v_2.t_2$$

Donc

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + a^2} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{1}{v_2}\sqrt{(x-d)^2 + b^2}$$

Et le temps total pour arriver au nageur

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(x-d)^2 + b^2}$$

Ce temps devant être minimum, nous écrivons alors

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{1}{v_2}\frac{(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}=0$$

Ou bien

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{v_2}\frac{(d-x)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}$$

Nous retrouvons alors la loi de Descartes pour la réfraction de la lumière

$$\frac{1}{v_1}\sin\theta_1=\frac{1}{v_2}\sin\theta_2$$

Equation d'Euler-Lagrange

Considérons une fonction scalaire $y(x)$ d'une variable réelle x continue et dérivable dans un domaine D de $\mathbb{R}$.

Notons $y'(x)=dy(x)/dx$ La dérivée de $y(x)$ par rapport à x.

Définissons une fonctionnelle $I[y]$ sous la forme d'une intégrale entre deux points x_1 et x_2.

$$I[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} f(y(x),y'(x),x).\,dx$$

Tel que

$$f(y(x),y'(x),x)$$

Est une fonction de $y(x)$, de $y'(x)$ et éventuellement une fonction explicite de x.

La fonctionnelle $I[y(x)]$ est une fonction de la fonction $y(x)$. C'est aussi une intégrale de chemin qui dépend de la courbe représentant la fonction $y(x)$.

En reprenant le principe variationnel que nous avons utilisé dans le chapitre précédent pour minimiser l'action, nous pouvons écrire :

La fonction $y(x)$ qui rend la fonctionnelle $I[y(x)]$ (intégrale) extrémale est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange

$$I[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} f(y(x),y'(x),x).\,dx=I_{\text{extremum}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

Remarque :

Les dérivées partielles $\partial f/\partial y$ et $\partial f/\partial y'$ sont calculées en considérant que les variables y , y' et x de f sont indépendantes.

<u>Exemple :</u> *Géodésique dans un plan euclidien.*

Cherchons le chemin le plus court entre deux points de appartenant à un plan euclidien.
Pour cela définissons une fonctionnelle sous la forme d'une intégrale entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

Un déplacement infinitésimal dans le plan s'écrit

$$d\vec{l} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Posons $y(x)$ une fonction de x qui définit la forme de la courbe qui minimise la distance entre les deux points, dans ce cas

$$dy = y'.dx \qquad \text{et} \qquad dl = \left(\sqrt{1 + {y'}^2}\right) dx$$

La longueur de la courbe est donnée par l'intégrale

$$L[y] = \int dl = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sqrt{1 + {y'}^2}\right) dx$$

Qui doit être minimale. Donc la fonction

$$f(y(x), y'(x), x) = \sqrt{1 + {y'}^2}$$

Doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

En dérivant, nous trouvons

$$\frac{d}{dx}\left(y'/\sqrt{1 + {y'}^2}\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ou

$$y'/\sqrt{1 + {y'}^2} = \text{Constante}$$

En prenant le carré de l'équation

$${y'}^2 = \left(1 + {y'}^2\right).C \qquad \Rightarrow \qquad y' = \left(\frac{C}{1 - C}\right)^{1/2}$$

Finalement

$$y' = \text{Constante} \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = a.x + b$$

Qui est l'équation d'une droite dans le plan.

Les constantes a et b sont déterminées à partir des conditions limites

$$\begin{cases} y_1 = a.x_1 + b \\ y_2 = a.x_2 + b \end{cases}$$

Formule de Beltrami :

Dans la cas où la fonction $f(y,y')$ ne dépend pas explicitement de x. Nous pouvons utiliser la formule de Beltrami

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{Constante}$$

Démonstration

Calculons

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$f(y,y',x)$ étant une fonction de y, de y' et de x.

$$df(y,y',x) = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial y'}dy' + \frac{\partial f}{\partial x}dx$$

Donc

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx} \text{ et } y'' = \frac{dy'}{dx}\right)$$

D'autre part

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

D'où

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \frac{\partial f}{\partial x} - y''\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Nous trouvons

$$\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Donc, si $f(y,y')$ ne dépend pas explicitement de x. $\partial f/\partial x = 0$ et

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{Constante}$$

Exemple : ***Géodésique dans un plan euclidien.***

Dans l'exemple précédent, l'intégrant ne dépend pas explicitement de x.

$$f(y(x),y'(x),x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

D'où la formule de Beltrami

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \sqrt{1 + y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{Constante}$$

Ce qui redonne $y' = \text{Constante}$ et $y(x) = a.x + b$.

II. MÉTHODE VARIATIONELLE AVEC CONTRAINTE

Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour une fonction à plusieurs variables.

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction salaire à n variables x_i $(i = 1, \dots, n)$. Pour que la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soit extrémale en un point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ il faut que :

$$df(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

Si toutes les variables $\{x_i\}$ sont indépendantes, alors la somme précédente peut être remplacée par l'ensemble d'équations suivant :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_j = x_j^0} = 0 \qquad (i; j = 1, \dots, n)$$

Maintenant, si les variables $\{x_i\}$ ne sont plus indépendantes et vérifient la contrainte de type holonome suivante

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

La solution du système d'équation précédent ne donne plus l'extremum de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

La méthode directe consiste à exprimer une variable, x_n par exemple, en fonction des autres variables x_i $(i = 1, \dots, n-1)$ et de la remplacer dans la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nous revenons ainsi à un ensemble de $(n-1)$ variables indépendantes, et la position de l'extremum est redonnée par un système de $(n-1)$ équations semblable au système précédent.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange, utilise un paramètre μ, appelé multiplicateur de Lagrange, pour introduire la contrainte. Comme

$$dg(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0$$

Nous pouvons écrire pour n'importe quelle valeur de μ.

$$df - \mu . dg = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

Maintenant ***nous choisissons*** μ de manière à vérifier

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

Les $(n-1)$ variables restantes étant indépendantes, il vient que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n-1)$$

Le multiplicateur de Lagrange μ sera déterminé à posteriori par l'équation supplémentaire donnant la contrainte $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Exemple : ***Canette.***

On cherche à calculer les dimensions (rayon R et hauteur L) d'un récipient cylindrique, pour que sa surface soit la plus faible possible pour un volume donné.
Donc, nous devons minimiser la surface $S = 2\pi R.L + 2\pi R^2$ en gardant un volume constant, d'où la contrainte $V = \pi R^2.L = \text{Constante}$.

La méthode directe consiste à remplacer une des variables (R, L), par exemple

$$L = V/\pi R^2$$

Puis à chercher le minimum de S.

$$S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = S_{\min} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dS}{dR} = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = 0$$

Ce qui donne

$$R^3 = \frac{V}{2\pi}$$

Ou encore, en remplaçant V

$$L = 2R$$

Dans la méthode des multiplicateur de Lagrange, nous gardons les deux variables (R, L) et nous cherchons le minimum de

$$S - \mu.V = 2\pi R.L + 2\pi R^2 - \mu.\pi R^2.L$$

D'où les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial R} - \mu \dfrac{\partial V}{\partial R} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial L} - \mu \dfrac{\partial V}{\partial L} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2\pi L + 4\pi R - \mu.2\pi RL = 0 \\ 2\pi R - \mu.\pi R^2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ces deux équations donne

$$R = \frac{2}{\mu} \qquad \text{et} \qquad L = \frac{4}{\mu}$$

Et en remplaçant dans la contrainte $(V = \pi R^2.L = \text{Constante})$ nous trouvons μ

$$\mu^3 = \frac{16\pi}{V}$$

Ce qui donne finalement

$$R^3 = \frac{V}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad L^3 = \frac{4V}{\pi} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{L = 2R}$$

Laquelle de ces deux canettes est la plus proche
de la condition $L = 2R$?

Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour une fonctionnelle.

Contraintes de type holonome.

Nous pouvons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour chercher les extremums d'une fonctionnelle à plusieurs variables $y_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ (qui sont en fait des fonctions scalaires de x), dans le cas où ces variables sont liées par une contrainte de type holonome.

La fonctionnelle s'écrit

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x).\, dx$$

Tel que $f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x)$ est une fonction des variables $\{y_i\}$ de leurs dérivées $\{y_i'\}$ par rapport à x et peut être fonction explicite de x.

La contrainte holonome s'écrit

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = 0$$

Comme l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} g(y_1, y_2, \dots, y_n, x).\, dx = 0$$

Alors les variables $\{y_i(x)\}$ (fonctions de x) qui rendent la fonctionelle extremale, donnent aussi l'extremum de la fonctionnelle

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) - \mu(x).\, g(\{y_i\}, x)\big).\, dx$$

$\mu(x)$ est une fonction de x appelée multiplicateur de Lagrange.

Nous pouvons alors écrire les $(n+1)$ équations : (n) équations d'Euler-Lagrange plus une (01) équation de la contrainte

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial h}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ g(\{y_i\}, x) = 0 \end{cases}$$

Avec

$$h(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) = f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) - \mu(x).\, g(\{y_i\}, x)$$

la résolution de ce système d'équations différentielles donnent les (n) solutions $y_i(x)$ et le multiplicateur de Lagrange $\mu(x)$.

Exemple : ***Géodésique sur une sphère.***

Contraintes de forme intégrale.

Dans le cas où la contrainte s'écrit sous une forme intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} g(\{y_i\},\{y_i'\},x).dx = \text{Constante}$$

La position $\{y_i^0\}$ de l'extremum de la fonctionnelle

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(\{y_i\},\{y_i'\},x).dx$$

Correspond à la position de l'extremum de la nouvelle fonctionnelle

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(\{y_i\},\{y_i'\},x) - \mu.g(\{y_i\},\{y_i'\},x)\big).dx$$

μ est le multiplicateur de Lagrange.

Nous pouvons alors écrire les (n) équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial h}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Avec

$$h(\{y_i\},\{y_i'\},x) = f(\{y_i\},\{y_i'\},x) - \mu(x).g(\{y_i\},\{y_i'\},x)$$

Et en remplaçant les expressions des solutions $y_i(x)$ en fonction du multiplicateur de Lagrange dans l'intégrale donnant la contrainte, nous trouvons $\mu(x)$.

Exemple : ***Corde pesante.***

On cherche à trouver l'équation donnant la forme d'une corde ayant une densité linéique de masse $\lambda = dm/dl$ et une longueur l. La corde est attachée à deux points de même hauteur $(x = x_0\,, y = 0)$ et $(x = -x_0\,, y = 0)$, tel que x est la position horizontale et y la position verticale. La corde est soumise uniquement à la force gravitationnelle.

La grandeur à minimiser est l'énergie potentielle gravitationnelle de la corde

$$U_{\text{gravit}} = \int dm.g.h$$

Donc

$$U_{\text{gravit}} = g\lambda \int y.dl = g\lambda \int_{-x_0}^{x_0} y(x).\sqrt{1 + y'^2(x)}.dx$$

D'où la fonction qui doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange est

$$f(y, y', x) = y.\sqrt{1 + y'^2}$$

Or nous avons une contrainte sous la forme d'une intégrale

$$l = \int dl = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2(x)}.dx$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la nouvelle fonction qui doit satisfaire à l'équation d'Euler-Lagrange est

$$h(y, y', x) = y.\sqrt{1+y'^2} - \mu.\sqrt{1+y'^2} = (y-\mu).\sqrt{1+y'^2}$$

μ étant le multiplicateur de Lagrange

Remarquons que la fonction h ne dépend pas explicitement de x, donc nous pouvons utiliser la formule de Beltrami

$$h - y'\frac{\partial h}{\partial y'} = a$$

a est une constante d'intégration, donc

$$(y-\mu).\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{(y-\mu).y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y-\mu}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

Donc

$$(y-\mu)^2 = a^2\left(1+y'^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y-\mu}{a}\right)^2 - 1}$$

En séparant les variables

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\mu)^2/a^2 - 1}} = dx$$

On fait le changement de variable suivant

$$u^2 = (y-\mu)^2/a^2 \quad \Rightarrow \quad u = (y-\mu)/a \qquad \text{et} \quad dy = a.du$$

On obtient alors

$$\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{a}dx$$

En intégrant

$$\operatorname{arccosh} u = \frac{1}{a}(x+b)$$

b est une deuxième constante d'intégration, et donc

$$u = \cosh\left(\frac{x+b}{a}\right)$$

Et

$$y = a.\cosh\left(\frac{x+b}{a}\right) + \mu$$

Pour calculer les constantes nous utilisons les conditions limites

$$a.\cosh\left(\frac{x_0+b}{a}\right) + \mu = 0 \qquad \text{et} \qquad a.\cosh\left(\frac{-x_0+b}{a}\right) + \mu = 0$$

En faisant l'égalité des deux équations

$$\begin{cases} x_0 + b = -x_0 + b \\ x_0 + b = x_0 - b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 0 \quad \text{impossible} \\ b = 0 \end{cases}$$

Et en remplaçant dans les conditions précédentes

$$\mu = -a.\cosh(x_0/a)$$

D'où

$$y = a\left(\cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x_0}{a}\right)\right)$$

La constante a est calculée à partir de la contrainte

$$l = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}.dx = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}.dx$$

$$l = \int_{-x_0}^{x_0} \cosh\left(\frac{x}{a}\right).dx = \left[a.\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-x_0}^{x_0} \qquad \Rightarrow \qquad l = 2a.\sinh\left(\frac{x_0}{a}\right)$$

Généralisation

Fonctionnelle dont nous cherchons l'extremum

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x).dx$$

Contraintes de type holonome

k contraintes de la forme

$$g_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, k)$$

Nous cherchons l'extremum de la fonctionnelle

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) - \sum_\alpha \mu_\alpha(x).g_\alpha(\{y_i\}, x)\right).dx$$

Nous calculons les solutions $y_i(x)$ en fonction des $\mu_\alpha(x)$. Et les multiplicateurs de Lagrange sont calculés en remplaçant $y_i(x)$ dans le système d'équation donné par les contraintes.

Contraintes de forme intégrale

k contraintes de la forme (K_α sont des constantes)

$$\int_{x_1}^{x_2} g_\alpha(\{y_i\}, \{y_i'\}, x).dx = K_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, k)$$

Nous cherchons l'extremum de la nouvelle fonctionnelle

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left(f(\{y_i\}, \{y_i'\}, x) - \sum_\alpha \mu_\alpha.g_\alpha(\{y_i\}, \{y_i'\}, x)\right).dx$$

Nous calculons les solutions $y_i(x)$ en fonction des μ_α. Et les multiplicateurs de Lagrange sont calculés en remplaçant $y_i(x)$ dans le système d'équation donné par les contraintes.